BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

HIDRAULICA TEORETICĂ

(MECANICA FLUIDELOR)

ŞI

APLICATĂ

de

Ing. D. GERMANI
Profesor la Politechnica
din București

Vol. II

HIDRODINAMICA FLUIDELOR PERFECTE
Partea I-a

Universitatea din Iași
Seminarul matematic
1946: 98

BUCUREȘTI
1945

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

In memoria prea scumpului
meu fiu Şerban.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

PREFAȚĂ

Materia, care face obiectul volumului II al *Hidraulicei Teoretice și Aplicate*, este de bună seamă cea mai importantă din punctul de vedere al principiilor *Mecanicei Fluidelor*. Desvoltările teoretice și justa aplicare a acestor principii s'au dovedit fecunde, deschizând orizonturi tot mai largi și eliberând Hidrodinamica de vechiul ei caracter în deobște empiric, puțin favorabil marilor progrese și aplicațiunilor delicate.

Pentru a nu depăși dimensiunile unei cărți ușor de mânuit, am împărțit acest volum în două părți, din care prezentăm deocamdată numai prima, cu nouă capitole, având pe scurt următorul conținut:

Cap. I cuprinde generalități, stabilindu-se între altele criteriul de delimitare între *regimul laminar* și cel *turbulent*. Aceasta se face pe baza *similitudinei mecanice*, pentru care a trebuit să schițăm de pe acum teoria noastră elementară, unde rolul quasi-misterios al *numărului lui Reynolds* apare în adevărata lui lumină; într'adevăr, constatându-se că acest număr este exact inversul *coeficientului specific al viscozității*, se înțelege de la sine că el poate reprezenta acest parametru, care guvernează felul regimului și trecerea de la un regim la altul.

Cap. II tratează despre *cinematica* fluidelor perfecte și a celor naturale în regim laminar, singurele cazuri cari se pretează studiului analitic. In complement (cu numeratoare deosebită a formulelor) dăm elementele de *calcul vectorial* și *tensorial*, utile în acest domeniu.

In *Cap. III* se arată proprietățile generale ale *mișcărilor potențiale*, derivând din proprietățile funcțiunilor armonice.

In *Cap. IV* se expun diferitele *metode*, întrebuințate pentru găsirea de soluțiuni ale ecuației lui *Laplace*, reprezentând *mișcări potențiale* în trei dimensiuni, de fluide incompresibile. Acest

capitol conține complementele trebuincioase asupra transformării coordonatelor carteziene în *sisteme curbilinii*, mai potrivite pentru studiul anumitor probleme, precum și asupra *funcțiunilor sferice, cilindrice* și *elipsoidale*, cari convin acestor probleme prin simetria ce o prezintă în raport cu un punct, o axă, etc.

Cap. V tratează despre *dinamica* fluidelor perfecte, stabilindu-se diferitele ecuații uzuale, vectoriale și scalare, ale Hidrodinamicei acestor fluide, precum și formele, pe care ele le îmbracă în cazul raportării la un *sistem de referință antrenat*.

Cap. VI cuprinde unele *aplicațiuni practice*, bazate pe capitolele precedente, precum: scurgerea lichidelor prin orificii, studiul loviturilor de berbec în conductele motrice, scurgerea gazelor.

In *Cap. VII* se stabilesc ecuațiile lui *Navier-Stokes* pentru fluidele viscoase în *regim laminar*, al căror studiu, paralel cu acela al fluidelor perfecte, se impune pentru o anumită generalizare a teoremei lui *Thomson*, obicinuit demonstrată numai pentru fluidele perfecte. Un subcapitol tratează despre *lucrul mecanic al viscozității* invederându-se restricțiunile ce trebuesc făcute la interpretarea teoremei lui *Bernoulli*, în cadrul principiului conservării energiei.

Cap. VIII este consacrat importantei teoreme a lui *Thomson*, a cărei formulare, în cazurile în care ea se aplică, constitue, în esență, un alt aspect al ecuațiilor Hidrodinamicei clasice.

Cap. IX tratează despre *acțiunea dinamică* a fluidelor asupra unor pereți fixi sau mobili, chestiune de o curentă aplicare în studiul receptorilor hidraulici (pentru problema unui corp solid, complet înplântat în fluid, vezi restul cursului).

Prin numeroasele aplicații, date în acest capitol, am căutat să arătăm avantajele considerării echillbrului fictiv, dar tot odată să înlăturăm confuzia, care se face uneori, de a se atribui forțelor lui *d'Alembert*, *fictiv* aplicate corpurilor în mișcare neuniformă sau nerectilinie, o realitate, care, cu expresia $\Sigma(-m\bar{j})$, nu există de cât pentru *reacțiunile* acestora, datorite mișcărei lor, asupra corpurilor streine cu cari vin în contact.

Partea a doua a volumului II va cuprinde, după o introducere la *Teoria Funcțiilor*, *Hidrodinamica Plană*, *Teoria Turbioanelor*, *Portanța* și *Rezistența fluidelor* (la mișcarea relativă a unui corp, complet implântat în fluidul înconjurător).

In general am căutat a păstra normele expuse în prefața volumului I, cu mici abateri ce am socotit oportune în cursul publicării. Astfel, având în vedere dificultățile de tipar și întâr-

zierea cu care vor apare de sigur celelalte volume, în situația grea creată de consecințele războiului, ne-am hotărât a da de pe acum, prin *complementele* menționate, noțiunile de *matematică fizică*, indispensabile sau utile diverselor capitole, reducându-se astfel materia *volumului complementar* anunțat.

Pentru unele chestiuni de bază, a căror asimilare are o deosebită importanță în stăpânirea acestei discipline, ne-am permis a da două și chiar trei demonstrațiuni sau de a adăoga note, mai mult sau mai puțin lungi, asupra unor cazuri particulare, spre a pune în evidență esența teoriei.

In fond, ceea ce ne-am străduit a realiza este mai puțin etalarea unui material bogat și variat, de cât punerea la îndemână a instrumentelor de calcul și de gândire, necesare în acest domeniu și care, tot odată, să servească drept chee pentru consultarea tratatelor mai desvoltate și mai complete în diversele ramuri de specialitate,

In modul acesta sperăm a fi venit în ajutorul technicienilor, doritori de a-și apropia mai temeinic principiile fundamentale ale teoriei și de a le mânui cu siguranță și folos la abordarea problemelor mai delicate, aproape inaccesibile pe calea empirismului.

Cititorul va putea aprecia eficiența metodei în tratatea diverselor aplicațiuni, împrumutate fie din Hidrodinamica clasică a lui *Lamb* sau altor autori, fie din colecția de probleme *Wiffenbauer*, din care unele a trebuit să fie puse la punct, prin aplicarea riguroasă a principiilor. De asemenea, ca o interesantă aplicație, care evidențiază metoda de lucru a școalei din Goettingen, am reprodus, adaptând-o cursului, teza de doctorat a asistentului nostru D-l Ing. *D. Dumitrescu*

Terminăm, reînoind mulțumirile noastre către d-l Ing. *V. Bradler*, fostul nostru elev, care a continuat a ne da concursul său devotat la întocmirea figurilor și la corecturile tipografice.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

BIBLIOGRAFIE

Horace Lamb. Lehrbuch der Hydrodynamik, deutsch von E. Helly, 1931 (Cap. III, IV, V, VI. VII).

Dr. Wilhelm Müller. Mathematische Strömungslehre, Berlin 1928 (Cap. V, IX).

Prandtl-Tietjens. Hydro=und Aeromekanik, Band I, Berlin 1929 (Cap. II).

I. Pérès. Cours de Mécanique des fluides, Paris 1936 (Cap. II, IX).

R. Grammel. Meckanik der flüssigen und gasförmigen Körper, Berlin 1927 (Cap. III).

L. Schiller. Hydro-und Aerodynamik, I. Teil (Handbuch der exper. Physik), Leipzig 1931 (Cap. I).

L. Prandtl. Strömungslehre, Berlin 1942 (Cap. V).

H. Villat. Leçons sur l'Hydrodynamique, Paris 1929 (Cap. IV).

Dr.-Ing. Walther Kaufmann. Angewandte Hydromekanik I, Berlin 1931 (Cap. III).

Paul Appel. Mécanique Rationnelle, Tome IV, Paris 1921 (Cap. IV).

Lorenzo Alliévi. Théorie du Coup de Bélier, tradus de Daniel Gaden, Paris 1921.

R Courant D. Hilbert. Methoden der Math. Physik Band I, Berlin 1924 (Cap. IV).

Prof. Dr. Iosef Lenze Reihenentwicklungen in der math. Plysik, Berlin 1933 (Cap. IV).

Dr. Erwin Madelung. Die math. Hilfsmittel des Physikers, Berlin 1925 Cap. (II, III).

Harry Schmidt. Einführung in die Vektor-und Tensor=Rechnung. Leipzig, 1935 (Cap. II),

R. Gans Einführung in die Vertoranalysis (Cap. II, III).

G. Coffin, Prof. au Collège de New-York. Calcul vectoriel, traduit par Veronnet, Paris (Cap. II).

Prof. Dr. Siegried Valentiner, Vectoranalysis (S. Göschen), 1912 (Cap. II).

Wittenbauer. Aufgaben aus der techn. Mechanik, Band III, Berlin 1917 (Cap. VI, IX).

Dr.-Ing. Theodor Pöschl. Lerhrbuch der Hydraulik (Cap. VI).

Georg Hamel. Über die Potentialströmungen zäher Flüssigkeiten, Zeitschrift für angew. Math. und Mech, Band 21, Heft 3, Iuni 1941, Berlin (Cap. VIII).

D. T. Dumitrescu. Strömung an einer Luftblase im senkrechten Rohr, Zeitsch. für angew. Math. und Physik, Band 23 Heft 3, Iuni 1943, Berlin (Aplicaţia Nr. 57).

D. Germani. Sur la structure des formules et la synthèse des lois de similitude en Physique, ed. I. R. E. Bucureşti (Cap. I).

D. Germani. Sur le coup de bélier. Construction d'oscillogrammes théoriques, Bull. de Math. et de Phys. de l'École Polytechnique de Bucarest, Fasc. 22,23,24, 1937 (Cap. VI).

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

TABLA DE MATERIE

Prefaţă V
Bibliografie IX
Notaţii XV
Errata XIX

HIDRODINAMICA

PARTEA I

CAP. I. Fluide perfecte şi fluide naturale.

Pag.

1 — Definiţii şi generalităţi 3
2 — Regimuri de scurgere 4
3 — Regim laminar sau liniştit 4
4 — „ turbulent 6
5 — Observaţiuni relative la prezenţa viscozităţii şi la diferenţa între cele două regimuri 7
6 — Delimitarea între cele două regimuri. Teoria similitudinei mecanice 9
7 — Numărul lui Reynolds 12
8 — Mişcare medie în regim turbulent 14
9 — Debit 15

CAP. II. Cinematica fluidelor perfecte şi a celor naturale în regim laminar.

1 — Linii de curent, traectorii, linii de fir sau fire 17
2 — Dependenţa formei unui curent de starea de repaos sau de mişcare a sistemului de referinţă 21
3 — Câmpul de vitesă în domeniul unui punct A 23
4 — Rotaţionalul sau rotorul vitesei 24
5 — Deformaţiuni elementare 26
6 — Descompunerea, după Helmholz, a mişcării unei particule fluide . 28
7 — Integrală curbilinie a vitesei. Circulaţie. Cazul mişcărilor potenţiale 33
8 — Teorema lui Stokes 36
9 — Funcţie sau potenţial de vitesă (cazul mişcărilor nerotaţionale) . 40
10 — Spaţiu simplu conex. Potenţial uniform 41
11 — Spaţiu multiplu conex. Potenţial multiform 42

TECHNICAL UNIVERSITY LIBRARY IAŞI

Pag.

12 — Teorema lui Gauss 42
13 — Interpretări sau consecinţe matematice ale teoremelor lui Gauss şi Stokes 43
14 — Descompunerea acceleraţiei, adică a derivatei substanţiale a vitesei, în derivata parţială de timp şi, înmulţită cu v, derivata parţială de spaţiu (derivată staţionară sau sub t constant) 44
15 — Condiţiile la limită şi consecinţele continuităţii admise . . . 47

Complement asupra calculului vectorial şi tensorial util în Hidrodinamică.

1 — Produs scalar 50
2 — „ vectorial 51
3 — Derivata scalară a unui vector 51
4 — „ vectorială a unui scalar 51
5 — „ „ „ „ vector 52
6 — Distributivitate şi produse simbolice 53
7 — Gradient şi operatorul nabla 53
8 — Divergentă şi operatorul nabla 54
9 — Rotaţional sau rotor şi operatorul nabla 55
10 — Câmp $\overline{v}$ potenţial sau laminar 56
11 — „ $\overline{v}$ solenoidal, adică cu divergenţă nulă 58
12 — Conexiuni multiple 59
13 — Potenţial-vector $\overline{w}$ al unui câmp solenoidal $\overline{v}$ 59
14 — Câmp $\overline{v}$ simultan lamelar şi solenoidal 61
14a— Câmpuri plane 63
15 — Câmpuri tensoriale şi operator tensorial 66
16 — Operator diadic sau produs diadic sau diadă 70
17 — Diadă completă, echivalentă cu tensorul 75
18 — Exprimarea prin tensor a unei funcţiuni vectoriale liniare omogene 77
19 — Teusorul repartiţiei afine a unui câmp vectorial în domeniul unui punct 78
20 — Recapitularea operaţiilor cu simbolul vectorial ∇ (nabla) şi simbolul tensorial T 82
21 — Descompunerea după Helmholtz a câmpului vitesei în domeniul unui punct 83
22 — Elipsoidul tensorial al deformaţiei în domeniul unui punct . . . 85
Aplicaţiuni de calcul vectorial 90

CAP. III. Proprietăţi generale ale mişcărilor potenţiale în spaţii simplu şi multiplu conexe.

1 — Proprietăţile funcţiunei de vitesă Φ în spaţii liniar simplu conexe 106
2 — Teorema lui Gauss şi aplicaţiile ei în spaţii simplu conexe . . 116
3 — Domenii liniar multiplu conexe 126
4 — Exemple de mişcări potenţiale în trei dimensiuni în cazul fluidelor incompresibile 136

CAP. IV. Metode pentru găsirea de soluţiuni ale ecuaţiei lui Laplace, adică de mişcări potenţiale de fluide incompresibile în trei dimensiuni.

1 — Complement asupra transformării coordonatelor carteziene în sisteme curbilinii 151
Aplicaţii 158
2 — Metodă prin funcţiuni sferice 164
3 — Complement asupra funcţiunilor sferice 165
4 — Metoda lui Rankine 227
Aplicaţii 231
5 — Complement asupra funcţiunilor cilindrice 245
Aplicaţii 256
6 — Funcţiuni elipsoidale 268

CAP. V. Ecuaţiile generale ale hidrodinamicei fluidelor perfecte.

1 — Reamintirea formulelor şi stabilirea unor noi variante utile . . 299
2 — Cazul existenţei unei funcţiuni de vitesă, integrarea ecuaţiilor lui Euler devenind posibilă 307
3 — Teorema lui Lagrange 310
4 — Interpretarea mecanică a potenţialului de vitesă 314
5 — Integrare spaţială a ecuaţiilor lui Euler pe o linie de curent . . 320
Apiicaţii 324
6 — Studiu general al unui curent sau al unui fir în mişcare semipermanentă 337
7 — Propagarea unei perturbaţiuni printr'un mediu fluid într'un tub drept perfect rigid 345
8 — Mişcare permanentă. Studiu general al unui fir în mişcare permanentă 355
9 — Extinderea teoremei lui Bernoulli la o vână sau la un curent fluid în mişcare permanentă 367
10 — Consideraţiuni asupra măsurării presiunei şi vitesei într'un curent fluid 375
Aplicaţii 377
11 — Ecuaţiile Hidrodinamlcei, raportate la un triedru de referinţă antrenat 381

CAP. VI. Aplicaţiuni practice.

1 — Scurgere prin orificii a unui lichid 389
Aplicaţii 411
3 — Studiul unei vine de gaz 443
Aplicaţii 453

CAP. VII. Trecerea de la ecuaţiile mecanice ale lui Euler pentru fluidele perfecte la ecuaţiile lui Navier-Stokes pentru fluidele viscoase în regim laminar.

1 — Bazele teoriei 457

BIBLIOTECA CENTRALĂ UNIVERSITARĂ

2 — Fluide incompresibile 463
3 — Fluide compresibile (gaze) 467
4 — Lucrul, în unitatea de timp, al forţelor de viscozitate, exercitate pe suprafaţa unei mase fluide ($\mathcal{P}_s'$) şi puterea disipată intern ca căldură, prin jocul viscozttăţei ($\mathcal{P}_l'$) 469

CAP. VIII. Integrala de linie a vitesei în ecuaţia scalară a mişcărilor potenţiale şl celor rotaţionale. Teorema lui Thomson la fluidele perfecte şi cele visoase incompresibile. Mişcări de rotaţie potenţiale şi rotaţionale.

1 — Conexitate liniară 480
2 — Teorema lui Lagrange, drept caz particulur al teoremei lui Thomson 480
3 — Demonstrarea teoremei lui Thomson sau Lord Kelvin 482
4 — Cazul unei linii deschise 488
5 — Cazul unui element de linie fluidă 489
6 — Cazul mişcărei permanente 490
7 — Mişcări de rotaţie a unui lichid, rotaţionale, sau potenţiale cu Φ uniform ori multiform (ciclice). Aplicaţii 494

CAP. IX. Acţiunea dinamică a unui fluid în mişcare asupra unor pereţi fixi sau mobili, egală şi de sens contrar cu reacţiunea acestora.

1 — Echilibru dinamic (fictiv) 502
2 — Cazul fluidelor perfecte incompresibile, având eventual surse repartizate şi părti rotaţionale, într'un câmp de forţă exterioară nul . . 512
Aplicaţii 517

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

NOTAȚII

e = intensitate de debit sau debit specific de sursă (raportat la unitatea) de suprafață.

f = efortul intern, total sau numai de viscozitate.

$h \equiv \frac{1}{g}\left(U + \int \frac{dp}{\rho} - \frac{v^2}{2}\right)$

$\overline{j}$ = accelerație; $\equiv$ y.

m = moment specific (intensitate) de dubleu plan; masă.

$\overline{n}[n_x, n_y, n_z]$ = vectorul unitar sau de direcție după normala (exterioară) la o suprafață, notat uneori $[l, m, n]$.

$\overline{p}$ = vectorul efortului interior (pe unitatea de suprafață), compus din presiunea normală p și din efortul $\overline{p'}$ (sau $\overline{f}$) de viscositate sau de frecare cu peretele.

q = debit specific de sursă volumică (raportat la unitatea de volum); debit de sursă plană (raportat la unitatea de lungime, perpendiculară pe plan).

r = coordonată sferică.

$\overline{r}$ = rază vectoare.

s = lungime de linie.

x = coordonată carteziană.

$\mathbf{x} \equiv \overline{i}$ = vector unitar sau vector de direcție după axa x.

y = coordonată carteziană.

$\mathbf{y} \equiv \overline{j}$ = vector unitar sau vector de direcție după axa y.

z = coordonată carteziană.

$\mathbf{z} \equiv \overline{k}$ = vector unitar sau vector de direcție după axa z.

$B(a, b)$ = funcția lui Euler de prima speță.

D = diadă.

E = modul de elasticitate la solide.

$\mathcal{F}$ = tensorul efortului intern.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$H \equiv \frac{1}{g}\left(U + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2}\right)$

I_{AB} = integrala de linie a vitesei pe curba AB.
M = moment de dubleu în spaţiu.
$\mathcal{P}'_i$ = putere disipată prin viscositatea internă.
$\mathcal{P}'_s$ = putere transmisă prin viscositatea dela suprafaţă.
P_s = produs scalar.
P_v = produs vectorial.
$\mathcal{P}$ = polinom al lui Legendre.
Q = debit de volum
R_1, R_2, R_3 = semiaxele principale ale elipsoidului tensorial $(\mathcal{T}_s)$.
$\mathcal{R} \equiv \frac{1}{\nu_s}$ = numărul lui Reynolds.
S = funcţiune Laplace (sferică de suprafaţă); cantitate de mişcare a masei ce străbate o secţie în unitatea de timp.
T = $^1/_2$ din forţa vie sau energia cinetică a masei ce străbate o secţie în unitatea de timp,
T = tensor oarecare.
T_a = tensor asimetric.
T_e = tensor conjugat.
T_s = tensor simetric,
$\mathcal{T}$ = tensorul repartiţiei afine sau afinor.
U = potenţial.

α = unghiu.
α, α' = coeficienţi corectivi ai expresiilor de forţă vie, respectiv de cantitate de mişcare, a debitului de masă prin o secţie.
α_x, α_y, α_z, = vitesele de deformaţie liniară proporţională după direcţiile x, y, z.
α_1, α_2, α_3 = vitesele de deformaţie liniară după direcţiile principale.
β = unghiu.
β_x, β_y, β_z = $\frac{1}{2}$ din vitesele de deformaţie unghiulară.
δ şi uneori Δ = diferenţă, care la limită devine d (diferenţială).
ε = modul de elasticitate al apei.
η = randament sau eficienţă.
θ = vitesa de dilataţie volumică; unghiul lui $\bar{r}$ cu axa polară (coordonată sferică).
$\mu \equiv \frac{2L}{a}$ = fază sau semiundă de propagare.

μ = coeficient de viscozitate; uneori debit de sursă pe unitatea de volum.

ν = coeficient de viscozitate cinematică.

$\nu_s \equiv \frac{1}{\mathcal{R}}$ = coeficient de viscozitate specifică.

$\xi = cos\,\theta$, unde θ este coordonată sferică.

ρ = densitate; coordonată cilindrică.

σ = efort normal; suprafaţă.

$\varphi \equiv -\Phi$ = potenţial de vitesă; unghiu azimutal (coord. sferică sau cilindrică).

$\chi \equiv \int_o^t gh\,dt$, funcţia lui *Weber*.

ψ = funcţie de curent.

$\bar{\omega}\,[\omega_x\,,\ \omega_y\,,\ \omega_z\,]$ = vitesă de rotaţie.

Γ = circulaţia vitesei.

$\Gamma_{(a)}$ = funcţia lui Euler de a doua speţă.

$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ = laplacian.

Σ = sumă; suprafaţă.

$\Phi \equiv -\varphi$ = funcţie de vitesă.

$\bar{\Omega}\equiv 2\bar{\omega}$ rotaţionalul sau rot $\bar{v}$; suprafaţă sau arie.

$\oint$ = integrală de linie pe un contur închis, sau de suprafaţă pe o suprafaţă închisă.

∇ = operatorul lui *Hamilton* ($\nabla\,\Phi \equiv grad\,\Phi$, $\nabla\,v \equiv div\,\bar{v}$, $[\nabla\bar{v}] \equiv rot\,\bar{v}$)

N. B. Calificarea unei forţe drept *acţiune* sau *reacţiune* este relativă, după corpul în studiu. De obicei pentru un sistem, al cărui echilibru sau mişcare se studiază (de ex. o vână fluidă), se numeşte *reacţiune* $\bar{R}$ ansamblul forţelor aplicate asupra acelui sistem din partea corpurilor streine în contact, *acţiunea* sistemului fiind aplicetă asupra acestor din urmă corpuri.

Evident că, dacă în cursul studiului trecem la considerarea echilibrului sau mişcării unuia din aceste corpuri, de ex, o placă în contact cu fluidul, rolurile forţelor se intervertesc, însă notaţia trebue conservată ca să nu se producă confuzii.

In ultimul capitol d. e. s'a notat cu $\bar{I}$ *împingerea*, adică acţiunea apei asupra pereţilor solizi, compusă din acţiunea dinamică şi cea statică (neglijabilă la turbine), iar cu $\bar{R}$ reacţiunea acestor pereţi asupra fluidului în mişcare, Fiind vorba însă de starea acestor pereţi, $\bar{R}$ va reprezinta acţiunea lor iar $\bar{I}$ reacţiunea fluidului.

BUCHAREST CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

ERRATA

Adaos la errata Volumului I.

Pa.	Rândul	In loc de:	A se citi:
6	5 de sus	fluidele și gazele	lichidele și gazele
7	17 „ jos	transversal,	tangențial,
„	8 „ „	transversale	tangențiale
8	7 „ „	„	„
9	2 „ sus	τ_v	σ_v
„	16 „ jos	infinitizimală	infinitezimală
„	13 „	transtalație	translație
10	5 „ sus	fețete	fațete
„	13 „ „	transversal	tangențial
„	11 „ jos (formulă)		(a)
„	4 de jos (formulă)		(b)
11	2 de sus	axa xz	planul xoz
„	5 „ „	(Fig. 4)	Fig. 4
„	9 „ „	termen	termen după (a)
„	14 „ jos	exprimând	exprimând după (b)
15	11 „ sus	temperatură,	temperatură θ,
„	13 „ „	0.337	0,0337
17	15 „ jos	cm/kg	cm^2/kg
18	16 „ sus	$\varkappa\frac{\varpi z}{2}$	$\varkappa\frac{\varpi_0 z}{2}$
19	10 „ „	absorbițiune	absorbțiune
22	14 „ „	$kg\ sec^2 m^4$	$kg\ sec^2/m^4$
24	formula (2″)	$=\frac{a+bnp_0}{1\ \varkappa_n}$	$=\frac{a+bnp_0}{1-\varkappa_n}$
26	3 de sus	$\frac{d\rho/\rho}{dm}\rho m-n)$	$=\frac{d\rho/\rho}{dm}\rho\,(m-n)$
„	8 „ „	(vezi pag. 12)	(vezi pag. 18)
28	9 „ jos	$v_1, v_2 \ldots$	$\overline{v_1}, \overline{v_2} \ldots$
35	9 „ sus	$\frac{d}{dt}$	$\frac{dv_n}{dt}$
40	2 „ „	lui $\overline{G}_p$	lui $\overline{F}_1$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Pag.	Rândul	In loc de:	A se citi:
40	9 de jos	$cos \sphericalangle (nz)$	$cos\,(ny)$
41	7 „ sus	$= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n}$	$= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n}$
„	13 „ „	‚ale cărei	(ale cărei)
„	7 „ jos	*coincide*	*coincid*
43	Fig. 15	$\rightarrow v_x$	(a se muta cu originea în A)
„	5 de jos	$\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)$	$\left(\frac{\partial v_x}{\partial v} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) df$
44	5 „ sus	unitate	unitatea
45	5 „ jos	$=x+$	$=y+$
„	4 „ „	$=x+$	$=z+$
46	3 „ sus	$-\int\int\int_v dx\,dy\,dz$	$-\int\int\int_v \rho\,dx\,dy\,dz$
„	2 „ jos	infiniţii mici	infinit micii
51	12 „ sus	mişcars	mişcare
„	1 „ jos	ier	iar
52	14 „ sus	mişcre	mişcare
„	după 14 de sus		Dacă presupunem existenţa unui câmp de forţă exterioară singur $\overline{F}$, vom avea, oricare ar fi fluidul: $v'_x = F'_z$, $v'_y = F'_y$, $v'_z = F'_z$.
53	7 de sus	*Lagrauge*	*Lagrange*
55	4 „ „	generealizare	generalizare
56	1 „ „	obstracţie	abstracţie
„	4 „ „	seama	seamă
60	13 „ jos	newtoninana	newtoniana
84	6 „ sus	$\varpi dz - dp$	$\varpi dz + dp$
86	12 „ jos	$\int z d\Omega$	$\varpi \int z d\Omega$
90	1 „ sus	înălţimea	lăţimea
98	Fig. 45	a	b
„	„	$a+b$	a
100	12 de jos	$\Omega cos^2 \alpha$	$\Omega cos \alpha$
111	11 „ sus	a/z	$a/2$
„	14 „ jos	P_z	P_x
„	Fig. 68	C_z	(ridicat la înălţimea centrului)
123	6 de sus	Fig. 77)	(Fig. 77)

BCU IAŞI / CENTRALA UNIVERSITARĂ / LIBRARY

Pag.	Rândul	În loc de:	A se citi:
124	6 de sus	$\frac{d^2\zeta}{dt^2}\nu^2\zeta=0$	$\frac{d^2\zeta}{dt^2}+\nu^2\zeta=0$
„	12 „ „	$Ae^{\rho_2 t}+$	$\zeta=Ae^{\rho_2 t}+$
130	4 „ „	$g'g''$	$g'g$
132	15 „ jos	obsolut	absolut
135	4 „ „	$\frac{\partial^2 z}{\partial^2 x}=$	$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=$
141	Fig. 85		l (raza după 0ζ)
147	5 de sus	mitizimală	nitezimală
151	16 „ „	$\frac{r_n}{h_0}$	$\frac{r_n^2}{h_0}$
154	15 „ jos	permanetisa	permanentiza
162	4 „ „	adinioară	adinioară numai în argument
„	1 „ „	$x=R(\varphi+\pi)+r\sin\varphi$	$x=R\varphi+r\sin\varphi$
163	Fig. 100	B_x	(axa x, mai jos pe calea de rostogolire)
186	14 de jos	$H=\frac{\varpi\Omega G}{2P}$	$H=\frac{\varpi\Omega}{2P}$
191	13 „ sus	petru	pentru
208	5 „ „	$\cos\alpha_2+\cos\alpha_1$	$\cos\alpha_2-\cos\alpha_1$
210	4 „ jos	necesaremente	necesarmente
212	6 „ sus	pe deoaparte	pe deoparte
„	9 „ „	infiniți mici	infinit mici
218	15 „ jos	$\rho=$	$\varphi=$
219	8 „ sus	(1), obținem	(j), obținem din (1)
226	12 „ „	$\int_0^r$	$\int_0^\alpha$
„	10 „ jos	$\frac{z_1-\rho}{r}$	$\frac{z_1-\rho}{2}$
241	1 „ „	$\rho=$	$\frac{1}{\rho}=$
243	5 „ sus	lichidul în	fluidul în
„	10 „ „	F	F
245	1 „ „	în forma specială	avem și formula specială
246	17 „ „	care va da	care dă
„	18 „ „	*accelerație* $\bar{j}$	*accelerație* $\bar{g}$

POLITEHNICA CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Pag.	Rândul	In loc de:	A se citi:
249	17 de jos	Dacă vom	Presupunând aceste condiţii îndeplinite, deci vom
„	formula (2)	$+(g_y-\Gamma_y y)+$	$+(g_y-\Gamma_y)y+$
250	3 de jos	$\bar{g}$ şi $\bar{\Gamma}$	$\bar{g}-\bar{\Gamma}$
„	1 „ „	să fie constanţi şi orientaţi	să aibă o rezultantă constantă şi orientată
„	„ „ „	$(o\zeta$ sau	$(o\zeta$ *sau*
251	1, 2, 3 de sus	Cum $\bar{g}$... pentru $\bar{\Gamma}$.	Dacă numim *verticală fictivă* direcţia acestei rezultante a câmpului compus, se poate exprima condiţia, spunând că axa de rotaţie trebuie să aibă permanent direcţia acestei verticale.
„	9 de sus	$\bar{g}$ şi $\bar{\Gamma}$	$\bar{g}-\bar{\Gamma}$
„	18, 17, 16 de jos	paralelă cu $\bar{g}$	paralelă cu $\bar{g}$. (ştergând restul)
„	9, 8 de jos	verticale .. şi vertical	în direcţia verticalei fictive $\bar{g}-\bar{\Gamma}$.
252	10 de sus	$\bar{g}$ şi $\bar{\Gamma}$	$\bar{g}-\bar{\Gamma}$
253	17 „ „	$g_z+\Gamma_z$	$g_z-\Gamma_z$
„	ultima	$-\rho(t)$	$-\varphi(t)$
256	3 de jos	$=\frac{1}{\frac{g}{\Gamma_z}+tg\beta}$	$=\frac{1}{\frac{g}{\Gamma_x}+tg\beta}$
257	4 „ „	verticală şi constantă, eventual nulă	constantă, iar axa de rotaţie este paralelă cu $\bar{g}-\bar{\Gamma}$
„	3 „ „	vectorii $\bar{\omega}$ şi $\bar{\Gamma}$ trebuind să fie	dacă vectorii $\bar{\omega}$ şi $\bar{\Gamma}$ sunt
270	15 „ „	$(d+1)$	(d^2+1)
„	12 „ „	r_2^3	r_2^2

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Pag.	Rândul	In loc de:	A se citii:
273	20 de sus	$F_x = jcos\alpha$ şi $F_y = gjsin\alpha$	$F_x = -jcos\alpha$ şi $F_y = -g + jsin\alpha$
283	11 „ jos	$\frac{C}{c} log\, v$	$-\frac{C}{c} log\, v$
286	3 „ „	combinata	combinată
289	1 „ sus	$\frac{\varkappa - 1}{R}$	$\frac{\varkappa - 1}{\varkappa R}$
„	7 „ jos	$\frac{dT}{dz} =$	$-\frac{dT}{dz} =$
297	15 „ „	în o stratificaţie adiabatică	adiabatic
298	7 „ sus	gradienul	gradientul
304	12 „ jos	văzut, că	văzut că,
306	7 „ „	chilibru	echilibru
332	16 „ sus	suportă	suportă,
334	16 „ jos	cota O	cota 0 (zero)
335	ultima	Φu_z	Φu^2_z
341	8 de jos	deosibire	deosebire
„	9 „ „	scapare	scăpare
353	3 „ „	*forţă ascensională*	*ruptură de echilibru*
373	2 „ „	*Sfdola*	*Sfodola*

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

ERRATA

Volumului II, Partea I-a.

Pag.	Rândul	In loc de:	A se citi:
7	7 de jos	vicozitatea	viscozitatea
8	colontitlu	uide	fluide
„	1 de sus	8unor	unor
9	4 „ jos	*măsurilor*	*măsurile*
11	18 „ „	$f(l_2, v_1, \rho_2, \mu_2)$	$f(l_2, v_2, \rho_2, \mu_2)$
13	15, 14, 13 de jos	R_c	$\mathcal{R}_c$
„	1 de jos	Sprea . . . or	Spre . . . ori
14	11 „ „	Acecte	Aceste
15	16 „ „	$\overline{v}_n$ comp.	$\overline{v}_n$
17	5 de sus	functie	functie
18	14, 15 de sus	ψ_1, ψ_2	f_1, f_2
21	1 de sus	mai mai	mai
22	Fig. 4	A_0	A se trasa curba A0123 ca în Fig. 6
28	4 de sus	σ_z	σ_x
30	7 „ „	derpt	drept
33	12 „ „	dv_z, dv_y, dv_z	dv_x, dv_y, dv_z
46	6, 7, 8 de sus	$v\,grad$	$\overline{v}\,grad$
47	2 de sus	$\overline{v}grad\,\overline{v}=$	$\overline{v}grad\,\overline{v}$
„	7 „ „	∂v_z	v_z
50	1 „ „	COMLEMENT	COMPLEMENT.
51	15 de jos	axelor x, y, z	axelor x, y, z, notați deseori cu $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ ca la pag. 28.
„	4 „ „	$\frac{dv_z}{\partial z}$	$\frac{\partial v_z}{\partial z}$
52	9 „ „	$\frac{\partial v_z}{dy}$	$\frac{\partial v_z}{\partial y}$
53	1 de sus	$\frac{\partial v_z}{dx}$	$\frac{\partial v_z}{\partial x}$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Pag.	Rândul	In loc de:	A se citi:
53	11 de jos	$=\bar{s}(grad)\bar{v}$	. (adică a se şterge)
54	4 „ „	Δ	∇
„	1 „ „	$y\nabla_z$	$y\nabla_y$
55	5 de sus		zx
57	8 „ „	$\bar{v}\bar{s}$	$\bar{v}d\bar{s}$
„	12 de jos	$\frac{\partial v_y}{\partial x}$	$\frac{\partial v_y}{\partial x}$
60	8 de sus	$w_z=-\int_{z_0}^{z}$	$w_z=\int_{z_0}^{z}$
„	10 „ „	în prima	în ultima
„	11 „ „	f'_z	f'_x
64	3 „ „	Stohes	Stokes
„	14 de jos	$=\oint\bar{v}\bar{n}ds$	$\equiv\oint^{s}\bar{v}\bar{n}ds$
„	9 „ „	(20)	(22)
66	11 de sus	(20)	(21.2)
68	8 „ „	$\frac{\partial v_z}{\partial z}$	$\frac{\partial v_z}{\partial y}$
73	12 de jos	$a_y\ a_y$	$a_y\ b_y$
93	10, 6 de jos	a_{2z}	a_{3z}
107	8 de jos	se nu	sau nu
„	5 „ „	(2.1)	(2)
110	16 „ „	rotaţională	nerotaţională
112	7 „ „	spaţiu	spaţiu,
113	9 de sus	constantă,	constantă
121	2 „ „	impulsiune de presiune	presiune de impulsie
„	8 „ „	unei şi vitesei	une şi vitesei
„	14 de jos	de vitesa	de vitesă
124	11 de sus	$\bar{n}\bar{v}=$	$\bar{n}\bar{v}_0=$
126	16 de jos	e) Noţiuni	a) Noţiuni
128	5 de sus	de tăetură,	de tăetură
„	11 de jos	drepte	drept
137	17 „ „	$b=a$	$b=-a$
138	figura de sus	Fig. 25	Fig. 25 bis
„	6 de jos	$(x^2+y^2+2z^2)$	$(x^2+y^2-2z^2)$
„	5 „ „	$=x:y:z$	$x:y:-2z$
142	1 de sus	rămne, â	rămâne
148	3 de jos	$-\frac{1}{4\pi}\int^{s}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}+\frac{\partial\Phi'}{\partial n'}\right)ds$	$-\frac{1}{4\pi}\int^{\sigma}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}+\frac{\partial\Phi'}{\partial n'}\right)d\sigma$

BIBLIOTECA CENTRALĂ UNIVERSITARĂ

Pag.	Rândul	In loc de:	A se citi:
153	10 de sus	$\left(\frac{dx}{\partial u}\right)^2$	$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2$
178	10 „ „		(29.1)
187	7 „ „	n par.	n par
191	3 de jos	$+1n(n+1)$	$+2n(n+1)$
192	9 „ „	coordonate	coordonatele
212	9 de sus	$\int Q_\nu^2 d\xi$	$\oint Q_\nu d\xi$
216	3 de jos	faţă de P',	faţă de P,
217	14 de sus	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AP}$
220	3 „ „	$A=-1$	$C=-1$
221	5 de jos	$-\frac{1}{2}U\frac{a^2}{r^{-2}}\cos\theta$	$-\frac{1}{2}U\frac{a^2}{r^2}\cos\theta$
222	7 de sus	se mişă	se mişcă
223	Fig. 44	(poziţia figurei)	(răsturnată)
226	6 de jos	se resfiră	se resfiră în
231	15 de sus	$-Q_1, +Q$	$-Q, +Q$
232	8 „ „	mprimarea	imprimarea
234	7 de jos	$=\frac{9}{4}V_z\left(1-\frac{z^2}{a^2}\right)$	$=\frac{9}{4}v^2\left(1-\frac{z^2}{a^2}\right)$
„	6 „ „	$\frac{2}{3}U$	$\frac{3}{2}U$
236	12 de sus	$-Uz=\frac{Q}{4\pi}\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_2}\right)$	$-Uz+\frac{Q}{4\pi}\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)$
237	1 de jos	(74)	(47)
238	9 „ „	$\psi_2=$	$\psi_S=$
„	6 „ „	$\psi_2=\frac{1}{2}U(r^2_0-z^2_0)-\frac{Q(r_0-z_0)}{4\pi}$	$\psi_S=\frac{1}{2}U(r_0^2-z_0^2)-\frac{Q(r_0-z_0)}{4\pi r_0}$
242	9 „ „	$z=o$ şi $z=-a$	$z'=o$ şi $z'=a$
243	2 „ „	aveea stfel	avea astfel
245	10 de sus	trepte	treptei
246	13 de jos		(76)
249	8 de sus	a numitor	anumitor
„	13 „ „	*Bessele*	*Bessel*
„	3 de jos	$=2\alpha\sin\frac{\theta}{2}$	$=2a\sin\frac{\theta}{2}$
„	1 „ „	37)	(37)
251	5 de sus	$=\frac{n^s(k\rho)^s}{2^s\,.\,s!}(k\rho)^s\Big\{$	$=\frac{n^s(k\rho)^s}{2^s\,.\,s!}\Big\{$
„	8 „ „	$=I_s(k\rho)$	$=n^s I_s(k\rho)$
252	3 „ „	către $\left(\frac{a+a}{a}\right)^n$	către $\left(\frac{a+z}{a}\right)^n$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Pag.	Rândul	In loc de:	A se citi:
254	14 de jos	(84)	(83.2)
255	6 de sus		(84)
256	9 „ „	liniară	superficială
261	10 „ „	şi a ecuaţii aproximative	şi ecuaţia aproximativă
262	3 de jos	de curent	de curent tot cu $\psi = 0$
263	formula (95)	I'_1	I_1
267	1 de jos	din figura	din figură
269	8 de sus	$\left(\frac{z^2}{k^2\zeta^2} - 1^{1/2}\right.$	$\left(\frac{z^2}{k^2\zeta^2} - 1\right)^{1/2}$
„	8 de jos	are drept	au drept
„	1 „ „	$= \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial s_\xi}\, ds_\xi\, ds_\varphi\right) d\zeta$	$+ \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial s_\zeta}\, ds_\xi\, ds_\varphi\right) d\zeta$
270	9 „ „	pentru $z(\zeta)$	pentru $Z(\zeta)$
„	2 „ „	$\int$	$\int_\zeta^\infty$
271	9 „ „	(128)	(118)
„	formula (120)	$= \frac{1}{\zeta^2 - 1}$	$= -\frac{1}{\zeta^4 - 1}$
277	13 de jos	$\rho > k$	$\rho < k$
„	10 „ „	$k\zeta = \sqrt{k^2 - \rho^2}$	$k\xi = \sqrt{k^2 - \rho^2}$
287	6 şi 1 de jos	c c c	C C C
288	2, 9 şi 12 sus	c c c	C C C
289	13 de jos	$\Phi = U_n + V_y + W_z +$	$\Phi = Uz + Vy + Wx +$
291	7 „ „	$= B(k^2 - \rho^2)^{-1/2}$	$= A(k^2 - \rho^2)^{-1/2}$
297	2 „ „	*Ferrus*	*Ferrers*
298	1 „ „	*Bonet*	*Basset*
„	9 „ „	neceaare	necesare
304	14 de sus	şi (aceea de continuitate)	(şi aceea de continuitate)
„	2 de jos	teorema	teorema mai generală
„	1 „ „	teoremă	teoremă, însă fără lucrul lntern (vezi nota pag. 471—3)
308	10 de sus	$\bar{v}\,\delta s = \delta\Phi$	$\bar{v}\,\bar{\delta s} = \delta\Phi$
„	15 „ „	distanţa $d\bar{n}$	distanţa dn
313	9 „ „	viscosităţei.	viscozităţei).
314	8 „ „	variaţa	variaţia.
316	7 „ „	v_{y_0} v_{z_0}	$v_{y_0} = v_{z_0}$
320	4 „ „	$\frac{\partial\Phi}{\partial u}$	$\frac{\partial\Phi}{\partial n}$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Pag.	Rândul	In loc de:	A se citi:
334	10 de sus	*sectunea*	*secţiunea*
336	7 de jos	upă (c)	după (c)
345	9 de sus	cu arecare	cu oarecare
346	3 de jos	comprimtă	comprimată
347	10 de sus	se rentoarce	se reîntoarce
348	4 „ „	duresză	durează
349	6 „ „	constant Ω, devine la rândul ei factorului	factorului constant Ω, devine la rândul ei
350	9 „ „	din (36)	din (30)
„	11 „ „	Ācestă	Această
„	11 „ „	un sistem de	un sistem
352	8 de jos	adică γp	adică γp,
„	1 „ „	caracteri e	caracteristice
356	formula (36)	$\frac{dv^2}{2}+$	$\frac{1}{2}\frac{dv^2}{ds}+$
„	8 de sus	*permanfă*	*permanenfă*
358	17 „ „	ecuaţia fizică	*ecuaţia fizică*
359	9 „ „	fluidă	*fluidă,*
366	formula (38)	$-m\int_{\rho_0}^{\rho_1} pd\left(\frac{1}{2\rho}\right)$	$-m\int_{\rho_0}^{\rho_1} pd\left(\frac{1}{\rho}\right)$
367	10 de jos	trenşelor	tranşelor
408	10 de sus	$+\sqrt{h}\ log$	$+\sqrt{k}\ log$
437	13 de jos	$\equiv F(t_{n-1})\equiv F_{n-1}$	$\equiv F(t_{n-1})\equiv -F_{n-1}$
438	2 „ „	$Z_2+Z_3\ Y\equiv_2+\ldots$	$Z_2+Z_3\equiv Y_2+\ldots$
447	3 „ „	(18)	(15.2)
460	3 de sus	ormalei	normalei
„	formula (10)	$(p_{nx}\ n_x+$	$(p_{xx}\ n_x+$
461	„ (11)	$p_{yx}d\sigma_y dy=$	$p_{yx}d\sigma_y dy-$
462	„ (13.1)	$\frac{\partial p_x}{\partial y}$	$\frac{\partial p_y}{\partial y}$
463	4 de sus	(14.1)	(14.2)
„	4 de jos	(15.5)	(15.1)
469	6 „ „	$+p'_x$	$+p'_{xx}$
„	5 „ „	$+p'_y$	$+p'_{yy}$
„	4 „ „	$+p'_z$	$+p'_{zz}$
471	14 de sus	v_z	v_x
474	7 „ „	indentică	identică

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Pag.	Rândul	In loc de :	A se citi :
477	6 de jos	$\frac{\partial v_z}{\partial y}$	$\frac{\partial v_x}{dy}$
481	15 „ „	ce	(ce
483	14 de sus	provenit	provenite
484	4 de jos	al acestui	a acestui
494	2 „ „	(ca sensul	(cu sensul
496	13 de sus	timp	r
„	7 de jos	$=0\ \frac{\partial\Phi}{rd\theta}=$	$=0\quad \frac{d\Phi}{rd\theta}=$
528	4 „ „	$\frac{v^2_2-u^2_2}{2g}$	$\frac{u^2_2-u^2_1}{g}$ căci $\overline{u_2}\,\overline{w_2}=0$ şi $\overline{u_1}\,\overline{w_1}=0$.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

HIDRODINAMICA

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

CAP. I

FLUIDE PERFECTE ŞI FLUIDE NATURALE.

1. Definiţii şi generalităţi.

Hidrodinamica se ocupă cu studiul mişcării fluidelor, fie în masă indefinită, în curenţi sau vine libere, fie prin conducte, canale, râuri sau diverse instalaţii technice, precum şi cu problema inversă, aceea a mişcării unui corp într'un fluid indefinit sau într'un curent. Ea cercetează atât partea cinematică cât şi cea dinamică a problemei, determinând repartiţia sau câmpul vitezelor şi al presiunilor, precum şi energia sau puterea care intră în joc sau care se pierde prin rezistenţe pasive — transformându-se de fapt în alte forme de energie degradată.

Deosebim *mişcări de scurgere*, constând din deplasări de molecule, sau curenţi cu o direcţie generală definită, şi *mişcări de agitaţie*, precum sunt: oscilaţiile şi valurile, în cari deplasările sunt limitate şi deseori periodice.

Mişcările din prima categorie pot fi *permanente* (staţionare), adică cu *vitesa* în orice punct invariabilă, *semipermanente*, adică numai cu *direcţia vitesei* în orice punct invariabilă, sau mişcări *variabile*. Mişcările din a doua categorie sunt în general *variabile*.

Este de notat că nu există deosebiri fundamentale între mişcările lichidelor şi acelea ale gazelor. Cu toate că metodele experimentale diferă în general pentru apă şi aer, analogia perfectă care există în legile lor de mişcare este folosită, pentru ca ambele fluide să fie tratate în comun, cel puţin în ceea ce priveşte partea generală. Dacă considerăm schimbări de volum de 1% ca negli-

jabile, un curent de aer poate fi tratat ca având densitatea ρ constantă la produceri de vitese de până la 50 *m/sec* şi întinderi în înălţime până la 100 *m*. Dacă neglijăm schimbări de volum de 10%, se poate merge cu admiterea constanţei lui ρ până la vitese de 150 *m/sec* şi întinderi în înălţime de 1000 *m*. Pentru vitese ce se apropie de aceea a sunetului (340 *m/sec*), schimbările de volum ale *aerului* sunt considerabile şi influenţează forma curenţilor. In cazul când vitesa sunetului este întrecută, caracterul curentului gazos diferă complet de cel lichid.

2. Regimuri de scurgere.

Precum s'a spus în Partea Introd. a cursului, fluidele naturale au *viscozitate*, caracterizată prin aşa numitul coeficient de viscozitate μ, sau prin coeficientul de viscozitate cinematic $\frac{\mu}{\rho} = \nu$. (Germanii numesc viscozitatea: „*innere Reibung*“, adică frecare internă, care diferă însă de frecarea solidelor, precum s'a arătat în Vol. I. pag. 13).

Viscozitatea dă loc la două feluri de regimuri: regimul *laminar* şi regimul *turbulent*, pe care le vom constata şi defini în două exemple de mişcare, din cele mai simple.

3. Regim laminar sau liniştit.

Să considerăm, ca prim exemplu, două plăci paralele indefinite, situate la distanţa a una de alta, între cari se găseşte un fluid.

Placa inferioară rămânând fixă, cea superioară se mişcă cu vitesa V în planul ei, paralel cu direcţia Ox. Dacă, fiind dată distanţa a şi proprietăţile fizice ale fluidului, reprezentate prin densitatea ρ şi coeficientul de viscozitate μ (sau prin $\nu = \frac{\mu}{\rho}$), vitesa V este *suficient de mică*, se va stabili cu timpul o mişcare permanentă regulată în straturi paralele, care aparţine regimului *laminar*. Datorită viscozităţii, straturile în contact cu cele două plăci aderă la acestea, având respectiv, vitesele 0 şi V iar în spaţiul dintre plăci vom avea o repartiţie

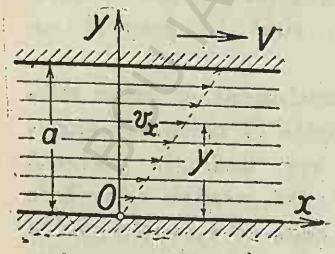


Fig. 1.

liniară a vitesei (Fig. 1):

$$v_x = V \frac{y}{a},$$

unde y este cota stratului considerat, faţă de placa fixă, straturile suprapuse alunecând unele faţă de altele.

Viscozitatea se manifestă prin o forţă, care opune plăcii superioare o *rezistenţă* şi care, raportată la unitatea de suprafaţă (τ_0), este proporţională cu $\frac{V}{a}$.

Mişcarea fiind *uniformă*, aceeaşi rezistenţă se produce, evident, şi între straturile suprapuse, sub forma unui efort tangenţial, a cărui expresie analitică ia în acest exemplu forma particulară, sub care se enunţă legea lui *Newton* (prima egalitate):

$$\tau = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y} = \tau_0, \qquad (1)$$

constanta de proporţionalitate μ fiind prin definiţie *coeficientul de viscozitate* al fluidului. A doua egalitate explică repartiţia liniară a lui v_x.

Prima relaţie (1) este de altfel valabilă şi în mişcare variabilă, în care caz însă linia de repartiţie a lui v_x nu este dreaptă ca în figură, τ nefiind constant pe o perpendiculară dusă pe plăci.

Un asemenea efort τ, după cum s'a expus în Partea Introductivă Vol. 1, se desvoltă în orice faţetă (concomitent şi cu un efort normal), expresiile analitice ale eforturilor tangenţiale fiind, în cazul unui triedru de referinţă oarecare, compuse din doi termeni în loc de unul ca în exemplul de mai sus (Vol. 1 pag. 11—12).

Să considerăm, ca al doilea exemplu, o conductă de secţiune circulară de diametru d. Dacă, fiind date d şi proprietăţile fizice ale fluidului, exprimate prin ρ şi μ (sau $\nu = \frac{\mu}{\rho}$), vitesa medie în secţiune u este *suficient de mică*, scurgerea provoacă, datorită viscozităţii, o scădere a presiunii p de fiecare unitate de lungime, care este proporţională cu debitul scurs, traectoriile moleculelor fiind rectilinii, iar mişcarea făcându-se în straturi cilindrice ce alunecă unele într'altele, adică deasemenea în formă *laminară*.

Regimul laminar, căruia aparţin mişcările din cele două exemple descrise, se mai numeşte şi *liniştit*, cu aluzie la mentinerea vitesei caracteristice considerate V, respectiv u, sub o anu-

mită limită V_c sau u_c, care depinde de a, ρ și μ (sau de a și ν), recpectiv de d, ρ și μ (sau de d și ν) date, regimul încetând de a mai exista la atingerea sau întrecerea acelei limite, numită *viteză* (caracteristică) *critică*, corespunzătoare acestor date.

4. Regim turbulent.

Dacă acum, de ex. în cazul conductei și fluidului date, u_c este întrecut, sau, pentru u și ν date, diametrul întrece o anumită limită d_c, funcție de u și de ν, sau, în fine, diametrul d și viteza u fiind date, coeficientul ν este mai mic decât o anumită limită ν_c, funcțiune de d și de u, aspectul mișcării se schimbă, luând naștere vârtejuri vizibile, care pornesc dela pereți și provoacă pătrunderea firelor între ele; totodată legea mecanică se schimbă, scăderea de presiune de fiecare unitate de lungime a conductei în direcția mișcării devenind proporțională cu *pătratul debitului*, deci o scădere mult mai accentuată ca în regimul laminar.

Regimul acesta de scurgere, care se constată și în exemplul cu plăcile în împrejurări analoage, se numește *turbulent*. *Turbulența* se poate atribui faptului că, în tuburile de diametru *relativ mare* (pentru u și ν date) sau cu vitese *relativ mari* (pentru d și ν date) sau în fine în prezența unei viscozități *relativ mici* (pentru d și u date), eventualele perturbațiuni ce se produc (pornind dela pereți) găsesc la dispoziție drumuri *suficient de lungi* (diametru mare), sau dispun de o intensitate *suficient de mare* (viteză mare), sau întâmpină rezistențe *suficient de mici* (viscozitate mică) pentru a favoriza instabilitatea câmpului de viteză, cu răspândirea lor neregulat în întreaga masă, ceea ce produce un amestec al acesteia. Odată admisă producerea mișcărilor de amestec, efectul acestora se explică ușor.

Prin aceste mișcări se comunică *impulsiuni* (cantități de mișcare) de către masele cu vitese mai mari asupra maselor cu vitese mai mici, ceea ce aduce o uniformizare a vitezelor. Acest amestec de impulsiuni lucrează analog ca viscozitatea în cazul regimului laminar, însă într'o măsură mai mare, mai ales înspre interior, adică cât mai departe de perete. Lângă perete mișcările transversale, care sunt cauza amestecului, fiind oprite, dife-

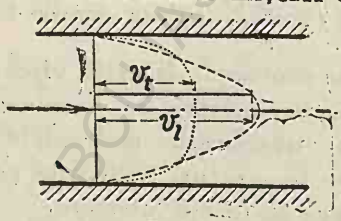


Fig. 2

Repartiția vitesei într'un tub de secțiune circulară în regim laminar (v_l) și în regim turbulent (v_t).

rențele de vitesă rămân natural mai mari, ceea ce la mișcarea turbulentă se observă mai pronunțat. Fig. 2 arată, în cazul scurgerii printr'o conductă de secțiune circulară, deosebirea ce există în reparțiția viteselor, între mișcarea turbulentă și cea laminară (liniștită).

Legea de repartiție, formulată în mișcarea liniștită prin relația de mai sus, se poate aplica aproximativ și la mișcarea turbulentă, însă factorul, care trebue să înlocuiască atunci pe μ în formulă, diferă mult de acesta; el s'ar putea numi *coeficient de amestec* sau *de schimb* („*Austausch*" după *W. Schmidt* și *Prandtl*). Dacă însemnăm acest coeficient cu A, *efortul tangențial aparent* în exemplul dat mai sus ia forma

$$\tau = A\frac{\partial v_x}{\partial y}, \qquad (2)$$

unde A n'ar mai fi constant ca μ, ci ar avea o valoare mare la mijloc și ar tinde către zero la pereți, unde în schimb gradientul $\frac{\partial v_x}{\partial y}$ crește foarte mult.

Se mai poate nota că, la scurgerea turbulentă se preschimbă sau se amestecă nu numai implusiunile (cantitățile de mișcare) dar și căldura, compoziția chimică, conținutul în praf și alte substanțe. Relațiunile pentru curentul de căldură, pentru transportul unui amestec chimic sau mecanic etc., corespund în totul formulei (2)

5. Observațiuni relative la prezența viscozității și la diferența între cele două regimuri.

In cazurile în care efectele viscozității sunt neglijabile sau nu intervin deloc în calcul, studiul problemei devine mult mai ușor, putându-se face abstracție de existența viscozității, cu ipoteza, în orice caz, a continuității câmpului vitesei.

In această categorie intră, pe de o parte, studiul scurgerii prin *orificii* și *deversoare*, unde vicozitetea nu este excitată decât puțin lângă pereți, apoi studiul undelor, al loviturilor de berbec în conducte, etc., la cari pierderea de energie mecanică prin lucru intern al viscozității este neglijabilă; pe de altă parte, intră în aceeași categorie mișcarea *potențială a lichidelor*, la cari, dacă există eforturi de viscozitate, ele se echilibrează asupra fiecărei molecule, precum și calculul *impingerii* sau *impulsiunii* vinelor fluide asupra

3unor pereţi fixi sau mobili, în care calcul viscozitatea, ori cât de mare ar fi, se elimină, eforturile interne anulându-se reciproc două câte două, ca acţiune şi reacţiune.

In schimb sunt probleme la cari este nevoe a se ţine seamă de efectele viscozităţii, precum: *scurgerea prin conducte, canale, râuri, remuul, rezistenţa* opusă de fluid la mişcarea unui corp solid împlântat sau plutind pe un lichid etc, întrucât aceste probleme sunt dominate de aşa numitele *pierderi de energie,* datorite tocmai eforturilor interne de viscozitate, şi care apar în realitate sub forme degradate de energie (căldură, vârtejuri etc.).

La studiul tuturor acestor probleme trebue să deosebim *regimul turbulent,* cel mai des întâlnit în practică, de *regimul laminar sau liniştit,* numit şi regimul *Poiseuille* (după numele medicului care l-a studiat pentru prima oară în legătură cu circulaţia sângelui), regim în care energia se pierde în proporţie relativ mai mică decât în cel turbulent.

In *regimul laminar,* masa fluidă în mişcare poate fi considerată ca un ansamblu de fire regulate juxtapuse, cari, datorită continuităţii câmpului de vitesă, conservă poziţiile lor relative chiar atunci când îşi schimbă formele şi dimensiunile (curenţi nepermanenţi, nestaţionari sau variabili). Din cauza aceasta regimul laminar se numeşte şi *paralel* (cu fire paralele). Suprafeţele libere în regimul liniştit sunt netede, iar vâna are o aparenţă de rigiditate. Acest regim în cazul prezenţei de pereţi se stabileşte, după cum am arătat, la vitese şi depărtări între pereţi (deci şi secţiuni transversale) *relativ mici* şi la grade de viscozitate *relativ mari.*

Caracteristica mecanică a regimului, dată de formula (1), este că: *eforturile tangenţiale* τ *dintre fire, datorite viscozităţii, sunt proporţionale cu variaţia vitesei în sens transversal firelor.*

Cum deformaţiile *unghiulare* sau de alunecare provoacă eforturi τ, iar acestea nu se pot produce fără a se naşte simultan şi eforturi normale pe faţetele pe cari se exercită, avem şi eforturi normale de viscozitate ce se pot pune în legătură cu deformaţiile liniare, antrenate de cele unghiulare. Lângă pereţi vitesa este nulă.

Acest regim prezintă în aplicaţiile tehnice mai puţin interes, intervenind mai rar, de ex. la mişcarea apei subterane, la studiul mişcării lichidelor viscoase ca: uleiuri şi petroluri, la cari chiar pentru vitese mari, graţie valorii mari a lui ν, regimul stabilit în

conductele, în cari fluidul circulă, este comparabil cu acela stabilit în conductele de apă pentru vitese foarte mici (adică regimul laminar).

In Hidraulică, unde avem de a face mai ales cu apa, regimul cel mai des întâlnit este cel turbulent, numit uneori pentru acest motiv şi *regim hidraulic*, dar al cărui mecanism e mai complicat.

Dacă, la oricare din exemplele arătate mai sus, plecăm dela regimul laminar cu un fluid de o anumită densitate ρ şi viscozitate μ sau ν, trebue, după ceea ce precede, ca regimul turbulent să se stabilească prin sporirea treptată a vitezelor sau a secţiunilor sau a ambelor simultan, până la atingerea momentului, când vâna se turbură prin vârtejuri sau mişcări giratorii, ce se produc pornind dela pereţi şi cari pot deveni aparente, firele încetând de a mai fi paralele şi penetrându-se reciproc.

6. Delimitarea între cele două regimuri. Teoria similitudinii mecanice.

Dacă o explicaţie satisfăcătoare a necesităţii producerii *turbulenţei* nu se poate da în mod simplu (cauza ei fiind în orice caz frecarea cu peretele, într'un grad mai mult sau mai puţin accentuat), caracterizarea împrejurărilor, în care ea se produce, şi anume *relativitatea* dintre valorile celor trei cantităţi, d, u, şi $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ în momentul apariţiei fenomenului, este dată precis de legea similitudinii fizice (vezi şi Vol. Complementar).

Iată pe scurt această teorie, începând cu definiţia acestei similitudini, aplicată în domeniul mai restrâns al Mecanicei, care ne interesează aci.

Zicem că două (sau mai multe) ansambluri, fenomene naturale sau instalaţii technice, indicate cu indicele 1 şi 2, prezintă *similitudine mecanică* sau sunt *mecanicește asemnea*, dacă, luând trei mărimi fundamentale în locul celor obişnuite (lungime, timp şi masă), mărimi de asemenea independente între ele însă *intrinseci*, adică prezente în acele ansambluri, de ex. lungimea $[L]$ vitesa $[V] = [LT^{-1}]$ şi densitatea $[\rho] = [ML^{-3}]$, iar drept unităţi fundamentale trei parametri ai ansamblului aparţinând acelor mărimi, *măsurilor tuturor elementelor omologe din cele două ansambluri* (măsuri pe cari le vom numi *specifice*) *sunt egale*.

Este evident că, în cazul când parametrii ansamblurilor sunt numai trei, aparţinând respectiv acestor mărimi, fie ele l_1, v_1, ρ_1

în primul ansamblu, l_2, v_2, ρ_2 în al doilea ansamblu, similitudinea există totdeauna. Într'adevăr, pentru orice element omolog e_1, e_2 din cele două ansambluri vom putea scrie:

$$e_1 = f(l_1, v_1, \rho_1)$$
$$e_2 = f(l_2, v_2, \rho_2) \qquad (3)$$

iar în mărimi specifice

$$e_{1s} = f(1, 1, 1,)$$
$$e_{2s} = f(1, 1, 1,) \qquad (4)$$

şi deci

$$e_{1s} = e_{2s}.$$

Dacă celor două ansambluri le lipseşte o mărime fundamentală de ex. masa şi prin urmare densitatea (este cazul fenomenelor cinematice), iar numărul parametrilor fundamentali este numai 2, similitudinea va fi deasemenea asigurată, demonstraţia fiind aceeaşi.

In fine, dacă ansamblurile comportă numai o singură mărime fundamentală, de ex. lungimea (este cazul figurilor geometrice), iar numărul parametrilor (aparţinând evident acelei mărimi) se reduce la 1, similitudinea există totdeauna. Ca exemplu avem cercurile, sferele, poligoanele şi poliedrele regulate de acelaşi număr de laturi sau feţe, şi în general două obiecte, de ex. două coloane ornamentale, ale căror elemente se pot exprima prin aceiaşi coeficienţi sau măsuri în raport cu una din ele de ex. diametrul l al coloanei, sub forma Al_1, Al'_1, Al''_1, ... în primul ansamblu, Al_2, Al'_2, Al''_2, ... în al doilea ansamblu. Coeficienţii A, A', A'' .... sunt atunci chiar măsurile specifice ale elementelor respective, când l se ia drept unitate.

Rezultă că similitudine există totdeauna, dacă numărul parametrilor nu depăşeşte numărul mărimilor fundamentale prezente în ansamblu (mai mic nu poate fi evident, fiindcă orice mărime, ca să fie prezentă, trebue să aibă cel puţin un reprezentant).

Fenomenele hidrodinamice comportă în general 3 mărimi fundamentale (dacă nu intervine şi temperatura, în care caz ar fi 4) şi în cazul a numai 3 parametri li se aplică relaţiile (3) şi (4) sau de o formă analoagă.

Dacă însă, în loc de 3 parametri avem mai mulţi, de ex. un al patrulea, aparţinând, vom presupune la început, uneia din

mărimile fundamentale, bunăoară un parametru geometric l', în locul relațiilor (1) vom avea:

$$e_1 = f(l'_1, l_1, v_1, \rho_1)$$
$$e_2 = f(l'_2, l_2, v_2, \rho_2),$$

iar în mărimi specifice

$$e_{1s} = f(l'_{1s}, 1, 1, 1) \qquad (3\cdot1)$$
$$e_{2s} = f(l'_{2s}, 1, 1, 1)$$

de unde se vede că egalitatea $e_{1s} = e_{2s}$ implică egalitatea măsurilor specifice ale parametrului supranumerar:

$$l'_{1s} = l'_{2s}. \qquad (4\cdot1)$$

Această condiție fiind pentru similitudine necesară și suficientă relativ la toți parametrii geometrici distincți, se vede că similitudinea mecanică implică în primul rând similitudinea geometrică. Raționamentul se poate repeta și în cazul când parametrul supranumerar (peste cei trei l, v, ρ) ar aparține unei mărimi derivate, cum ar fi de ex. coeficientul de viscozitate μ.

In prezența unui asemenea parametru vom avea:

$$e_1 = f(l_1, v_1, \rho_1, \mu_1) \qquad (3\cdot2)$$
$$e_2 = f(l_2, v_1, \rho_2, \mu_2),$$

iar egalitatea măsurilor specifice a două elemente omoloage oarecari ar implica de asemenea condiția:

$$\mu_{1s} = \mu_{2s}. \qquad (4\cdot2)$$

In concluzie, pentru a avea similitudine cu privire la toate elementele, este necesar și suficient ca relația (4.1) sau (4.2) să existe pentru parametrii supranumerari, adică măsurile specifice ale acestora în cele două (sau mai multe) ansambluri să fie egale.

Am văzut că mărimile specifice A, A', A'', ... ale lungimilor omoloage sunt de fapt câturile de împărțire ale măsurilor dintr'un sistem de unități arbitrare, prin măsura în același sistem al lungimii parametrului l.

Pentru a găsi măsurile specifice unei alte mărimi, de ex. μ, derivată din mărimile fundamentale alese $[L]$, $[V]$ și $[\rho]$, cărora aparțin parametrii l, ν, ρ, n'avem decât să scriem, după modelul ecuației de dimensii respective (toate literele având aci semnificarea de dimensii):

$$[\mu] = [L^\alpha V^\beta \rho^\gamma],$$

expresia monomă în funcţie de parametrii fundamentali:

$$\mu = A l^{\alpha} v^{\beta} \rho^{\gamma},$$

unde A este evident un număr pur, şi anume deasemenea măsura specifică μ_s căutată a lui μ. Intradevăr, dacă trecem la măsurile specifice, făcând $l=1$, $v=1$, $\rho=1$, găsim:

$$\mu_s = A = \frac{\mu}{l^{\alpha} v^{\beta} \rho^{\gamma}}.$$

In cazul de faţă se poate uşor verifica, că avem $\alpha=1$, $\beta=1$, $\gamma=1$, astfel că egalitatea în cele două sisteme a lui

$$\mu_s = A = \frac{\mu}{lv\rho} = \frac{\nu}{lv} = \nu_s$$

este condiţia necesară şi suficientă pentru similitudine, cerută de prezenţa parametrului supranumerar μ (sau ν). In lipsa oricărui alt parametru supranumerar această condiţie este unica ce se cere. Ori ce alt nou parametru cere în plus o condiţie analoagă.

Dacă presupunem acum că două (sau mai multe) ansambluri evoluează paralel (prin variaţia oricum a celor 4 parametri, presupuşi singuri: l, v, ρ şi μ, practic prin variaţia lui l şi v, fiindcă ρ_1 şi μ_1, ρ_2 şi μ_2 sunt date), astfel ca să se păstreze similitudinea mecanică (sub $\mu_s = \nu_s$ mereu egale), este evident că trecerea dela regimul liniştit la cel turbulent sau viceversa, când avem o schimbare bruscă în câmpurile de vitesă şi de presiune, se va produce la cele două ansambluri sub acelaşi $\mu_s = \nu_s$, care va caracteriza această trecere şi pe care îl vom numi *critic*, însemnându-l cu $\mu_{sc} = \nu_{sc}$.

7. Numărul lui Reynolds.

Această lege a fost de fapt descoperită la 1877 de *Osborn Reynolds*, pe o cale mai particulară. El a arătat că, pentru stabilirea unuia sau celuilalt din regimuri, sunt determinante, pe de o parte mărimea secţiunilor, reprezentată de o dimensie liniară caracteristică (lungime, lăţime, distanţă a, diametru d sau alta) şi mărimea viteselor, reprezentată de una din ele sau de valoarea lor medie, iar pe de altă parte densitatea ρ şi viscozitatea μ a fluidului sau, global, coeficientul de viscozitate cinematic $\nu = \frac{\mu}{\rho}$.

Oricare ar fi fluidul caracterizat prin coeficientul său ν, dacă el se scurge de ex. prin o conductă de diametru d, care aci ia locul

lui l, cu o vitesă medie u, *Reynolds* a stabilit o valoare particulară a numărului $\mathcal{R}$:

$$\mathcal{R} = \frac{du}{\nu} = \frac{du\rho}{\mu},$$

sub care (limită) se menţine stabil regimul liniştit sau laminar, şi la depăşirea căreia (sporind pe d sau u, sau cu menţinerea acestora întrebuinţând fluide cu ν descrescând) se trece brusc la regimul turbulent.

Numărul general $\mathcal{R}$ numit numărul lui *Reynolds* are, aşa dar, o valoare particulară critică $\mathcal{R}_c$, care caracterizează separaţia dintre cele două regimuri, şi care nu este altceva decât inversul lui $\mu_{sc} = \nu_{sc}$, adică $\mathcal{R}_c = \frac{1}{\mu_{sc}} = \frac{1}{\nu_{sc}}$. Se vede acum clar, că descoperirea lui *Reynolds* relativ la viscozitate se încadrează într'o teorie mai generală, aceea a *egalităţii măsurilor specifice ale parametrilor supranumerari, în caz când există similitudine sau voim s'o realizăm.*

Este evident că $\mathcal{R}_c$ ca şi μ_{sc} sau ν_{sc} sintetizează cele trei legi enunţate la exemplele luate mai sus, definind, de ex. în cazul conductei, valoarea particulară critică a oricăruia din cele trei elemente, atunci când valorile celorlalte două sunt date:

$$d_c = R_c \frac{\nu}{u}$$

$$u_c = R_c \frac{\nu}{d} \qquad (5)$$

$$\nu_c = \frac{du}{R_c}.$$

Teoria similitudinii expusă explică şi o serie de alte fapte, de ex. neprecisia lui $\mathcal{R}_c$ în caz când nu există o similitudine geometrică riguroasă, care trebue să cuprindă şi forma gurii de intrare în tub, precum şi orice alt detaliu constructiv cât de mic, mergând chiar până la asperităţile pereţilor. Pentru alte configuraţii ale instalaţiei, de ex. pentru diferite grade de asperitate, vom avea evident pentru $\mathcal{R}_c$ valori diferite. Acelaşi lucru, însă numai din punct de vedere formal, se întâmplă, dacă pentru aceeaşi configuraţie în locul lui d, în cazul tubului, se alege, pentru a se introduce în expresia lui $\mathcal{R}$, un alt parametru caracteristic al figurii, de ex. raza r, în care caz $\mathcal{R}_c$ va avea o valoare pe jumătate. Sprea a evita confuzia se pune uneori indice: $\mathcal{R}_d$ or $\mathcal{R}_r$ în loc de $\mathcal{R}$.

In fine, cum schimbarea temperaturii modifică valoarea lui u şi a lui ρ, deci şi a lui ν, rezultă că $\mathcal{R}_c = \left(\frac{du}{\nu}\right)_c$ sau invers sul său $\frac{1}{\mathcal{R}_c} = \nu_{sc}$ va fi funcţie de temperatură. Mai trebue menţionat că, pentru transformarea inversă, adică trecerea din regimul turbulent la cel laminar, găsim în practică o valoare $\mathcal{R}_c$ puţin diferită de aceea la trecerea din regimul laminar la cel turbulent. Cu alte cuvinte trecerea dela un regim la altul, restul condiţiilor fiind aceleaşi, se face la vitese puţin diferite, după sensul trecerii.

In toate cazurile $\mathcal{R}_c$, în loc de a fi un punct precis, variază pentru motive greu de precizat, într'un interval de altfel destul de restrâns. Astfel, dacă se evită trepidaţiile, se poate menţine regimul laminar cu mult peste limita obişnuită, aceasta nefiind deci perfect definită, după cum au arătat experienţele lui *Couette*.

Trecerea din regimul laminar, în care pierderile de energie prin viscozitate sunt mai mici, la cel turbulent, unde câmpul de vitesă este altul şi pierderile de energie mai mari, se face, după cum am menţionat, în mod brusc, iar întârzierea cu care se produce transformarea inversă (un fel de *histeresis*) se explică prin faptul că, la punctul critic energia sistemului nu este aceeaşi în cele două regimuri.

8. Mişcare medie în regim turbulent.

Complicaţia mişcării în regim turbulent, în care, chiar la o scurgere în aparenţă permanentă, vitesa in orice punct oscilează de fapt încontinuu între oarecari limite, face imposibilă aplicarea analizei matematice. Acecte dificultăţi se evită în parte prin legea *mişcării medii*, descoperită de *Bazin*.

După această lege, presiunile şi vitesele dintr'un punct, deşi variază mereu ca mărime şi direcţie, nu se depărtează niciodată mult de valoriile lor medii, în jurul cărora oscilează repede.

Dela un punct la altul al spaţiului, aceste valori medii variază încet, fiind distribuite cu continuitate în masa fluidului. In modul acesta se defineşte un regim fictiv, acela al *mişcării medii*, care din punct de vedere cinematic se aseamănă cu mişcarea *laminară*. Se zice atunci că o mişcare turbulentă este *permanentă*, în cazul *când mişcarea medie corespunzătoare este permanentă*.

In formulele uzuale ale Hidraulicei nu figurează *vitesele și presianile instantanee* dintr'un punct, ci valorile lor medii.

Intr'o secțiune transversală de curent, vitesa medie locală din regimul turbulent variază în general dela un punct la altul, ca în fig. 2, care arată repartiția vitesei în secțiune.

Vitesa momentană într'un punct poate varia nu numai ca mărime dar și ca direcție, din cauza frecării moleculelor cu pereții și între ele, datorită viscozității. In fine se produce, după cum am arătat, o micșorare generală a vitezelor în vecinătatea pereților și schimb de molecule și de cantități de mișcare între fire crescând cu depărtarea de ei.

9. Debit.

Se numește *debit de volum* Q al unui curent, volumul de fluid scurs în unitatea de timp prin o secțiune transversală, în general plană, a curentului. El se mai numește și *fluxul vitesei*, denumire extinsă și la orice vector, altul decât vitesa, în care scop îl presupunem reprezentând o vitesă. Dacă v este vitesa medie locală în centrul unui element $d\Omega$ al secțiunei și v_n componenta ei normală, vom avea prin întreaga secțiune

$$Q = \int_{\Omega} v_n \, d\Omega = \int_{\Omega} (\overline{v}\,\overline{n})\, d\Omega = \int_{\Omega} \overline{v}\, \overline{d\Omega},$$

unde $\overline{n}$ este vectorul unitar al normalei iar $d\Omega = \overline{n}\, d\Omega$.

In general vitesele dintr'o secțiune transversală de curent sunt sau se pot considera aproximativ paralele între ele, definind o direcție generală a scurgerii, iar secțiunea se obișnuiește a a se lua normal pe această direcție, în care caz putem scrie:

$$Q = \int_{\Omega} v \, d\Omega \, .$$

Se numește *vitesă medie în secțiune* vectorul $\overline{u}$, normal pe secțiune, a cărui valoare scalară este raportul

$$u = \frac{Q}{\Omega},$$

astfel că, dacă s'ar înlocui prin $\overline{u}$ toate vitesele individuale (medii locale), s'ar găsi pentru debit aceeași valoare.

La o *mișcare permanentă* vitesele mișcării medii în diferitele puncte, considerate ca centre ale elementelor unei secțiuni trans-

versale, rămânând, chiar prin definiţia mişcării permanente, constante cu timpul ca mărime şi direcţie, atât debitul:

$$Q=\int_{\Omega} v_n \, d\Omega = \int_{\Omega} \bar{v} \, d\bar{\Omega},$$

cât şi viteza medie u din secţiune, vor rămâne constante în timp. *Debitul de masă* şi *debitul de greutate* se definesc prin relaţiile:

$$M=\int_{\Omega} \rho v_n \, d\Omega = \int_{\Omega} \rho \bar{v} \, d\bar{\Omega} \quad \text{şi} \quad G=\int_{\Omega} \varpi v_n \, d\Omega = \int_{\Omega} \varpi \bar{v} \, d\bar{\Omega}:$$

ele se mai pot numi, respectiv, *fluxul* prin secţiune al vectorului $\rho\bar{v}$, respectiv fluxul vectorului $\varpi\bar{v}$.

* * *

Vom începe cu studiul mişcărilor fără viscozitate, tratându-le însă din punct de vedere cinematic în comun cu ale celor naturale în regim laminar, deoarece în această privinţă nu există deosebire. Metodele se aplică aproximativ şi în regim turbulent, cu condiţia de a înlocui vitesele reale prin cele medii locale.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

CAP. II.

CINEMATICA FLUIDELOR PERFECTE ȘI A CELOR NATURALE IN REGIM LAMINAR.

1. Linii de curent, traectorii, linii de fir sau fire.

In cele ce urmează vom presupune că vitesa este o funcție continuă de (x, y, z), adică a spațiului. La pag. 30 Vol. I am definit *linia de curent*, ce la un moment dat trece printr'un punct fix A, ca fiind învăluita de vitese, trecând prin A, a câmpului de vitesă din acel moment.

Ca notație, când va fi nevoie, vom pune coordonatele unui punct în paranteză, alături de notația punctului, iar componentele unui vector în cârlige, alături de notația vectorului.

Raza vectoare a unui punct $A(x, y, z)$, care își are origina în origina sistemului de referință iar extremitatea în A, o vom însemna cu $\bar{r}$, $d\bar{r} = d\bar{s}$ $[dx, dy, dz]$ fiind un element de linie, care își are origina în A și drept proecțiuni pe cele trei axe: dx, dy, dz.

Orice linie de curent are drept ecuații diferențiale:

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} \qquad (1)$$

sau, în limbajul vectorial:

$$d\bar{r} \parallel \bar{v} \text{ sau } [d\bar{r}\,\bar{v}] = 0.$$

Prima formă din aceste două din urmă exprimă paralelismul dintre $d\bar{r}$ și $\bar{v}$, a doua exprimă nulitatea produsului vectorial al vectorilor $d\bar{r} = d\bar{s}$ și $\bar{v}$, cari sunt deci coliniari, ceeace revine la același lucru.

Dacă avem în variabilele lui *Euler*:

$$v_x = \psi_1(x, y, z, t),$$
$$v_y = \psi_2(x, y, z, t)$$
$$v_z = \psi_3(x, y, z, t),$$

sau vectorial

$$\bar{v} = \psi(\bar{r}, t),$$

sistemul (1) devine

$$\frac{dx}{\psi_1(x,y,z,t)} = \frac{dy}{\psi_2(x,y,z,t)} = \frac{dz}{\psi_3(x,y,z,t)}, \qquad (1.1)$$

unde t va fi considerat *constant*, având valoarea momentului în care voim a considera configurația liniilor de curent.

Prin integrarea acestor două ecuații vom obține, cu 2 constante arbitrare sau 2 parametri a și b, linii formând o *congruență* (familie de linii cu 2 parametri):

$$\psi_1(x, y, z, t, a, b) = 0$$
$$\psi_2(x, y, z, t, a, b) = 0,$$

prin orice punct al spațiului trecând, în general, o asemenea linie.

Constantele a și b sunt determinate d. e. de condiția ca, în momentul t, să avem pentru x, y, z coordonatele punctului A. Dacă le lăsăm arbitrare, vom avea *congruența liniilor de curent* din momentul t.

Prin variația lui t obținem familiile acestor linii în diferitele momente t.

In cazul unei mișcări *semipermanente*, liniile de curent fiind invariabile, t trebuie să dispară din (1.1), ceeace implică ca funcțiunile ψ să conțină pe t numai într'un factor comun $f(t)$, care se elimină.

Traectoriile au drept ecuații diferențiale cu derivate substanțiale (x, y, z referindu-se la aceleași molecule ca în sistemul lui *Lagrange* și prin urmare fiind funcțiuni de timp):

$$\frac{dx}{dt} = \psi_1(x, y, z, t)$$
$$\frac{dy}{dt} = \psi_2(x, y, z, t) \qquad (2)$$
$$\frac{dz}{dt} = \psi_3(x, y, z, t),$$

BCU BIBLIOTECA CENTRALĂ UNIVERSITARĂ

coonducând prin integrare, când aceasta este posibilă, la funcțiunile (cu trei constante arbitrare):

$$\begin{aligned} x &= f_1(x_0, y_0, z_0, t) \\ y &= f_2(x_0, y_0, z_0, t) \\ z &= f_3(x_0, y_0, z_0, t). \end{aligned} \qquad (2.1)$$

Sistemul (2), în caz când nu se poate integra în termeni finiți, ne poate da prin metode grafice sau numerice pe x, y, z.

Cele 3 constante arbitrare pot fi coordonatele inițiale x_0, y_0, z_0 ale diverselor molecule în momentul $t=0$. Cum vom presupune că vitesele sunt funcțiuni continue, x, y, z vor fi și ele funcțiuni continue de x_0, y_0, z_0.

Rezultă că moleculele, care la un moment dat se găsesc pe o linie, o suprafață sau un volum continuu, vor constitui și ulterior o linie, o suprafață sau un volum continuu, ceeace implică că, în timpul mișcării, aceleași molecule vor rămâne în contact, afară, bineînțeles, de cazul unei discontinuități de vitesă, ca acele menționate în Vol. I, pag. 20.

Deformațiunile unui fluid în mișcare pot fi foarte complicate, astfel că, fără a se contrazice principiul continuității, moleculele inițiale, foarte aproape una de alta (fără a fi totuși în contact), se pot depărta și răspândi chiar în întreaga masă.

Trebuie ținut seama însă, că ipotezele de continuitate admise reprezintă o aproximație și că este vorba întotdeauna de o vitesă medie, chiar în mișcare laminară, dacă ținem seama de teoria cinetică, adică de agitația moleculară, care este factorul principal al difuziunii.

Dacă mișcarea este *permanentă*, t dispare din funcțiunile ψ și avem deasemenea o singură familie de linii de curent ca și în mișcarea semipermanentă. Se poate arăta că în ambele aceste cazuri liniile de curent coincid cu traectoriile.

Intradevăr, aceste din urmă linii, în cazul mai special al mișcării semipermanente, au ca ecuații diferențiale:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= g_1(x, y, z) f(t) \\ \frac{dy}{dt} &= g_2(x, y, z) f(t) \\ \frac{dz}{dt} &= g_3(x, y, z) f(t) \end{aligned} \qquad \text{sau} \qquad \begin{aligned} \frac{dx}{g_1(x, y, z)} &= f(t)\, dt \\ \frac{dy}{g_2(x, y, z)} &= f(t)\, dt \\ \frac{dz}{g_3(x, y, z)} &= f(t)\, dt, \end{aligned}$$

sistem echihivalent cu (1), în care înlocuim $\psi_1 = g_1(x, y, z), f(t)$ etc.

In afară de *liniile de curent și de traectorii* se mai poate considera și o a treia categorie de linii, utile din punct de vedere experimental, și care s'ar putea numi *linii de fir* sau, perscurtat, *fire*, subînțelegându-se axele acestora.

Șirul de molecule cari, în decursul timpului, se strecoară printr'un punct A de rază vectcare $\bar{r}$, formează un astfel de fir, evident deformabil cu timpul, dacă mișcarea nu este semipermanentă sau permanentă (în aceste cazuri firele nu se deformează și se confundă cu liniile de curent și cu traectoriile respective).

In variabilele *Lagrange* vom avea pentru aceste molecule, caracterizate prin coordonatele lor la origina timpului (x_0, y_0, z_0), și pentru orice moment t' dintre origina timpului și un anumit moment t:

$$\begin{aligned} x_A &= f_1(x_0, y_0, z_0, t') = const \\ y_A &= f_2(x_0, y_0, z_0, t') = const \\ z_A &= f_2(x_0, y_0, z_0, t') = const \end{aligned} \qquad (3)$$

sau vectorial

$$\bar{r}_A = f(\bar{r}_0, t') = const,$$

$\bar{r}_0$ fiind parametrul spațial (x_0, y_0, z_0), care caracterizează molecula ce trece prin A în momentul t'. Luându-se diferite momente t' între 0 și t, ecuațiile (3) determină moleculele $\bar{r}_0$, cari în acele momente trec succesiv prin A. Rezolvind în raport cu $\bar{r}_0$, avem:

$$\bar{r}_0 = g(\bar{r}_A, t'), \qquad (4)$$

Să căutăm acum care sunt coordonatele x, y, z sau $\bar{r}$ ale punctului ocupat de o moleculă $\bar{r}_0$ în momentul ales t (ultimul din ansamblul $0 \leq t' \leq t$) pe firul în chestiune, ce s'a strecurat prin A în intervalul $0 \rightarrow t$, fir care are existență în momentul t.

Vom avea:

$$\bar{r} = f(\bar{r}_0, t), \qquad (5)$$

unde $\bar{r}_0$ trebuie să satisfacă relația (4). In consecință

$$\bar{r} = f[g(\bar{r}_A, t'), t].$$

Dacă voim a construi prin puncte linia firului strecurat prin A, în starea în care acest fir se găsește în momentul t, vom da lui t' diferite valori între 0 și t; pentru aceste valori extreme

va trebui evident să avem, punctul cel mai mai înaintat al firului:

$$\bar{r} = f[g(\bar{r}_A, 0)t] \qquad (6)$$

cu prima moleculă după (4),

$$\bar{r}_0 = g(\bar{r}_A, 0)$$

şi coada lui cu ultima moleculă, adică pe A:

$$\bar{r}_A = f[g(\bar{r}_A, t), t]. \qquad (7)$$

Se vede că construcţia liniilor de fir este foarte anevoiasă, mai ales că ea reclamă întrebuinţarea variabilelor lui *Lagrange*.

Liniile de fir se utilizează uneori experimental pentru studiul unor fenomene de scurgere. Se întrebuinţează în acest scop o ţeavă (sau mai multe) aproape capilară, numită *sondă*, ce aduce în curent materie colorantă, într'un anumit punct A, colorând diversele molecule ale fluidului, ce se perindă prin acel punct. Liniile astfel colorate sunt evident linii de fir. Metoda se întrebuinţează şi la curenţii de aer; fumul unui coş în timp de vânt dă un aspect grosolan al unui fir, puţin exact dealtfel şi prin faptul că fluidul cald ce se scurge prin coş alterează condiţiile curentului de aer.

Cum în cazul mişcărilor *permanente* am văzut că moleculele se mişcă pe traectorii fixe, care coincid cu liniile de curent, rezultă că şi liniile de fir, care au origini fixe comune cu primele, vor coincide cu ele; întradevăr, moleculele ce trec prin aceste puncte nu vor părăsi liniile fixe în chestiune şi se vor înşira pe ele, constituind astfel linii de fir.

2. Dependinţa formei unui curent de starea de repaus sau de mişcare a sistemului de referinţă.

Un curent poate prezenta diferite forme observatorului, fix sau antrenat cu sistemul de referinţă.

In particular o mişcare nepermanentă poate lua forma unei mişcări permanente sau viceversa, la o alegere potrivită a sistemului de referinţă. Astfel, curentul în jurul unei pile de pod, văzut de un observator fix, sau curentul văzut de un observator antrenat pe prora unei aeronave, au aspect staţionar şi, fiind

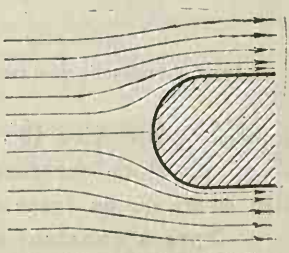


Fig. 3 Mişcare permanentă sau staţionară.

raportaţi, primul la axe fixe, cel de-al doilea la axe antrenate, reprezintă mişcări permanente. Configuraţia liniilor de curent, (aci şi traectorii şi linii de fir), are înfăţişarea din fig. 3.

Dacă însă privim curentul produs de înaintarea unei aeronave, dintr'un sistem de referinţă fix, cele trei categorii de linii se separă, după cum se vede în fig. 4. Aeronava în mersul ei dă de-o parte moleculele, astfel că cele aflate în faţa mijlocului ei sunt împinse înainte, pe când cele depărtate puţin de mijloc deviază totodată şi lateral. Spectrul liniilor de curent este solidar, adică antrenat de corpul în mişcare. Spre a construi grafic traectoria unei molecule în cazul al doilea (mişcarea unei aeronave privită dintr'un sistem fix), să considerăm în fig. 5 molecula înseamnată cu *0*, în contact la un moment dat cu corpul animat de o mişcare uniformă, care după un scurt interval se află deplasat în direcţia axei cu cantitatea *a*. In timpul acesta molecula cu vitesa ce revine punctului *0* s'a deplasat pe linia de curent respectivă în punctul *1*, găsindu-se faţă de corp, care între timp a avansat cu *a*, pe linia de curent *1'* solidară cu corpul, deci cu cantitatea *a* înapoi. Pe linia de curent *1'*, dusă paralel din *1*, molecula se mişcă cu vitesa respectivă în acelaşi scurt interval până în *2*, găsindu-se faţă de corp cu *2a* înapoi pe o altă linie de curent *2'*. In felul acesta elementele traectoriei, descrise cu vitese din ce în ce mai mici *), corespunzătoare punctelor de pe liniile de curent respective (*3'*, *4'*, *5'*) rezultă mereu mai mici, astfel că după un timp oarecare molecula intră practic în repaos. In cele din urmă se va trasa din *0* învăluita liniei frânte, astfel obţinută.

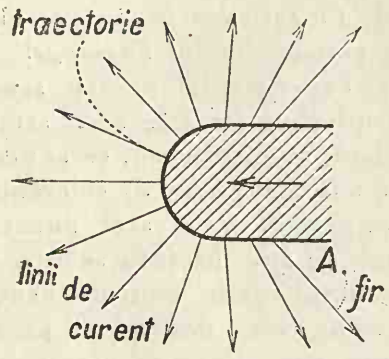


Fig. 4. Mişcare variabilă (nestaţionară).

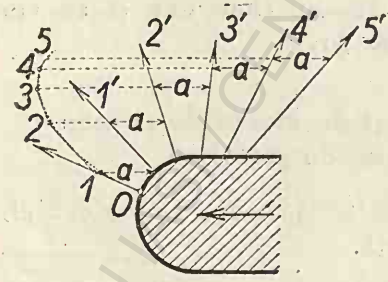


Fig. 5. Construcţia unei traectorii.

Spre a construi acum în aceleaşi ipoteze linia de fir (Fig. 6) din momentul *t*, ce trece prin *A*, trebuie să determinăm punctele terminale ale traectorilor în momentul *t* pentru toate moleculele

*) In figură trebuia *01* > *12*, punctul *1* fiind raportat mai sus pe linia *1'*.

(x_0, y^0, z_0), care în diversele momente anterioare $t' \leq t$ s'au strecurat prin punctul A cu raza vectoare $\bar{r}_A$. In momentul final $t' = t$ se strecoară evident molecula aflată atunci în A, coada firului (fig. 6), astfel că primul element $A—0$ al traectoriei contimporane se poate considera ca făcând parte din linia de fir.

Cu un singur interval de timp Δt înainte de t, corpul era în poziția însemnată punctat și întregul spectru de linii de curent se afla deplasat cu a spre dreapta, astfel că linia de curent $1'$ trecea prin A. Molecula de pe această linie, care în acel moment se strecura prin A, în același scurt interval de timp, adică până la t, s'a deplasat în direcția liniei de curent $1'$ până la 1. In momentul $t—2\Delta t$ o altă moleculă, aflată pe linia de curent $2'$, se strecura prin A, deplasându-se într'un Δt pe linia de curent $2'$ și de acolo într'un alt Δt, ce se termină la t, pe linia de curent $1'$ înapoi, până aproximativ în punctul 2 și a.m.d. Punctele finale ale traectoriilor, astfel construite, reprezintă moleculele, cari toate, între timp, s'au strecurat prin A, astfel că linia lor de unire dă firul căutat ce trece prin A.

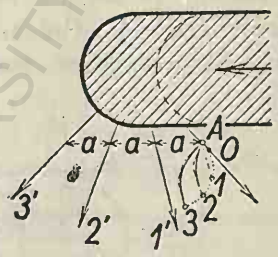


Fig. 6. Construcția unui fir. (Deplasarea corpului $= a$ în Δt).

3. Câmpul de vitesă în domeniul unui punct A.

Vom demonstra mai departe teorema importantă, stabilită de *Helmholz*, a descompunerii vitesei unei molecule B din domeniul (infinitezimal) al unui punct A, a cărui moleculă este luată ca *reper mobil*. Mișcarea elementară a particulei fluide cu centrul în A, care conține și molecula B, se poate anume descompune în o mișcare de ansamblu, compusă la rândul ei dintr'o translație și o rotație raportate la punctul A (adică translația moleculei din A și rotația în jurul unei axe instantanee ce trece prin A) și o mișcare de deformație, care constă într'o deplasare relativă a moleculelor constituente ale particulei față de molecula din A. Fiecare din aceste mișcări: *translație*, *rotație*, *deformație*, imprimă moleculei B câte o vitesă, iar rezultanta acestora constituie vitesa reală a moleculei B

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_r + \bar{v}_d .$$

Inainte de a demonstra această teoremă, vom da oarecari noțiuni preliminare asupra rotației și deformației unei particule fluide.

4. Rotaţionalul sau rotorul vitesei.

Deosebit de ceeace se întâmplă la un corp rigid, la o masă care se deformează în timpul mişcării nu putem concepe decât o *vitesă de rotaţie medie* în jurul unei axe. La particula fluidă această medie trebuie luată considerând toate moleculele particulei sau, cum într'o mişcare infinitezimală moleculele dintr'o faţetă plană rămân, datorită continuităţii postulate, tot într'o faţetă plană, media va putea fi luată pentru ansamblurile de molecule din planurile ce trec prin axa de rotaţie, şi cari se pot privi ca deplasându-se solidar în jurul acelei axe. Vom începe prin a stabili, în cazul general, expresia vitesei medii de rotaţie $\bar{\omega}$ a unei particule fluide, ce tot odată se deformează. Mişcările, la cari această vitesă medie este nulă, adică la cari orice particulă fluidă suferă numai translaţie şi deformaţie, fără a se roti simultan în medie, adică în ansamblul ei, le vom numi *nerotaţionale*.

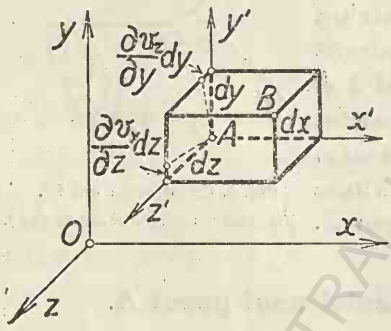


Fig. 7.

Să luăm la un moment dat t în fluid un paralelipiped elementar cu faţetele sale paralele cu planurile coordonate, $A\,(x, y, z)$ fiind vârful său, asemenea aşezat faţă de paralelipiped ca şi vârful O (origina) al triedrului de referinţă faţă de acesta. Deplasarea elementară efectuată de acest paralelipiped în timpul dt, luat ca unitate (întrebuinţăm această noţiune ca să nu fim nevoiţi a împărţi apoi peste tot cu dt), dacă-i neglijăm deformaţia privindu-l ca rigid, se poate descompune în o translaţie, ce poate fi aceea a vârfului A, şi o rotaţie elementară în jurul unei axe ce trece prin A.

In fig. 7 am luat un triedru de referinţă *drept* *), adică cu axele astfel orientate încât prin o rotaţie, care duce pe Ox spre Oy pe calea cea mai scurtă, un burghiu aşezat pe Oz să înainteze în sensul pozitiv al acestei axe. O asemenea rotaţie o vom reprezenta printr'un vector orientat după semiaxa pozitivă Oz. Se-

*) In cazul când s'ar lua un triedru *stâng*, ar trebui să se schimbe şi orientarea vectorilor reprezentativi ai rotaţiilor, spre a se păstra semnele în formule.

constată imediat că definiţia rămâne aceeaşi dacă ordonăm şi altfel axele, însă păstrând ordinea ciclică x, y, z.

Se ştie din Mecanica Raţională că, în cazul general, orice rotaţie elementară (deci şi vitesa unghiulară de rotaţie) reprezentată printr'un vector $\bar{\omega}$, aşezat pe axa ei şi orientat după aceeaşi convenţie ca mai sus, se poate descompune, ca orice vector, în trei rotaţiuni ω_x, ω_y, ω_z (uneori însemnate cu p, q, r), reprezentate prin componentele vectorului menţionat. Această descompunere înseamnă că un punct al sistemului rotit execută în proiecţie pe cele trei axe acelaşi drum ca suma proiecţiilor drumurilor efectuate de el separat, în virtutea rotaţiilor componente, definite mai sus.

Dacă, după efectuarea deplasării paralelipipedului, imaginăm că el este înapoiat cu vârful A în poziţia sa iniţială prin o translaţie inversă, va subsista evident numai rotaţia. In acest caz, pentru cercetarea componentei acestei rotaţii în direcţia x, observăm că în dt, luat ca unitate de timp, extremitatea laturei dy se va găsi deplasată în direcţia z cu $\frac{\partial v_z}{\partial y} dy$, ceeace corespunde unei rotaţii unghiulare a muchiei dy, pozitivă şi egală cu $\frac{\partial v_z}{dy}$, în jurul axei Ax' paralelă cu Ox. Tot astfel extremitatea laturei dz se va găsi deplasată în direcţia y cu $\frac{\partial v_y}{\partial z} dz$, ceeace corespunde unei rotaţii unghiulare în sensul pozitiv, egală cu $-\frac{\partial v_y}{dz}$, a muchiei dz în jurul axei Ax'. Dacă corpul ar fi rigid, aceste două rotaţiuni ar fi evident egale, cum însă paralelipipedul elementar în acelaşi interval de timp s'a deformat, cele două vitese de rotaţie menţionate, a două laturi perpendiculare între ele, nu vor fi în general egale, şi de aceea vom lua media lor drept componenta rotaţiei medii a paralelipipedului în jurul axei considerate. Se poate arăta întradevăr, cu ajutorul formulelor de schimbare a triedrului de referinţă $Ax'y'z'$ prin o rotire în jurul axei Ax', că expresia analitică $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)$ este invariantă, oricare ar fi orientarea axelor perpendiculare Ay' şi Az'.

Procedând la fel şi pentru celelalte două direcţii y şi z, componentele vitesei medii vor fi în consecinţă:

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{dy} - \frac{\partial v_y}{dz}\right)$$

$$\omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{dz} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) \qquad (8)$$

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right).$$

Dublul vectorului vitesei medii de rotație, adică $\bar{\Omega} = 2\bar{\omega}$, se numește *rotaționalul* (uneori *rotorul*) vitesei, în limba franceză „vecteur tourbillon", în cea germană „Rotation", iar în cea engleză „curl". In notație vectorială se scrie $\bar{\Omega} = rot\, \bar{v}$. Componentele lui: $\Omega_x = rot_x\, \bar{v}$ etc. se înseamnă deseori și cu

$$\xi = 2\omega_x \quad , \quad \eta = 2\omega_y \quad , \quad \zeta = 2\omega_z \, . \qquad (8.1)$$

Dacă toate componentele după cele trei axe ale lui $\bar{\omega}$ sau $\bar{\Omega}$ sunt nule, scurgerea particulelor se face în simplă translație (în general variabilă în mod continuu dela o particulă la alta) și fără rotire de ansamblu a fiecăreia din ele, privită izolat (mai precis cu o rotire medie nulă), dar în general cu o deformație a particulelor (deasemenea variabilă cu locul, în mod continuu). O asemenea mișcare nerotațională, în care

$$\frac{\partial v_z}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial z} \quad , \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial y} \, ,$$

ceeace exprimă că $v_x\, dx + v_y\, dy + v_z\, dz = \bar{v}\, d\bar{r}$ este diferențiala exactă a unei funcțiuni $\Phi(x, y, z)$, numită funcție de vitesă, se mai numește mișcare *potențială*, prin analogie cu câmpul de forță, care admite o funcție de forță, egală cu potențialul $U(x, y, z)$, luat cu semn schimbat.

5. Deformațiuni elementare.

Să luăm aceeași particulă paralelipipedică în cele două poziții considerate mai sus (vezi Partea Introductivă pag. 10—12). Deformația liniară, adică dilatația sau contracția *muchiei fluide* (adică compusă din molecule) dx în unitatea de timp, va fi dată evident de surplusul (sau minusul) vitesei extremității B a lui dx în direcția x față de vitesa v_x a originii sale A. Ea are expresia $\frac{\partial v_x}{\partial x}\, dx$, iar raportată la unitatea de lungime: $\frac{\partial v_x}{\partial x}$.

Expresiile:

$$\alpha_x = \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad , \quad \alpha_y = \frac{\partial v_y}{\partial y} \quad , \quad \alpha_z = \frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{9}$$

indică, pentru punctul A, *vitesele de deformaţie lineară proporţională*, în direcţiunile celor trei axe, reprezentând *dilataţii* când sunt pozitive şi *contracţii* când sunt negative.

Să comparăm mai departe noua poziţie şi stare a feţetei $dy\,dz$ faţă de cea iniţială, însă după ce, ca mai sus, particula a fost adusă prin o translaţie inversă, cu vârful A în prima lui poziţie.

In cazul când întâmplător deformaţia unghiului drept $y'Az'$ ar fi nulă (de ex. în cazul mişcării unui solid), cele două rotaţii $\frac{\partial v_z}{\partial y}$ şi $\frac{\partial v_y}{\partial z}$, suferite în unitatea de timp în jurul axei Ax', respectiv de muchiile ortogonale dy şi dz (luate ca în fig. 7), ar fi egale.

Eventuala micşorare algebrică a acestui unghiu prin deformaţie în unitatea de timp este egală cu diferenţa $\frac{\partial v_z}{\partial y} - \left(-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)$ a acestor două rotaţiuni (diferenţă care se anulează în caz când nu există deformaţie).

Expresiile:

$$2\beta_x = \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \quad ,$$

$$2\beta_y = \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \quad , \tag{10}$$

$$2\beta_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad ,$$

reprezintă prin urmare deformaţiunile (micşorările fiind pozitive iar creşterile negative) unghiulare în unitatea de timp sau *vitesele de deformaţie unghiulară*, relative la cele trei planuri ale triedrului $Ax'y'z'$ în punctul A.

In Partea Introductivă (Vol. 1 pag. 10—12) cu ocazia discuţiei eforturilor de viscozitate s'a stabilit că eforturile tangenţiale τ_x, τ_y, τ_z, exercitate respectiv în perechile de feţete ortogonale ale unghiurilor diedre cu muchii dx, dy, dz (ale căror vitese de deformaţie sunt măsurate tocmai de $2\beta_x$, $2\beta_y$, $2\beta_z$), şi anume în direcţii respectiv *perpendiculare* pe aceste muchii, sunt proporţionale cu vitesele de deformaţie unghiulară, expresiile lor fiind:

$$\tau_x = 2\mu\beta_x \quad , \quad \tau_y = 2\mu\beta_y \quad , \quad \tau_z = 2\mu\beta_z \tag{11}$$

(μ = coeficientul de viscozitate).

Deasemenea s'a arătat (fără a se demonstra în cazul general) că, în ipoteza că fluidul este incompresibil, eforturile normale σ_x, σ_y, σ_z, exercitate pe fețetele normale pe axele x, y, z, au ca expresii:

$$\sigma_x = 2\mu\alpha_x \quad , \quad \sigma_y = 2\mu\alpha_y \quad , \quad \sigma_z = 2\mu\alpha_z . \tag{11.1}$$

Intr'un cuvânt, la un fluid incompresibil se trece dela deformațiunile în unitatea de timp α și β la eforturile de viscozitate, prin înmulțirea primelor cu 2μ.

6. Descompunerea, după Helmholz, a mișcării unei particule fluide.

Vom admite că vitesa este o funcție regulată a spațiului în domeniul unui punct oarecare $A(x, y, z)$. Dacă în A vitesa este

$$\bar{v}_A = \bar{i}\, v_{Ax} + \bar{j}\, v_{Ay} + \bar{k}\, v_{Az},$$

unde $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ sunt vectorii unitari în direcțiile x, y, z, vitesa într'un punct vecin B va fi, cu aproximația infinit micilor de ordin superior:

$$\begin{aligned} v_x &= v_{Ax} + \frac{\partial v_x}{\partial x}dx + \frac{\partial v_x}{\partial y}dy + \frac{\partial v_x}{dz}dz \\ v_y &= v_{Ay} + \frac{\partial v_y}{\partial x}dx + \frac{\partial v_y}{\partial y}dy + \frac{\partial v_y}{\partial z}dz \\ v_z &= v_{Az} + \frac{\partial v_z}{\partial x}dx + \frac{\partial v_z}{\partial y}dy + \frac{\partial v_z}{\partial z}dz, \end{aligned} \tag{12}$$

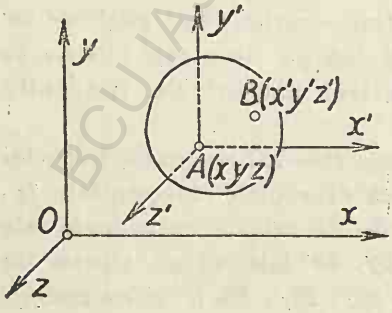


Fig. 8

sau vectorial (înmulțind respectiv cu $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, și adunând), după cele două feluri de notații obișnuite:

$$\bar{v} = \bar{v}_A + (d\bar{r}\, grad)\,\bar{v} = \bar{v}_A + d\bar{r}\, grad.\bar{v}.$$

Funcția $\bar{v}$ $[\bar{v}_x, \bar{v}_y, \bar{v}_z]$ după (12) este o funcție vectorială liniară a spațiului, reprezentând în primă aproximație vitesele moleculelor din domeniul punctului A.

Să considerăm la un moment dat

t o particulă fluidă având forma aproximativ sferică (Fig. 8), cu centrul în mol. $A(x,y,z)$, luată ca origina unui triedru mobil $Ax'y'z'$, paralel cu triedru fix $Oxyz$. Coordonatele x',y',z' ale punctelelor particulei în raport cu axele mobile, vor fi infinit mici de acelaşi ordin cu dimensiunile particulei, putând înlocui în (12) pe dx, dy, dz.

Să mai introducem în (12) după (8) (9) şi (10) expresiile derivatelor date de expresiile componentelor rotaţionalului vitesei, de ale viteselor de deformaţie liniară proporţională şi de ale viteselor de deformaţie unghiulară din punctul A, relativ la triedrul de referinţă ales.

Având astfel:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}=\alpha_x, \quad \frac{\partial v_x}{\partial y}=\beta_z-\omega_z, \quad \frac{\partial v_x}{\partial z}=\beta_y+\omega_y,$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial x}=\beta_z+\omega_z, \quad \frac{\partial v_y}{\partial y}=\alpha_y, \quad \frac{\partial v_y}{\partial z}=\beta_x-\omega_x,$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial x}=\beta_y-\omega_y, \quad \frac{\partial v_z}{\partial y}=\beta_x+\omega_x, \quad \frac{\partial v_z}{\partial z}=\alpha_z,$$

formulele (12) vor lua forma:

$$v_x=v_{Ax}+\alpha_x x'+\beta_z y'+\beta_y z'+(\omega_y z'-\omega_z y')=v_{.x}+v_{dx}+v_{rx}$$

$$v_y=v_{Ay}+\alpha_y y'+\beta_x z'+\beta_z x'+(\omega_z x'-\omega_x z')=v_{Ax}+v_{dy}+v_{ry}$$

$$v_z=v_{Az}+\alpha_z z'+\beta_y x'+\beta_x y'+(\omega_x y'-\omega_y x')=v_{Ax}+v_{dz}+v_{rz},$$

expresiile din paranteze fiind evident cele datorite rotaţiunei, iar cele în α şi β neputând fi de cât cele datorite deformaţiei.

Mişcarea de deformaţie fiind lipsită de rotaţie, trebue să admită o funcţie de vitesă.

Intradevăr se constată că diferenţiala

$$\overline{v_d}\,\overline{dr'}=(\alpha_x x'+\beta_z y'+\beta_y z')\,dx'+(\alpha_y y'+\beta_x z'+\beta_z x')\,dy'+(\alpha_z z'+\beta_y x'+\beta_x y')\,dz'$$

este exactă, integrala ei fiind funcţia de vitesă, şi anume:

$$\Phi'=\frac{1}{2}(\alpha_x x'^2+\alpha_y y'^2+\alpha_z z'^2+2\beta_x y'z'+\beta_y z'x'+2\beta_z x'y'). \quad (13)$$

Vom putea scrie, aşa dar, expresiuniile (12) sub forma :

$$v_x = v_{Ax} + \frac{\partial \Phi'}{\partial x'} + (\omega_y z' - \omega_z y')$$

$$v_y = v_{Ay} + \frac{\partial \Phi'}{\partial y'} + (\omega_z x' - \omega_x z') \qquad (14)$$

$$v_z = v_{Az} + \frac{\partial \Phi'}{\partial z'} + (\omega_x y' - \omega_y x') .$$

Rezultă că vitesa $\bar{v}$ a unui punct al particulei se compune din :

1) vitesa punctului reper A al particulei, derpt vitesă de translaţie generală;

2) vitesa datorită deformaţiunii particulei, mişcare care, în raport cu axele $Ax'y'z'$ are o funcţie de vitesă Φ' (mişcare potenţială), depinzând numai de coeficienţii de deformaţie, şi

3) vitesa (după un arc de cerc) datorită vitesei unghiulare medii de rotaţie $\bar{\omega} = \frac{\bar{\Omega}}{2}$ a particulei, în jurul axei instantanee de rotaţie trecând prin A.

Mişcarea particulei se compune astfel dintr'o translaţie, o deformaţie (caracterizată prin Φ') şi o rotaţie.

Coeficienţii funcţiunii Φ', exprimând deformaţiunile, au un rol important în teoria fluidelor viscoase, pe când în aceea a fluidelor perfecte rolul lor este secundar.

Descompunerea arătată a mişcării unei particule fluide este datorită lui *Helmholz*, creatorul teoriei mişcărilor rotaţionale sau turbionare (turbillon=vârtej).

Orice suprafaţă de al doilea grad cu centrul în A din familia $\Phi' = const$ este o suprafaţă echipotenţială a câmpului vitesei de deformaţie.

Dacă punem $\Phi' = \pm \frac{1}{2}$, avem aşa numita *cuadrica deformaţiilor*, care are, cum vom vedea, un înţeles geometric precis şi care, raportată la axele ei principale, capătă forma simplă

$$\alpha_1 X^2 + \alpha_2 Y^2 + \alpha_3 Z^2 = \pm 1. \qquad (15)$$

Cum sub această formă termenii dreptunghiulari dispar, adică $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$, aceasta înseamnă că deformaţiile unghiulare după faţetele acelui triedru sunt nule. Spre a avea pentru Φ' o expresie simplă, ne vom opri la acest nou triedru de referinţă, ale

cărui unghiuri nu se deformează, laturile acestora (depe axele principale) păstrându-şi origina şi direcţiile, dacă nu există translaţie ori rotaţie de ansamblu.

Pentru o particulă, care în momementul t este riguros sferică de raza R, ecuaţia suprafeţei va fi:

$$\left(\frac{X}{R}\right)^2+\left(\frac{Y}{R}\right)^2+\left(\frac{Z}{R}\right)^2=1. \qquad (16)$$

In momentul $t+dt$ numind, în raport cu acelaşi triedru de referinţă solidar cu particula deformabilă, $X'\,Y'\,Z'$ coordonatele suprafeţei modificate în virtutea mişcării de deformaţie, vom avea:

$$X'=X+\frac{\partial\Phi}{\partial X}dt=X+\alpha_1 X\,dt=X\,(1+\alpha_1 dt),$$

$$Y'=Y+\frac{\partial\Phi}{\partial Y}dt=Y+\alpha_2 Y\,dt=Y\,(1+\alpha_2 dt),$$

$$Z'=Z+\frac{\partial\Phi}{\partial Z}dt=Z+\alpha_3 Z\,dt=Z\,(1+\alpha_3 dt),$$

ceeace arată că coordonatele suprafeţei deformate satisfac relaţia, obţinută din (16),

$$\left(\frac{X'}{R(1+\alpha_1 dt)}\right)^2+\left(\frac{Y'}{R(1+\alpha_2 dt)}\right)^2+\left(\frac{Z'}{R(1+\alpha_3 dt)}\right)^2=1,$$

care reprezintă un elipsoid ale cărui axe, aşezate în axele principale de deformaţie, au ca semilungimi $R(1+\alpha_1 dt)$ etc.

Variaţia volumului particulei va fi evident, neglijând cantităţile infinitezimale de ordin superior,

$$\frac{4}{3}\pi R^3(1+\alpha_1 dt)(1+\alpha_2 dt)(1+\alpha_3 dt)-\frac{4}{3}\pi R^3=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\frac{4}{3}\pi R^3\,dt.$$

In cazul lichidelor incompresibile această variaţie trebuind să fie nulă, regăsim condiţia de incompresibilitate, dată de ecuaţia de continuitate:

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0=0,$$

care exprimă că dilataţia cubică a fluidului deformat în unitatea de timp (expresie invariantă faţă de orice triedru dreptunghiular de referinţă) este nulă.

Dacă considerăm suprafeţele echipotenţiale ale mişcării de deformaţie, date de ecuaţiile $\Phi'=const$,

$$\alpha_x x'^2+\alpha_y y'^2+\alpha_z z'^2+2\beta_x y'z'+2\beta_y z'x'+2\beta_z x'y'=const,$$

respectiv

$$\alpha_1 X^2 + \alpha_2 Y^2 + \alpha_3 Z^2 = const,$$

orice punct de pe o asemenea suprafață se va mișca (în mișcare de pură deformație a particulei) în direcția normalei, întrucât viteza (de deformație) într'un punct este normală pe suprafața echipotențială respectivă a mișcării potențiale (de deformație).

Pentru a ilustra descompunerea mișcării elementare (minus translație) în o deformație și o rotație, să considerăm, după cum am făcut și la discuția eforturilor de viscozitate, mișcarea particulară simplă, numită *mișcare de lunecare* (Vol. I Fig. 4), în care o particulă în formă cubică (Fig. 9 a), având fețele paralele cu ale triedrului de referință, se mișcă astfel, ca să avem $v_x = Ky$ deci $v_x = 0$ la fața inferioară, iar $v_y = v_z = 0$ peste tot, particula fiind după un interval dt în situația fig. 9 c.

In acest caz avem după (8), (9) și (10) (după cum se poate identifica și pe Fig. 9):

$$\alpha_x = \alpha_y = \alpha_z = \beta_x = \beta_y = \omega_x = \omega_y = 0$$

$$\beta_z = k = \omega_z ,$$

cele 3 planuri principale de deformație fiind planul figurii și planurile perpendiculare pe acesta, având ca urme pe figură diagonalele pătratului, după care se proectează cubul, pătrat deformat infinitesimal în romb.

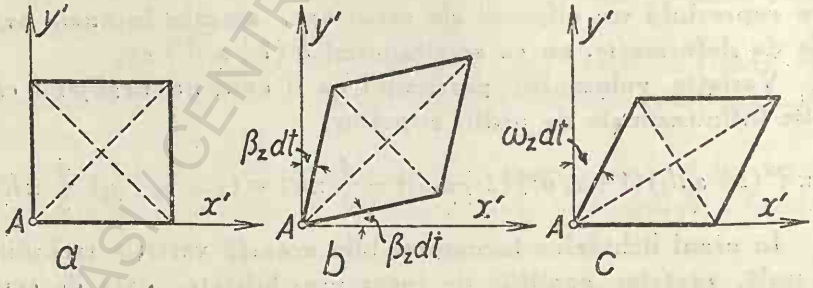


Fig. 9.

Dacă în intervalul dt imprimăm particulei din fig. 9 a *succesiv*, mai întâi mișcarea de deformație fig. 9 b, în care unghiul drept din A s'a micșorat (fără însă ca planurile principale de deformație menționate să schimbe orientarea) cu $\beta_z\, dt = k dt$, iar apoi rotația medie $\omega_z\, dt = k dt$, suportată *efectiv* de planurile principale de deformație, obținem paralelipipedul romboidal din fig. 9 c, la care se ajunge dintr'o dată printr'o simplă alunecare cu cantitățile $v_x\, dt = ky\, dt$ a straturilor suprapuse, paralele cu planul $z' Ax'$.

Considerând cazul general, se poate ușor vedea că descompunerea arătată este *univocă*. Intradevăr, pentru vitesa relativă față de $A\ (x, y, z)$ a punctelor vecine, am găsit mai sus expresia proecțiilor în sistemul de referință *fix*, paralel cu triedrul Ox, y, z și cu origina în A:

$$\begin{aligned} dv_x &= v_x - v_{Ax} = \alpha_x x' + \beta_z y' + \beta_y z' + (\omega_y z' - \omega_z y'), \\ dv_y &= v_y - v_{Ay} = \alpha_y y' + \beta_x z' + \beta_z x' + (\omega_z x' - \omega_x z'), \\ dv_z &= v_z - v_{Az} = \alpha_z z' + \beta_y x' + \beta_x y' + (\omega_x y' - \omega_y x'), \end{aligned} \quad (17)$$

și dacă acea vitesă s'ar putea descompune după mai multe combinațiuni diferite a unei deformații (cu coeficienții ei caracteristici) cu o rotație (vector turbion, sau rotațional de vitesă), s'ar obține pentru dv_x, dv_y, dv_z expresiuni ca cele de mai sus, având înaintea lui x', y', z' coeficienți diferiți. Ori aceasta nu este posibil, deoarece pentru o mișcare dată față de punctul A trebue să rezulte din formulă același ansamblu de valori dv_x, dv_y, dv_z în toate punctele domeniului A, și este destul să ne dăm aceste valori numai pentru trei puncte, pentru ca cele 9 ecuațiuni, de tipul celor de mai sus, să ne determine univoc pe cei 9 coeficienți, neputând deci exista decât o singură soluție.

Rezultă că în orice punct $(x, y, z,)$ al unui fluid, cele nouă valori α_x, α_y, α_z, β_x, β_y, β_z, ω_x, ω_y, ω_z sunt bine determinate și deci direcțiile principale de deformație, mărimea viteselor de dilatație liniară α_1, α_2, α_3 după aceste direcții, mărimea viteselor deformațiilor unghiulare după planurile principale de deformație și vectorul turbion $\bar{\Omega} = rot\, \bar{v}$ sunt cantități bine determinate în fiecare punct al masei.

7. Integrală curbilinie a vitesei. Circulație. Cazul mișcărilor potențiale.

Integrala

$$\int_{ABCD} v_x\, dx + v_y\, dy + v_z\, dz = \int_{ABCD} \bar{v}\, d\bar{r},$$

luată dealungul curbei $ABCD$ cu un anumit sens de parcurs, constitue *integrala curbilinie* a vitesei $\bar{v}$ dela A la D, mărime scalară care se înseamnă cu I_{ABCD}. Dacă A și D coincid, astfel ca să avem o linie continuă închisă, valoarea integralei, pentru care se

poate întrebuința atunci simbolul $\oint$, se numește *circulația vitesei* $\bar{v}$, însemnându-se pe scurt cu Γ. Această denumire se aplică de altfel și la orice alt câmp vectorial, în cazul forței, adică la un câmp de forță, fiind vorbă de lucrul efectuat de câmp pe curba sau conturul considerat.

In cazul vitesei vom avea pentru circulație:

$$I_{ABCA} = \oint v_x\,dx + v_y\,dy + v_z\,dz = \oint v\,ds\cos(v,ds) = \int \bar{v}\,d\bar{s} = \Gamma.$$

Următoarele relații sunt evidente:

$$I_{AD} = -\,I_{DA} \qquad I_{ABCA} = -\,I_{ACBA},$$

$$I_{ABCD} = I_{AB} + I_{BC} + I_{CD}.$$

O clasă de mișcări, care în practică nu se întâlnesc decât cu aproximație, dar care au o deosebită importanță pentru studiu, întrucât prezintă avantajii la tratarea lor analitică, este aceea a mișcărilor *nerotaționale*, menționate la pag. 26, cu $\bar{\Omega} = 2\bar{\omega} = 0$ fie în întreaga masă fie numai într'un anumit spațiu, ocupat la un moment dat de fluid. Acest spațiu, în care la acel moment mișcarea este astfel definită, poate fi *simplu conex**), (atunci când orice curbă închisă trasată în el este reductibilă la zero prin deformațiuni treptate fără a eși din spațiu), sau *multiplu conex* (atunci când în el se pot trasa și contururi *ireductibile*, adică cari, spre a se reduce la zero prin deformare continuă, trebue să iasă din acel spațiu). Un exemplu de spațiu din ultima categorie este *torul*, în care se pot duce și curbe închise ireductibile, anume acelea care străbat toate secțiunile lui transversale.

Reamintim că la o mișcare nerotațională (pag. 26), având formulele:

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial z},$$

*) Un spațiu se numește *conex*, atunci când se poate merge de la un punct oarecare A al său la un alt punct oarecare B al său, fără a se ieși din acel spațiu.

expresia

$$v_x\,dx + v_y\,dy + v_z\,dz = \bar{v}\,d\bar{r}$$

este diferențiala exactă a unei funcțiuni $\Phi(x, y, z)$, zisă funcțiune de vitesă, prin analogie cu funcțiunea de forță $f(x, y, z)$, când există, a unui câmp de forță $\bar{F}$.

Cum această din urmă funcțiune, luată cu semn schimbat, se numește *potențial*: $U(x, y, z) = -f(x, y, z)$, se poate vorbi și aci de un *potențial de vitesă* $\varphi(x, y, z) = -\Phi(x, y, z)$, astfel ca:

$$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

$$v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad (18)$$

$$v_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

după cum la un câmp de forță avem:

$$F_x = \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x},$$

$$F_y = \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial U}{\partial y},$$

$$F_z = \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Totuși, astăzi se obișnuește în mod curent a se numi *potențial*, fără a se face o astfel de distincție, chiar funcțiunea de vitesă Φ, după cum de altfel vom face și noi în majoritatea cazurilor. Vom păstra însă această distincțiune în anumite cazuri, pentru a arăta analogiile mecanice ce există între un câmp de forță *potențial* și un câmp de vitesă *nerotațional*, numit deasemenea *potențial* pe baza analogiei analitice. Asemenea câmpuri vectoriale, care comportă o funcțiune scalară din care ele derivă, se numesc și *lamelare*, din cauza structurii lor, ce se poate reprezenta geometric prin suprafețe zise *echipotențiale*:

$$U = const \quad \text{sau} \quad \varphi = const,$$

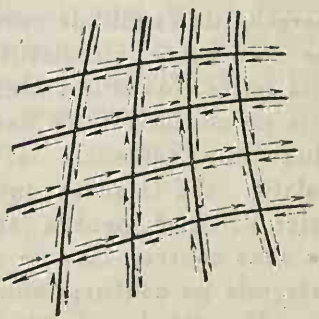


Fig. 10

pe care este perpendiculară direcţia câmpului, *liniile de câmp* (aci *linii de curent*) fiindu-le deci ortogonale.

Câmpul de vitesă al unei mişcări nerotaţionale constatându-se că este *potenţial*, denumirile de *mişcare nerotaţională* şi *mişcare potenţială* pot fi considerate sinonime.

La o asemenea mişcare avem

$$I_{AB} = \int_A^B v_x\,dx + v_y\,dy + v_z\,dz$$

$$= \int_A^B \frac{\partial \Phi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\,dz = \Phi_B - \Phi_A. \qquad (19)$$

Vom deosebi cazul potenţialului *uniform* sau *univoc* (care adică în orice punct are o singură valoare), de cazul unui potenţial *multiform*, când de ex. în punctul B funcţia Φ poate avea mai multe valori, pe care le primeşte efectiv atunci când, plecând din A, ne deplasăm (adică integrăm) pe drumuri diferite dela A la B. Pentru lămurirea acestei chestiuni vom stabili mai întâi teorema lui *Stokes*.

8. Teorema lui Stokes.

Studiul mişcărilor *rotaţionale*, în cari pot intra şi mişcările potenţiale, drept cazuri particulare şi anume cu valoarea $\bar{\Omega} = 0$, este înlesnit prin aplicarea teoremei lui *Stokes*, care sună astfel:

Într'un spaţiu ocupat de un fluid conex, circulaţia vitesei după un contur închis arbitrar este egală cu fluxul vectorului rotaţional al vitesei $\bar{\Omega} = rot\ \bar{v}$ *prin orice suprafaţă* σ *mărginită de contur.*

Atât în privinţa circulaţiei de pe contur cât şi în privinţa fluxului printr'o astfel de suprafaţă σ, mărginită de contur, putem împărţi arbitrar această suprafaţă în elemente $d\sigma$ (de ex. prin o pereche de familii de curbe ce se intersectează reciproc). Adunând pe de o parte circulaţiile contururilor elementelor $d\sigma$ iar pe de altă parte fluxurile rotaţionale prin $d\sigma$, vom obţine respectiv circulaţia pe conturul finit dat σ şi fluxul prin σ. Propoziţia pentru flux fiind evidentă, ea rămâne de verificat numai pentru circulaţie. Or, în suma integralelor de linie pe contururile elementelor $d\sigma$ intră, pentru laturile comune, câte doi termeni egali şi de sens contrar, care se distrug reciproc, astfel că rămâne numai integrala pe conturul considerat, adică circulaţia acestuia.

Rezultă de aci prin consideraţiuni de continuitate, că circu-

laţia unui contur elementar, acela al unui element $d\sigma$, pentru care se dau poziţia şi orientarea (sau direcţia normalei), trebue să fie proporţională cu aria elementului, după cum de altfel se va vedea clar din cele ce urmează.

Să considerăm o suprafaţă oarecare σ mărginită de conturul s. Vom admite că, în fiecare punct al spaţiului ocupat de fluid, vitesa este o funcţie continuă şi uniformă, şi vom descompune suprafaţa σ în elemente infinitezimale $d\sigma$, decupate de o triplă infinitate de planuri, paralele cu planurile coordonate şi la distanţe elementare infinitezimale între ele. Suprafeţele $d\sigma$ vor fi încadrate între faţetele paralelipipedelor drepte astfel formate, şi dacă sunt oblice faţă de toate cele trei axe, vor putea fi sau deveni toate triunghiuri. Intradevăr, dacă la prima împărţire ar eşi unele patrulatere, pentagoane sau exagoane, o nouă subîmpărţire mai deasă le va putea oricând reduce la triunghiuri. Bine înţeles dacă unele din elemente vor fi paralele cu una sau două din axele coordonate, vor rămâne paralelograme $d\sigma$ ireductibile, cari însă se vor putea trata după aceeaşi metodă, după care, în cele ce urmează, vom trata unul din elementele triunghiulare (Fig. 11).

Un asemenea element triunghiular $d\sigma$, împreună cu cele trei faţete (triunghiuri drepunghiulare) ale paralelipipedului pe care îl intersectează, va forma un tetraedru infinitezimal $ABCD$, orientarea lui puţând de altfel varia, fără ca aceasta să restrângă generalitatea demonstraţiei.

Fie x, y, z coordonatele vârfului A (care la limită va fi un punct al suprafeţei σ) şi v_x, v_y, v_z componentele vitesei lui.

Ca să determinăm circulaţia de-a-lungul conturului $BCDB$, să scrim expresiile componentelor vitesei din mijlocurile laturilor faţetei $d\sigma$, care se pot considera ca vitesele medii pe laturi, lăsând bine înţeles de o parte componentele normale, care nu contribue la circulaţie. A lua astfel vitesa în mijlocul unei laturi infinitezimale echivalează cu neglijarea, admisă şi anterior, a unor infinit mici de ordin superior (cu alte cuvinte cu admiterea variaţiunii liniare a vitesei de-a-lungul laturei, variaţiune dată de derivatele de ordinul întâi). Conform figurii 11 vom avea:

$$v_1 = v_x + \frac{1}{2}\frac{\partial v_x}{\partial x}dx + \frac{1}{2}\frac{\partial v_x}{\partial y}dy,$$

$$v_2 = v_y + \frac{1}{2}\frac{\partial v_y}{\partial x}dx + \frac{1}{2}\frac{\partial v_y}{\partial y}dy,$$

$$v_3 = v_y + \frac{1}{2}\frac{\partial v_y}{\partial y}dy + \frac{1}{2}\frac{\partial v_y}{\partial z}dz,$$

$$v_4 = v_z + \frac{1}{2}\frac{\partial v_z}{\partial y}dy + \frac{1}{2}\frac{\partial v_z}{\partial z}dz,$$

$$v_5 = v_z + \frac{1}{2}\frac{\partial v_z}{\partial z}dz + \frac{1}{2}\frac{\partial v_z}{\partial x}dx,$$

$$v_6 = v_x + \frac{1}{2}\frac{\partial v_x}{\partial z}dz + \frac{1}{2}\frac{\partial v_x}{\partial x}dx.$$

Pentru circulația după conturul $BCDB$ în sensul arătat pe figură avem:

$$\Gamma d\sigma = (v_6 - v_1)\,dx + (v_2 - v_3)\,dy + (v_4 - v_5)\,dz$$

$$= \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{dv_y}{dz}\right)\frac{dy\,dz}{2} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\frac{dz\,dx}{2} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\frac{dx\,dy}{2}.$$

Dacă n_x, n_y, n_z sunt cosinusurile directoare ale normalei $\bar{n}$ a elemntului $d\sigma$ $(ACDB)$ cu sensul convenit mai jos, vom putea scrie:

$$\Gamma d\sigma = (\Omega_x n_x + \Omega_y n_y + \Omega_z n_z)\,d\sigma, \qquad (20)$$

căci:

$$\frac{1}{2}dy\,dz = n_x\,d\sigma$$

$$\frac{1}{2}dz\,dx = n_y\,d\sigma$$

$$\frac{1}{2}dx\,dy = n_z\,d\sigma.$$

In privința sensului, în care circulația se socotește pozitivă, și sensului pozitiv în care se ia normala $\bar{n}$ a lui $d\sigma$, pentru ca relația de mai sus să fie totdeauna satisfăcută, convenim ca aceste două sensuri să formeze același sistem ca și axele coordonate, în cazul figurei *sistemul drept* (de ex. sensului normalei $+x$ îi corespunde sensul de rotație $Oy \to Oz$, analog cu legătura dintre înaintarea și rotirea unui burghiu, care se învârtește *la dreapta*). In cazul acesta, un observator, parcurgând conturul pe fața pozitivă, va avea totdeauna pe $d\sigma$ la stânga

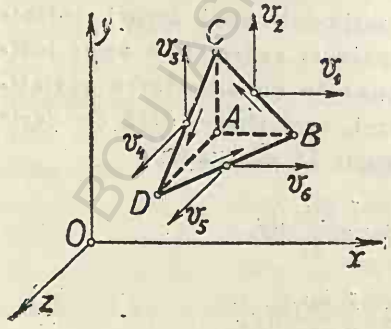


Fig. 11

Dacă exprimăm acum circulațiile pentru toate elementele $d\sigma$ din care se compune σ, socotite toate din aproape în aproape cu același sens (ceea ce conduce de ex. la normale *pozitive* $\bar{n}$, așezate toate de aceeași parte a suprafeței σ, considerată în consecință ca pozitivă), valorile elementelor interioare ale lui I se distrug, după cum am arătat, două câte două, și rămâne numai circulația

$$\Gamma = \oint \bar{v}\, d\bar{s} = \oint v\, ds \cos(\bar{v}, d\bar{s})$$

de-a-lungul conturului s al suprafeței σ, deci:

$$\Gamma = \int^{\sigma} (\Omega_x n_x + \Omega_y n_y + \Omega_z n_z)\, d\sigma. \qquad (21)$$

Membrul al doilea însă reprezintă totodată evident și fluxul prin suprafață al rotaționalului vitesei, adică al vectorului turbion $\bar{\Omega}$. Relația de mai sus, care exprimă tocmai teorema lui *Stokes*, se mai poate scrie:

$$\oint \bar{v}\, d\bar{s} = \int^{\sigma} \Omega\, d\sigma \cos(\bar{\Omega}, \bar{n}) = \int^{\sigma} \bar{\Omega}\, d\bar{\sigma}, \qquad (22)$$

unde $\bar{n}$ este vectorul unitar în direcția normalei pozitive iar $d\bar{\sigma} = \bar{n}\, d\sigma$.

Pentru simplificarea scrierii am întrebuințat și în membrul al doilea semnul integralei simple, rezervând semnul *dublu* numai în cazul când $d\sigma$ este exprimat prin $dx\,dy$ (respectiv *triplu* atunci când $d\sigma$ este exprimat prin $dx\,dy\,dz$).

Relația (22) se scrie analitic:

$$\oint v_x\, dx + v_y\, dy + v_z\, dz$$

$$= \int^{\sigma} \left\{ \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) n_x + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) n_y + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) n_z \right\} d\sigma .$$

Teorema lui *Stokes* se aplică la orice câmp vectorial $\bar{v}$ și $rot\, \bar{v}$, singura condiție fiind ca cele trei funcțiuni v_x, v_y, v_z de x, y, z, care definesc pe $\bar{v}$, să fie continue și derivabile în toate punctele suprafeței σ, întrucât în expresiile componentelor lui $rot\, \bar{v}$ apar derivatele acelor funcțiuni. Mai târziu vom vedea interpretarea ce se poate da teoremei în caz de suprafețe de discontinuitate a lui $\bar{v}$.

Teorema lui *Stokes* este de fapt generalizarea unei teoreme descoperită de *Ampère*, care a demonstrat echivalența câmpului magnetic, dat de un circuit parcurs de curent electric, cu câmpul unei foi magnetice, limitată de circuit.

9. Funcție sau potențial de viteză (cazul mișcărilor nerotaționale).

In cazul când în tot spațiul în care se găsește suprafața σ, limitată de contur, mișcarea este potențială, vectorul $\bar{\Omega}$, și deci fluxul său prin suprafață fiind nul, circulația vitezei depe contur va fi nulă. Dacă există însă pe acea suprafață regiuni *lacunare*, în cari $\bar{\Omega}$ nu este nul, ele se pot închide în contururi (interioare spațiului) și atunci teorema lui *Stokes*, pe lângă enunțul general care ne dă circulația vitezei pe conturul exterior (egal cu fluxul prin întreaga suprafață σ limitată de el), se mai poate enunța astfel:

Dacă o suprafață σ, *în care* $\bar{\Omega}=0$, *este limitată de mai multe curbe închise* (Fig. 12), *din care una exterioară și celelalte interioare, circulațiunea vitezei pe totalitatea contururilor în chestiune, luate în sensul cuvenit pentru toate elementele* $d\sigma$ (de ex. astfel ca pe fața pozitivă observatorul parcurgând orice contur să aibă suprafețele $d\sigma$ și deci σ la stânga sa) *este nulă.*

Definițiile de conexitate pot primi acum și o altă exprimare: Un spațiu în care, printr'un contur închis arbitrar se poate duce o suprafață σ, care să se poată deforma continuu astfel ca să se reducă la zero, fără a ieși din acel spațiu, este, în conformitate cu definiția dată la pag. 34, *simplu conex*. Un asemenea spațiu este caracterizat prin aceea că, orice curbă închisă trasată în el este *reductibilă*. In caz însă că într'un spațiu, în afară de contururi reductibile se pot duce și contururi *ireductibile*, adică pentru cari nu se găsește nici-o asemenea suprafață σ ci numai suprafețe *lacunare*, acest spațiu este *multiplu conex*. Ca exemplu, din cele mai simple, am dat *torul*, în care orice contur ce străbate toate secțiunile transversale ale torului este ireductibil.

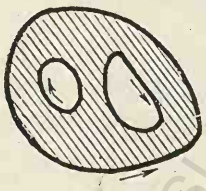


Fig. 12

După stabilirea teoremei lui *Stokes* să revenim la relația (21), ținând seama de felul de conexitate al spațiului, în care mișcarea unui fluid este potențială.

Dacă parcurgem la integrare un contur reductibil odată sau de mai multe ori), vom avea după teorema lui *Stokes*

$$I_{ABA} = \Phi_A - \Phi_A' = 0,$$

și deci într'un spațiu simplu conex funcțiunea de viteză Φ (sau potențialul φ) va fi *uniformă* sau *univocă*, adică va avea o singură valoare în orice punct $A\ (x, y, z)$. Dacă parcurgem însă un contur *ireductibil*, ceea ce nu se poate găsi decât într'un spațiu multiplu conex, tot teorema lui *Stokes* ne va da la orice conturare

$$I_{ABA} = \Phi_A - \Phi_A' = \int^{\sigma} \bar{\Omega}\, d\bar{\sigma} = \Gamma,$$

și cum în general fluxul rotațional total prin spațiile lacunare nu este nul, potențialul va fi multiform, adică într'un punct A va avea mai multe valori: $\Phi_A' \neq \Phi_A$, astfel că în general $\Phi_A - \Phi_A' = p\Gamma$, p fiind numărul de conturări sau cicluri, nu va fi nul.

In rezumat, dacă mișcarea potențială există într'un spațiu *simplu conex*, potențialul este *uniform*, iar într'un spațiu *multiplu conex*, *multiform*.

10. Spațiu simplu conex. Potențial uniform.

In primul caz nu avem decât curbe închise reductibile cu circulația nulă, deci, luând două puncte A și B într'un asemenea spațiu, integrala

$$I_{AB} = \Phi_B - \Phi_A$$

este independentă de drumul care leagă aceste puncte, adică (Fig. 13) pentru două drumuri arbitrare vom avea

$$I_{ACB} = I_{ADB},$$

consecință imediată a relației

$$I_{ACBDA} = 0\ ;$$

vice-versa, din ultima relație, presupusă generală, rezultă independența lui I_{AB} de drumul AB.

Proprietățile deci ale unui spațiu simplu conex:

1) Circulația pe orice contur : nulă,

2) independența integralei I_{AB} de drumul parcurs între două puncte oarecare A și B, sunt echivalente.

Oricare din aceste proprietăți, prezentă într'un spațiu oarecare, arată că există un potențial sau funcție de vitesă *uniformă* (deci spațiul de existență este simplu conex).

Intradevăr, dacă I_{AB} între A și B este independent de drumul AB, ținând pe A fix și deplasând pe B pe o linie oarecare ce pornește din A, vom avea I_{AB} funcție numai de coordonatele x, y, z ale lui B, și aceeștă funcție va fi evident funcția de vitesă a câmpului, căci pentru o deplasare infinitesimală a lui B cu $d\bar{r}[dx, dy, dz]$ avem

$$dI_{AB} = v_x\,dx + v_y\,dy + v_z\,dz = d\Phi .$$

Uniformitatea acestei funcțiuni (potențial uniform) rezultă direct din ipoteza făcută, că I_{AB} depinde numai de coordonatele lui B.

In fine, s'a arătat că uniformitatea potențialului antrenează conexitatea simplă a spațiului potențial.

11. Spațiu multiplu conex. Potențial multiform (ciclic).

Să considerăm al doilea caz, anume un spațiu multiplu conex, în care ar exista un potențial de vitesă, spațiu în care prin definiție există și contururi ireductibile. Circulația pe un asemenea contur simplu $ACBDA$ este egală cu fluxul rotațional prin orice suprafață σ, mărginită de acel contur, astfel că, după o singură înconjurare a fluxului în chestiune, I_{ACBDA} va crește cu circulația respectivă Γ.

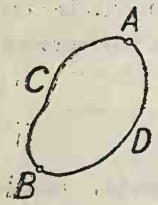


Fig. 13

După p înconjurări, pentru a ajunge la punctul de plecare, vom avea o creștere cu $p\Gamma$, astfel că potențialul multiform va fi anume *ciclic*, cu perioada Γ.

12. Teorema lui Gauss.

In Vol. I pag. 85 am arătat că vitesa dilatației cubice se exprimă prin

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = div\,\bar{v} .$$

Pentru un element de volum creșterea sa în unitatea de timp va fi $div\,\bar{v}\,d\tau$, iar pentru întregul volum τ ea va fi

$$\int^{\tau} div\,\bar{v}\,d\tau .$$

Ori, dacă σ este suprafaţa limitativă (*închisă*, pentru care putem întrebuinţa simbolul de integrare $\oint d\sigma$) a volumului τ, această creştere de volum va fi evident egală cu fluxul vitesei prin σ. Vom avea în consecinţă

$$\int^{\tau} div\, \bar{v}\, d\tau = \oint v \cos(\bar{v}, x)\, d\sigma = \oint v_n\, d\sigma = \oint \bar{v}\, \bar{n}\, d\sigma = \int \bar{v}\, d\bar{\sigma}, \qquad (23)$$

iar analitic

$$\int^{\tau} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) d\tau = \oint (v_x n_x + v_y n_y + v_z n_z)\, d\sigma, \qquad (23.1)$$

unde v_x, v_y, v_z pot fi orice funcţiuni de (x, y, z), continue şi derivabile.

Această relaţie exprimă *teorema lui Gauss*, (uneori purtând numele lui *Green* sau al lui *Ostrogradsky*), aplicabilă la orice câmp vectorial şi care se enunţă :

Integrala de volum a divergenţei unui vector este egală cu fluxul vectorului prin suprafaţa limitativă.

Relaţiile (23) şi (23.1) permit transformarea unei integrale de volum într'o integrală de suprafaţă şi vice-versa.

Dacă frontiera σ a volumului τ este formată din mai multe suprafeţe închise, din care una este exterioară, celelalte făcând goluri în volumul conex τ (numit atunci şi volum *perifractic*), formula lui *Gauss* se aplică deasemenea, cu condiţia ca integrala de suprafaţă să se întindă asupra totalităţii lui σ, normala $\bar{n}$ fiind totdeauna îndreptată în spre exteriorul lui τ.

13. Interpretări sau consecinţe matematice ale teoremelor lui Gauss şi Stokes.

Aceste teoreme conduc direct la formule de integrare prin părţi.

Astfel formula lui *Gauss*, în care punem $v_y = v_z = 0$ şi $v_x = UV$:

$$\int^{\tau} \frac{\partial}{\partial x}(UV)\, d\tau = \oint UV n_x\, d\sigma$$

se poate scrie

$$\int^{\tau} U \frac{\partial V}{\partial x}\, d\tau = \oint UV n_x\, d\sigma - \int V \frac{\partial U}{\partial x} d\tau,$$

care, după înlocuirea lui $d\tau$ prin $dx\,dy\,dz$ și a lui $n_x\,d\sigma$ prin $dy\,dz$, s'ar putea obține prin integrare prin părți. La fel se obțin și celelalte două formule cu derivatele în raport cu y sau z. Invers, prin integrare prin părți se ajunge la teorema lui *Gauss*.

Punând deasemenea $v_y = v_z = 0$ în formula lui *Stokes*

$$\int^{\sigma}\left\{\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{dz}\right)n_x+\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)n_y+\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)n_z\right\}d\sigma$$

$$=\oint v_x\,dx+v_y\,dy+v_z\,dz,$$

obținem

$$\int^{\sigma}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}n_y+\frac{dv_x}{\partial y}n_z\right)d\sigma=\oint v_x\,dx,$$

iar dacă de asemenea punem $v_x = UV$:

$$\int^{\sigma} U\left(\frac{\partial V}{\partial z}n_y-\frac{\partial V}{\partial y}n_z\right)d\sigma=\oint UV\,dx-\int^{\sigma} V\left(\frac{\partial U}{dz}n_y-\frac{\partial U}{\partial y}n_z\right)d\sigma,$$

făcând înlocuirile $n_x\,d\sigma = dy\,dz$, $n_y\,d\sigma = dz\,dx$, $n_z\,d\sigma = dx\,dy$, avem în forma astfel obținută:

$$\int\int^{\sigma} U\left(\frac{\partial V}{dz}dz-\frac{\partial V}{dy}dy\right)dx=\oint UV\,dx-\int\int^{\sigma} V\left(\frac{\partial U}{dz}dz-\frac{\partial U}{\partial y}dy\right)dx,$$

o operație de integrare prin părți.

14. Descompunerea accelerației, adică a derivatei subtanțiale a vitesei, în derivata parțială de timp și, înmulțită cu v, derivata parțială de spațiu (derivată staționară sau sub t constant).

Pentru a avea derivata *substanțială* (care este o derivată totală) a vitesei în variabilele lui *Euler*, trebue să adunăm *derivata parțială în raport cu timpul* a vitesei (numită și *derivată locală* în raport cu timpul), cu *creșterea în raport cu spațiul* a vitesei, datorită repartiției momentane a vitesei în domeniul punctului, (și care, în cazul mișcărei staționare ar rămâne singură), anume creșterea vectorială a vitesei atunci când ne mutăm pe traectorie cu $\bar{v}$ (de fapt cu $d\bar{r}$ împărțit cu dt, adică amplificat la $\bar{v}$). Ori (vezi complementul acestui capitol) creșterea, la un moment t, a vitesei la o strămutare în spațiu cu $d\bar{r}$ este (derivata

vectorială respectivă $\frac{\partial \bar{v}}{|\partial \bar{r}|} = \frac{d\bar{r}}{|d\bar{r}|}\ grad.\bar{v} = \bar{s}\, grad.\bar{v}$ înmulţită cu $|d\bar{r}|$, $\bar{s}$ fiind vectorul unitar în direcţia s):

$$d\bar{v} = d\bar{r}\, grad.v$$

astfel că, dacă luăm pe $d\bar{r}$ pe traectorie şi îl amplificăm la $\bar{v}$, vom avea pentru acea creştere în raport cu spaţiul, numită uneori *derivată staţionară* (sub t constant)

$$\bar{v}\, grad.\bar{v}\ .$$

Spre a lămuri şi mai bine această noţiune, să presupunem că e vorba de un câmp scalar, de ex. acel al tempraturei θ, fluidul fiind în repaus. In lipsă de mişcare, într'un punct A nu vom avea de considerat decât derivata de timp locală, adică creşterea temperaturei în unitatea de timp la acelaşi loc la un moment t. Dacă însă fluidul este în mişcare şi se caută creştera temperaturei în unitatea de timp nu pe loc ci la *aceeaşi moleculă* (substanţă), trebue să ţinem seama că în unitatea de timp molecula din A s'a deplasat pe traectorie cu o cantitate $\bar{v}$ (presupunem unitatea de timp infinitesimală, pentru ca $\bar{v}$ să fie un element al traectoriei), şi atunci pe lângă creşterea pe loc ($dt = 1$, ceeace revine a lua o derivată locală) am avea de adăogat şi creşterea, în acelaşi interval 1, datorită creşterii razei vectoare $\bar{r}$ cu $d\bar{r}$ pe traectorie, adică $d\bar{r}$ luat în unitatea de timp, deci egal cu $\bar{v}$, pentru a corespunde poziţiei ce o va avea aceeaşi moleculă în momentul final. Este metoda folosită la calculul unei diferenţiale totale (însă în intervalul de timp $= 1$), anume de a face să varieze *succesiv* câte una din variabilele independente (aci *timpul* şi *spaţiul*, acesta însă într'o anumită direcţie: $\bar{v}$ şi egal cu $\bar{v}$) celelalte rămânând fixe şi a aduna creşterile corespunzătoare ale funcţiunii, ceeace dă acelaşi rezultat (cu aproximaţia unor infinit mici de ordin superior) ca şi atunci când creşterile variabilelor independente s'ar face simultan.

Ori, creşterea în chestiune a lui θ, datorită repartiţiei acestui câmp scalar în momentul t, este, precum se ştie: $\bar{v}\ grad\ \theta$. Vom avea, aşa dar,

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial \theta}{\partial t} + \bar{v}\ grad\ \theta.$$

Pentru un câmp vectorial vom avea, conform celor ce preced,

$$\frac{d\bar{v}}{dt}=\frac{\partial\bar{v}}{\partial t}+\bar{v}\,grad.\bar{v}\,. \qquad (24)$$

Ultimul termen (spaţial) intrând în ecuaţia vectorială a lui *Euler* sub această formă $\bar{v}\,grad.\bar{v}$ sau $(\bar{v}\,grad)\,\bar{v}$, iar în cele trei ecuaţiuni scalare ale lui *Euler* sub forma:

$$\begin{aligned} v\,grad\,v_x &= v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\\ v\,grad\,v_y &= v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{dz} \qquad (25)\\ v\,grad\,v_z &= v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\,, \end{aligned}$$

importă a se şti în ce condiţiuni integrarea este posibilă, adică $\bar{v}\,grad.\bar{v}$ se poate pune şi el sub forma unui gradient de câmp scalar, de x, y, z.

In complementul de la finele prezentului capitol se arată descompunerea

$$\bar{v}\,grad.\bar{v}=\mathcal{T}\bar{v}=\mathcal{T}_s\,\bar{v}+\mathcal{T}_a\,\bar{v}=grad\,\Phi'_{\bar{r}=\bar{v}}+[\bar{\omega}\,\bar{v}]. \qquad (26)$$

Dar Φ' nu este o funcţie de x, y, z ci de $x'y'z'$, după axe solidare cu axele principale de deformaţie ale particulei, adică cari participă la mişcarea generală de translaţie şi rotaţie a particulei (grad Φ' trebue luat în punctul $\bar{r}=\bar{v}$).

Această funcţiune de altfel este valabilă numai în domeniul unui punct x, y, z, având valoarea zero în acel punct, astfel că nu constituie o funcţie continuă în spaţiul ocupat de fluid. Putem însă înlocui valoarea lui $grad\,\Phi'$ prin o funcţie de x, y, z:

$$grad\,\Phi'=\mathcal{T}_s\,\bar{v}=\frac{1}{2}(\mathcal{T}+\mathcal{T}_c)\,\bar{v}\,,$$

astfel că (26) se scrie

$$\bar{v}\,grad.\bar{v}=\mathcal{T}\bar{v}=\frac{1}{2}(\mathcal{T}+\mathcal{T}_c)\,\bar{v}+[\bar{\omega}\,\bar{v}]\,,$$

de unde

$$\bar{v}\,grad.\bar{v}=\mathcal{T}\bar{v}=\mathcal{T}_c\,\bar{v}+2\,[\bar{\omega}\,\bar{v}]\,.$$

Cum se poate uşor vedea că

$$\mathcal{T}_c\,\bar{v}=grad\,\frac{v^2}{2}\,,$$

iar $2\bar{\omega} = rot\,\bar{v}$, rezultă:

$$\bar{v}\,grad\,\bar{v} = grad\frac{v^2}{2} - [\bar{v}\,rot\,\bar{v}]. \qquad (27)$$

Aceasta se obţine şi fără considerarea tensorului, dacă transformăm (25) astfel, ca să apară în primii trei termeni din membrul al doilea componentele lui $\mathcal{T}_c$ şi anume:

$$\bar{v}\,grad\,v_x = \frac{\partial v_x}{\partial x}v_x + \frac{\partial v_y}{\partial x}v_y + \frac{\partial v_z}{\partial x}v_z - \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)v_y$$

$$+ \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\partial v_z, \text{ etc.,}$$

şi trecem apoi la expresia vectorială.

O a treia cale pentru a trece la (27) şi care se întrebuinţează obişnuit în tratate, este de a se face $\bar{u} = \bar{v}$ în desvoltarea cunoscută a lui $grad\,(\bar{u}\,\bar{v})$:

$$grad\,(\bar{u}\,\bar{v}) = [\bar{u}\,rot\,\bar{v}] + [\bar{v}\,rot\,\bar{u}] + \bar{u}\,grad.\bar{v} + \bar{v}\,grad.\bar{u}.$$

Forma (27) a lui $\bar{v}\,grad.\bar{v}$ arată că, în cazul $rot\ \bar{v} = 0$ adică a mişcărilor potenţiale, termenul $\bar{v}\,grad.\bar{v} = grad\frac{v^2}{2}$ fiind un gradient, face posibilă, precum vom vedea, integrarea ecuaţiei mecanice vectoriale $\left(\text{funcţia primitivă a lui } grad\ \frac{v^2}{2} \text{ este } \frac{v^2}{2}\right)$.

15. Condiţiile la limită şi consecinţele continuităţii admise.

La contactul dintre un fluid şi un perete sau dintre două fluide ce nu se amestecă între ele, dacă nu se produce nicăeri gol (vid) sau pătrundere, moleculele din ambele părţi ale suprafeţei de contact au vitese tangenţiale la aceasta, putând totuşi diferi între ele ca direcţie şi valoare scalară (vezi: suprafeţe de discontinuitate, pag. 47 Vol. 1).

Lagrange admite că suprafaţa-frontieră a unui fluid este formată permanent din aceleaşi molecule, adică moleculele din interior nu pot ajunge la frontieră şi nici din frontieră nu pot intra în interior.

Prima parte, anume că, în cazul mişcărilor fără discontinuităţi în masa unui fluid, o moleculă din interior nu va putea într'un timp finit să ajungă la frontieră, se poate demonstra.

Să considerăm întradevăr o moleculă A la distanța a de frontieră. Dacă h este suficient de mic, vom limita în jurul său un domeniu, pentru care putem admite cu suficentă aproximație că se deformează *afin*, cu *afinor constant* în acest domeniu mărginit. Dacă presupunem că molecula A se mișcă spre frontieră, micșorarea lui h s'ar face proporțional cu h, coeficientul de proporționalitate fiind o funcțiune oarecare de timp.

Vom avea, așa dar,

$$\frac{dh}{dt} = hf(t),$$

sau

$$\log \frac{h}{h_0} = \int_0^t f(t)\,dt\,.$$

Admițând că integrala este finită, $\log \frac{h}{h_0}$ va fi de asemenea finit. Dacă $f(t)$ este negativ, h va descrește indefinit fără însă a ajunge la zero, decât după un timp infinit.

Raționamentul făcut presupune, bineînțeles, că vitesa sau suprafața frontieră nu prezintă discontinuități, căci altfel, de ex. la pătrunderea bruscă a unei muchiii ascuțite într'o masă fluidă, prin despicarea acesteia moleculele fluide din interior vor putea parveni la frontieră, cu creare însă de discontinuități.

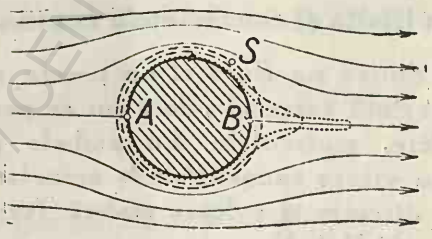


Fig 14

Datorită faptului că fluidele nu sunt în realitate medii perfect continue, vom putea avea și fenomenul invers, adică molecule aparținând unei suprafețe frontiere, care să pătrundă în interiorul masei.

Să considerăm acum curentul unui fluid neviscos în jurul unui cilindru sau unei sfere. Liniile de curent vor avea aproxi-

normativ forma din fig 14, în A și B vitesa fiind nulă. In imediata vecinătate a peretelui câmpul vitesei se poate reprezenta printr'un afinor constant. Lângă A, normal pe suprafață, drumurile se scurtează mereu, iar paralel cu suprafața, se lungesc. Lângă B se întâmplă contrariul.

Teoretic o moleculă de lângă A se va apropia mereu de suprafață, depărtarea față de aceasta micșorându-se după o lege exponențială fără a se anula nici odată, pentru a scădea totuși repede sub orice limită dată.

In schimb, moleculele inițial lângă A devin tot mai puține, numărul lor scăzând de-asemenea exponențial, astfel că, după un timp nu prea lung, rămân foarte puține din moleculele aflate inițial lângă A.

Ca să vedem cum se petrec lucrurile de partea cealaltă B, să considerăm o suprafață *fluidă* (adică compusă mereu din aceeași molecule) aflată la o mică distanță de suprafața sferei (linia simplu întreruptă). După un timp oarecare ea se va găsi în poziția însemnată prin o linie întreruptă cu puncte, iar mai târziu se va transforma în linia punctată și a. m. d. Ea se va apropia, așa dar, mereu la proră, pe când la pupă va căpăta o formă din ce în ce mai lungueață.

In realitate câmpul unui fluid *natural* (viscos) nu este așa de regulat, depărtându-se de acela figurat în fig. 14.

COMLEMENT ASUPRA CALCULULUI VECTORIAL ŞI TENSORIAL UTIL IN HIDRODINAMICA.

Vom presupune cunoscute noţiunile curente asupra vectorilor. Vom continua cu notaţia de a pune alături de litera unui punct A coordonatele lui în paranteză: $A(x, y, z)$, iar alături de simbolul unui vector $\bar{v}$ componentele acestuia în cârlige: $\bar{v}[v_x, v_y, v_z]$, de câte ori va fi nevoe de o asemenea precizare.

1. Produs scalar.

După cum produsul între doi scalari sau între un scalar ρ şi un vector $\bar{u}$ este comutativ, de ex. pentru ultimul caz se poate scrie

$$\rho\bar{u} = \bar{u}\rho, \qquad (1)$$

tot astfel şi produsul scalar $u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$ între doi vectori $\bar{u}$ şi $\bar{v}$ este comutativ, putându-se scrie, după diferitele feluri de notaţie:

$$P_s = (\bar{u}\,\bar{v}) = (\bar{v}\,\bar{u}),$$

sau

$$P_s = \bar{u}.\bar{v} = \bar{v}.\bar{u},$$

sau simplu

$$P_s = \bar{u}\,\bar{v} = \bar{v}\,\bar{u}.$$

Vom prefera ultima notaţie, recurgând la paranteze sau la punct numai atunci când, în prezenţa şi altor vectori juxtapuşi, ar putea fi ambiguitate asupra vectorilor de înmulţit scalar şi ar trebui separaţi de rest.

Impărţirea scalară a unui scalar P_s printr'un vector $\bar{u}$ nu are sens, fiindcă există o infinitate de vectori $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots$, cari dau cu $\bar{u}$ acelaşi produs scalar P_s (Fig. 15).

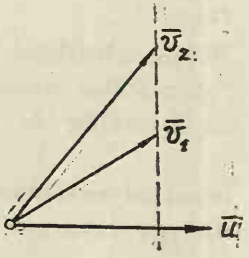


Fig. 15.

2. Produs vectorial.

Acest produs se înseamnă fie cu un semn interpus $\times$ sau $\wedge$ fie prin cârlige, care cuprind factorii. Operaţia nu este comutativă, ci avem

$$\bar{P}_v = \bar{u} \times \bar{v} = -\bar{v} \times \bar{u}$$

sau

$$\bar{P}_v = \bar{u} \wedge \bar{v} = -\bar{v} \wedge \bar{u},$$

sau

$$\bar{P}_v = [\bar{u}\,\bar{v}] = -[\bar{v}\,\bar{u}]. \qquad (3)$$

Vom prefera ultima notaţie, întrebuinţată în cărţile germane. Desvoltând produsul vectorial avem:

$$[\bar{u}\,\bar{v}] = \begin{vmatrix} \mathrm{x}, & \mathrm{y}, & \mathrm{z} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \begin{aligned} &\mathrm{x}(u_y v_z - u_z v_y) + \\ &\mathrm{y}(u_z v_x - u_x v_z) + \\ &\mathrm{z}(u_x v_y - u_y v_x) \end{aligned}$$

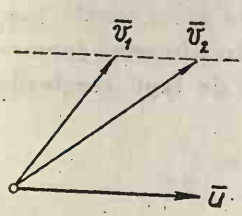


Fig. 16.

unde x, y, z sunt vectorii unitari în direcţia axelor x, y, z.

Împărţirea vectorială a unui vector $\bar{P}_v$ printr'un vector $\bar{u}$ nu are sens, fiindcă există o infinitate de vectori $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots$, cari dau cu $\bar{u}$ un acelaşi produs vectorial $\bar{P}_v$ (Fig. 16).

3. Derivată scalară a unui vector.

Prin *derivată scalară* a unui vector $\bar{v}(t)$ în raport cu scalarul t se înţelege:

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d(\mathrm{x}v_x + \mathrm{y}v_y + \mathrm{z}v_z)}{dt} = \mathrm{x}\frac{dv_x}{dt} + \mathrm{y}\frac{dv_y}{dt} + \mathrm{z}\frac{dv_z}{dt}.$$

Dacă $\bar{v} = \bar{v}(x, y, z, t)$ vom avea analog *derivata parţială* în raport cu x

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} = \mathrm{x}\frac{\partial v_x}{dx} + \mathrm{y}\frac{\partial v_y}{\partial x} + \mathrm{z}\frac{\partial v_z}{dx}.$$

4. Derivata vectorială a unui scalar.

Prin *derivată vectorială* a unui scalar $\Phi = \Phi(\bar{r})$ în raport cu $\bar{r}$ se înţelege variaţia $d\Phi$ a scalarului Φ pentru creşterea $d\bar{r}$ a lui

$\bar{r}$, împărțită cu valoarea absolută $|d\bar{r}|$ a creșterii variabilei independente vectoriale $\bar{r}$ (a se împărți chiar cu $d\bar{r}$, care este un vector, am văzut mai sus că nu are sens).

Vom putea deci scrie (știind că $|d\bar{r}| = |d\bar{s}| = ds$)

$$\frac{d\Phi}{|d\bar{r}|} = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\Phi}{\partial z}dz\right)\frac{1}{|d\bar{r}|} = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{dz}{ds} = \frac{d\Phi}{ds}$$

sau, $\bar{s}$ fiind vectorul unitar în direcția s,

$$\frac{d\Phi}{ds} = \frac{d\bar{r}}{ds}\,grad\,\Phi = \bar{s}\,grad\,\Phi.$$

5. Derivată vectorială a unui vector.

Prin derivată vectorială a unui vector $\bar{v} = \bar{v}(\bar{r})$ în raport cu $\bar{r}$ se înțelege, pentru creșterea $d\bar{r}$, variația $d\bar{v}$ a vectorului $\bar{v}$ împărțită prin $|d\bar{r}| = ds$, adică variația lui $\bar{v}$ atunci când ne deplasăm pe direcția $d\bar{r}$ cu unitatea (infinitezimal).

Expresia analitică a lui $d\bar{v}$ rezultă: *a*) fie din adunarea geometrică a componentelor dv_x, dv_y, dv_z, cari sunt de fapt creșterile unor scalari în raport cu vectorul $\bar{r}$:

$$d\bar{v} = \mathbf{x}dv_x + \mathbf{y}dv_y + \mathbf{z}\,dv_z$$

unde
$$dv_x = \frac{\partial v_x}{\partial x}dx + \frac{\partial v_x}{\partial y}dy + \frac{\partial v_x}{\partial z}dz = d\bar{r}\,grad\,v_x$$

$$dv_y = \frac{\partial v_y}{\partial x}dx + \frac{\partial v_y}{\partial y}dy + \frac{\partial v_y}{\partial z}dz \quad d\bar{r}\,grad\,v_y$$

$$dv_z = \frac{\partial v_z}{\partial x}dx + \frac{\partial v_z}{\partial y}dy + \frac{\partial v_z}{\partial z}dz = d\bar{r}\,grad\,v_z,$$

deci

$$d\bar{v} = \mathbf{x}.d\bar{r}\,grad\,v_x + \mathbf{y}.d\bar{r}\,grad\,v_y + \mathbf{z}.d\bar{r}\,grad\,v_z,$$

sau

$$\mathbf{x}(d\bar{r}\,grad\,v_x) + \mathbf{y}(d\bar{r}\,grad\,v_y) + \mathbf{z}(d\bar{r}\,grad\,v_z),$$

punctul sau paranteza servind a separa produsul scalar de factorul vectorial, evitându-se ambiguitatea; *b*) fie din adunarea geometrică a creșterilor parțiale ale lui $\bar{v}$, corespunzătoare creșterilor respective dx, dy, dz:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}dx = \mathbf{x}\frac{\partial v_x}{\partial x}dx + \mathbf{y}\frac{\partial v_y}{\partial x}dx + \mathbf{z}\frac{\partial v_z}{\partial x}dx$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}dy = \mathbf{x}\frac{\partial v_x}{\partial y}dy + \mathbf{y}\frac{\partial v_y}{\partial y}dy + \mathbf{z}\frac{\partial v_z}{\partial y}dy$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}dz = \mathbf{x}\frac{\partial v_x}{\partial z}dz + \mathbf{y}\frac{\partial v_y}{\partial z}dz + \mathbf{z}\frac{\partial v_z}{\partial z}dz,$$

deci

$$d\bar{v} = \mathbf{x}.d\bar{r}\,grad\,v_x + \mathbf{y}.d\bar{r}\,grad\,v_y + \mathbf{z}.d\bar{r}\,grad\,v_z .$$

Se convine a se scrie din punct de vedere formal, scoţând factor comun pe $d\bar{r}\,grad$,

$$d\bar{v} = (d\bar{r}\,grad)(\mathbf{x}\,v_x + \mathbf{y}\,v_y + \mathbf{z}\,\bar{v}_z) = (d\bar{r}\,grad)\,\bar{v}$$

sau

$$d\bar{v} = d\bar{r}\,grad.\bar{v} .$$

Legitimarea acestei scrieri cu paranteză sau punct se va găsi mai târziu şi pe alte căi formale.

Aşa dar, vom scrie pentru *derivata vectorială a lui* $\bar{v}$ *în raport cu* $\bar{r}$:

$$\frac{d\bar{v}}{|d\bar{r}|} = \frac{d\bar{r}}{|d\bar{r}|}grad.\bar{v} = \frac{1}{ds}d\bar{r}\,grad.\bar{v} = \bar{s}\,grad.\bar{v}$$

sau

$$\frac{1}{ds}(d\bar{r}\,grad)\,\bar{v} = (\bar{s}\,grad)\,\bar{v} = \bar{s}(grad)\bar{v}.$$

Vom prefera punctul, în locul parantezei.

Bine înţeles că $d\bar{r}\,grad$ sau $grad.\bar{v}$ sunt (simboluri) operatori, cari, izolaţi, sunt lipsiţi de sens. In special $grad.\bar{v}$ are nevoie a fi precedat de factorul unitar $\frac{d\bar{r}}{|d\bar{r}|} = \bar{s}$, spre a se şti în ce direcţie se operează, pe când $grad\,\Phi$ sau $grad\,v_x$, etc. au un înţeles intrinsec, de sine stătător.

6. Distributivitate şi produse simbolice.

Operaţiunile de mai sus sunt toate *distributive*. Distributivitatea unei operaţiuni cu un operator ψ (uneori simbolic) asupra unui scalar $A = A_1 + A_2$ sau unui vector $\bar{A} = \bar{A}_1 + \bar{A}_2$, pe

care îl precede (sau îl urmează), este definită, de ex. în cazul vectorului, prin relaţia

$$\psi\bar{A} = \psi(\bar{A}_1 + \bar{A}_2) = \psi\bar{A}_1 + \psi\bar{A}_2 ,$$

care atrage evident drept corolar şi relaţia

$$\psi(\lambda\bar{A}) = \lambda(\psi\bar{A}),$$

unde λ este un multiplicator numeric. Distributivitatea fiind un caracter comun al tuturor felurilor de înmulţire, s'a sugerat ideia de a considera drept *înmulţire simbolică* orice altă operaţie, care se bucură de această proprietate. Astfel semnele de diferenţiere sau derivare: d, $\frac{\partial}{\partial x}$, etc., întrucât ele ascultă de regula distributivităţii, se consideră drept factori simbolici, cari *înmulţesc simbolic*.

7. Gradient şi operatorul nabla.

După această regulă, însemnând cu: $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$, vectorii unitari în direcţia axelor x, y, z, *gradientul* de Φ

$$grad\,\Phi = \mathbf{x}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \mathbf{y}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \mathbf{z}\frac{\partial\Phi}{\partial z} \qquad (4)$$

se poate interpreta formal, ca fiind produsul vectorului simbolic *grad* sau $\nabla\left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right]$, numit *nabla* (uneori însemnându-se cu $\bar{D} = del$) cu scalarul Φ, după cum şi în membrul al doilea avem produsele componentelor nablei $\mathbf{x}\frac{\partial}{\partial x}, \mathbf{y}\frac{\partial}{\partial y}, \mathbf{z}\frac{\partial}{\partial z}$ deasemenea cu Φ.

8. Divergenţă şi operatorul nabla.

In aceeaşi ordine de idei putem interpreta că *divergenţa* unui vector este produsul scalar al acestuia cu acelaşi simbol vectorial $\Delta\left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right]$, adică

$$div\ \bar{v} = \nabla\bar{u} .$$

Intradevăr, cum

$$\nabla = \mathbf{x}\nabla_x + \mathbf{y}\nabla_z + \mathbf{z}\nabla_z = \mathbf{x}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{y}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{z}\frac{\partial}{\partial z},$$

BCU CLUJ CENTRALA UNIVERSITARA LIBRARY

vom avea:

$$\nabla\bar{v}=\left(\mathbf{x}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{y}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\mathbf{x}v_x+\mathbf{y}v_y+\mathbf{z}v_z\right)$$
$$=\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{dy}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=div\,\bar{v}, \tag{5.1}$$

întru cât

$$\mathbf{xx}=\mathbf{yy}=\mathbf{zz}=1 \text{ și } \mathbf{xy}=\mathbf{yz}=\mathbf{zy}=0.$$

9. Rotațional sau rotor și operatorul nabla.

In fine *rotaționalul* sau mai scurt *roforul* unui vector $\bar{v}$ se poate interpreta ca fiind produsul vectorial al acestuia cu *vectorul* ∇, adică

$$rot\,\bar{v}=[\nabla\bar{v}]. \tag{6}$$

Intradevăr avem:

$$\left[\nabla\bar{v}\right]=\left[\left(\mathbf{x}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{y}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\mathbf{x}v_x+\mathbf{y}v_y+\mathbf{z}v_z\right)\right]$$
$$=\mathbf{x}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)+\mathbf{y}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)+\mathbf{z}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right), \tag{6.1}$$

întrucât știm că:

$$[\mathbf{xx}]=[\mathbf{yy}]=[\mathbf{zz}]=0$$

și

$$[\mathbf{xy}]=\mathbf{z}\ ,\quad [\mathbf{yz}]=\mathbf{x}\ ,\quad [\mathbf{zx}]=\mathbf{y}.$$

Rezultă

$$[\nabla\bar{u}]=\mathbf{x}rot_x\,\bar{v}+\mathbf{y}rot_y\,\bar{v}+\mathbf{z}rot_z\,\bar{v}=rot\,\bar{v}.$$

Mai putem scrie sub formă de determinant:

$$rot\,\bar{v}=\begin{vmatrix}\mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{z}\\ \nabla_x & \nabla_y & \nabla_z\\ v_x & v_y & v_z\end{vmatrix}.$$

O altă formă pentru $rot\,\bar{v}$ se va obține, ținând seamă că un factor scalar simbolic, bunăoară $\frac{\partial}{\partial x}$, se poate aplica și unui *vector* $\bar{w}$, pe care deci îl putem lăsa și nedesvoltat în (6):

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$rot\,\bar{v} = [\bar{\nabla}\,\bar{v}] = \left[\left(\mathbf{x}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{y}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)\bar{v}\right]$$

$$= \left[\mathbf{x}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\right] + \left[\mathbf{y}\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\right] + \left[\mathbf{z}\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right]. \qquad (8)$$

Reamintim că derivata unui *vector* $\bar{v}$, de ex. în raport cu x, este

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} = \frac{\partial\,(\mathbf{x}v_x + \mathbf{y}v_y + \mathbf{z}v_z)}{\partial x} = \mathbf{x}\frac{\partial v_x}{\partial x} + \mathbf{y}\frac{\partial v_y}{\partial x} + \mathbf{z}\frac{\partial v_z}{\partial x}.$$

10. Câmp $\bar{v}$ potențial sau lamelar.

($div\,\bar{v} = laplacian\ de\ \Phi \equiv \Delta\Phi$).

Dacă câmpul vectorial $\bar{v}$ are potențial, adică derivă dintr'un câmp scalar $\Phi(x, y, z)$, astfel ca:

$$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\ ,\quad v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}\ ,\quad v_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \qquad (9)$$

și deci

$$\bar{v} = grad\ \Phi = \nabla\Phi;$$

câmpul se numește *lamelar*, din cauza structurii lui, reprezentată prin suprafețe echipotențiale.

In privința divergenței unui asemenea câmp vectorial, vom putea scrie

$$div\,\bar{v} = div\ grad\ \Phi = \nabla\nabla\Phi = \nabla^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = \Delta\Phi, \qquad (10)$$

unde Δ este operatorul lui *Laplace*:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

De asemenea vom putea scrie

$$rot\,\bar{v} = rot\ grad\Phi = [\nabla\nabla\Phi] = [\nabla\nabla]\,\Phi = 0. \qquad (11)$$

Ca exemplu avem câmpul de viteză al unei mișcări potențiale sau nerotaționale. Prin orice punct al câmpului trece o singură suprafață ehipotențială, $\bar{v}$ din acel punct fiind în direcția normalei $\bar{n}$ $[n_x, n_y, n_z]$.

Vom avea în proecție pe normală vectorul $\bar{v} = \overline{\frac{d\Phi}{dn}}$ (în mărime naturală):

$$\bar{v}\,\bar{n} = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{dx}{dn} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{dy}{dn} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{dz}{dn} = \frac{d\Phi}{dn}$$

$$= n_x\, grad_x\,\Phi + n_y\, grad_y\,\Phi + n_z\, grad_z\,\Phi = \bar{n}\, grad\,\Phi\,,$$

după cum și în proecție pe o direcție oarecare (vector unitar).

$$\frac{d\bar{r}}{|d\bar{r}|} = \frac{d\bar{s}}{ds} = \frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{s}\,,$$

unde $\bar{r}$ este raza vectoare a punctului (x, y, z), avem

$$\bar{v}\,\bar{s} = \bar{v}\frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{v}\frac{d\bar{s}}{ds} = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{dz}{ds} = \frac{d\Phi}{ds}$$

și deci

$$\bar{v}\,\bar{s} = \bar{v}\,d\bar{r} = d\bar{r}\, grad\,\Phi = d\Phi\,, \qquad (12)$$

care reprezintă elementul de circulație al vectorului sau creșterea integralei de linie, atunci când la extremitatea liniei se adaugă elementul $d\bar{r}$ $[dx, dy, dz]$.

Am întrebuințat notația $\frac{d\Phi}{dn}$ și $\frac{d\Phi}{ds}$ a derivatelor totale (în raport cu x, y, z), deși am putea scrie și $\frac{\partial\Phi}{\partial n}$ și $\frac{\partial\Phi}{\partial s}$ în cazul general, când Φ este funcție și de timp.

Câmpul lamelar fiind nerotațional, adică având:

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{dx}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial z}$$

diferențiala de linie $\bar{v}\,d\bar{r}$ este o diferențială exactă.

La un asemenea câmp (de viteză sau orice alt vector):

1) Circulația după orice contur reductibil este nulă;

2) Integrala de linie după o linie deschisă AB nu depinde decât de extremitățile A și B, două linii ce le unesc dând aceeași valoare, cu condiția de a fi mutual transpozabile fără a ieși din spațiu (adică de a da împreună un contur reductibil).

În cazul când:

$$\bar{v}\,d\bar{r} = v_x\,dx + v_y\,dy + v_z\,dz$$

nu este o diferențială exactă, deci câmpul nu este potențial adică lamelar, fiind deci rotațional, se poate uneori pune întrebarea: *cari sunt condițiile pentru cd să existe un factor integrant* $f(x, y, z)$?

Dacă există un asemenea factor, trebue să avem prin definiție condițiile:

$$\frac{\partial(fv_z)}{\partial y}=\frac{\partial(fv_y)}{\partial z}$$

$$\frac{\partial(fv_x)}{\partial z}=\frac{\partial(fv_z)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial(fv_y)}{\partial x}=\frac{\partial(fv_x)}{\partial y}$$

sau

$$f\cdot\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)=-v_z\frac{\partial f}{\partial y}+v_y\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$f\cdot\left(\frac{\partial n_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)=-v_x\frac{\partial f}{\partial z}+v_z\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$f\cdot\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)=-v_y\frac{\partial f}{\partial x}+v_x\frac{\partial f}{\partial y}$$

(s'a pus punct după f spre a se indica că f este o funcție independentă, iar nu simbolul unei funcții cu argumentul din paranteză).

Împărțind cu f și înmulțind respectiv cu v_x, v_y, v_z, factorul integrant se elimină, obținându-se următoarea condiție necesară (care este și suficientă)

$$v_x\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)+v_y\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)+v_z\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)=\bar{v}\,rot\,\bar{v}=0. \quad (13)$$

Această relație este satisfăcută nu numai în cazul tratat al câmpului lamelar (adică potențial) când $rot\,v=0$, ci și în cazul când $\bar{v}$ și $rot\,\bar{v}$ sunt ortogonale.

11. Câmp $\bar{v}$ solenoidal adică cu divergența nulă.

Dacă avem un câmp cu divergența identic nulă, teorema lui *Gauss*, în lipsă de surse (ex.: scurgere de fluid incompresibil fără surse) ne dă pentru un volum arbitrar τ mărginit de suprafața σ,

$$\int_{\tau} div\, \bar{v}\, d\tau \equiv \oint_{\sigma} \bar{v}\, \overline{d\sigma} = 0 \,. \qquad (14)$$

Așa dar:

1) Fluxul unui vector solenoidal prin o suprafață *închisă* oarecare este nul, dacă, bine înțeles, spațiul în care este definit câmpul este fără goluri (aperifractic), adică este cu *conexiune superficială simplă*, în sensul că orice suprafață interioară se poate reduce la 0 prin o deformație continuă fără a eși din acel spațiu. Torul, deși este *liniar* dublu conex, adică are o conexiune liniară dublă, este aperifractic, adică are conexiune superficială simplă. In caz de goluri sau frontiere interioare, propoziția rămâne valabilă, dacă se consideră totalitatea suprafețelor limitative ale volumului conex, adică și fluxul prin frontierele interioare.

2) Fluxul unui vector solenoidal prin orice suprafață *deschisă*, mărginită de un contur dat, este același, adică independent de suprafață, în cazul când oricare din ele este *transpozabilă* în alta prin deformațiuni continue fără a eși din spațiu, cu alte cuvinte spațiul dintre ele este aperifractic, adică cu conexiune superficială simplă. Intradevăr, două oarecari asemenea suprafețe formează o suprafață închisă, trebuind a inversa numai sensul normalei la una din ele pentru a reduce cazul la 1), în care caz fluxul prin ansamblu este nul; dacă nu se face inversarea de sens menționată, cele două fluxuri sunt egale.

Rezultă că fluxul prin o suprafață deschisă depinde numai de contur.

12. Conexiuni multiple.

In aplicațiuni conexiunea multiplă apare adeseori prin încetarea continuității componentelor vectorului $\bar{v}$ sau a derivatelor lui:

a) în puncte izolate (conexiune *superficială* multiplă);

b) pe linii (conexiune *liniară* multiplă).

13. Potențial-vector $\bar{w}$ al unui câmp solenoidal $\bar{v}$.

La un câmp solenoidal (proprietatea 2) § 11 ne conduce la cercetarea posibilității de a exprima fluxul străbătând o suprafață deschisă, prin o integrală de linie (conf. teoremei lui *Stokes*) a unui alt vector numit *potențial vector* al primului.

Se poate stabili întradevăr că un vector solenoidal este totdeauna rotorul unui alt vector $w(x, y, z)$, satisfăcând deci relațiile:

$$v_x = \frac{\partial w_z}{\partial y} - \frac{\partial w_y}{\partial z}$$

$$v_y = \frac{\partial w_x}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial x} \qquad (15)$$

$$v_z = \frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y}.$$

Pentru a găsi o soluție particulară a lui w, punem

$$w_z = 0, \qquad (15.1)$$

în care caz ultimele două relații (15) dau

$$w_y = -\int_{z_0}^{z} v_x(x, y, z)\, dz + f(x, y)$$

$$w_x = -\int_{z_0}^{z} v_y(x, y, z)\, dz + g(x, y), \qquad (16)$$

$f(x, y)$ și $g(x, y)$ fiind două funcțiuni arbitrare. Inlocuind aceste valori în prima relație (15), obținem:

$$v_z(x, y, z) = -\int_{z_0}^{z} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) dz + f'_z - g'_y$$

și cum $div\, v = 0$,

$$v_z(x, y, z) = \int_{z_0}^{z} \frac{\partial v_z}{\partial z} dz + f'_x - g'_y = v_z(x,y,z) - v_z(x,y,z_0) + f'_x - g'_y.$$

Cum astfel variabila z odată cu $v_z(x, y, z)$ se găsește eliminată, aceste relații se pot satisface prin o alegere potrivită a funcțiunilor arbitrare $f(x, y)$ și $g(x, y)$, luând de exemplu pe cea de a doua egală cu zero, ceeace ne va da

$$v_x(x, y, z_0) = f'_x$$

$$\int_{x_0}^{x} v_x(x, y, z_0)\, dx = f(x, y). \qquad (17)$$

Introducând această valoare a lui $f(x, y)$ și valoarea, aleasă nulă, a lui $g(x, y)$, avem astfel o soluție particulară a ecuațiilor (15), care convine lui $w_z = 0$, putând adăoga respectiv acestor valori: w_x, w_y, după (16), și $w_z = 0$, derivatele $\frac{\partial \theta}{\partial x}$, $\frac{\partial \theta}{\partial y}$, $\frac{\partial \theta}{\partial z}$ ale unei funcțiuni arbitrare $\theta(x, y, z)$, deoarece știm că rotorul gra-

dientului ori cărei funcții θ, ce se adaogă astfel lui $\overline{v}$, este nul și deci nu schimbă rezultatul. Așa dar, câmpul potențialului-vector al lui $\overline{v}$ este determinat numai cu aproximația unui gradient de funcție arbitrară $\theta(x, y, z)$.

Potențialul vector al unui câmp solenoidal corespunde cu *potențialul scalar* al unui câmp lamelar, după cum există corespondență și între proprietățile 1) și 2), arătate mai sus, cu enunțuri adecuate fiecăruia din aceste două feluri de câmpuri. După cum un câmp lamelar are un *potențial* (scalar), tot astfel un câmp solenoidal are un *potențial vector*.

14. Câmp $\overline{v}$ simultan lamelar și solenoidal.

Câmpul, fiind lamelar, comportă un potențial scalar $\varphi = -\Phi$ și, fiind solenoidal, comportă un potențial vector $\overline{w}$. Vom stabili legătura dintre Φ și $\overline{w}$, constatând mai întâiu că:

$$div\,\overline{v} = div\,grad\,\Phi \equiv \Delta\Phi = 0$$

Relațiile următoare sunt evidente, ultima rezultând din desvoltarea triplului produs geometric:

$$div\,\overline{v} = div\,rot\,\overline{w} \equiv \nabla[\nabla\overline{w}] \equiv [\nabla\nabla]\overline{w} = 0$$

$$rot\,\overline{v} = rot\,rot\,\overline{w} \equiv [\nabla[\nabla\overline{w}]] \equiv \nabla(\nabla\overline{w}) - \nabla^2\overline{w} \equiv grad\,div\,\overline{w} - \Delta\overline{w}.$$

prin natura chiar a câmpului solenoidal.

Legătura în chestiune între Φ și $\overline{w}$, care se referă la același $\overline{v}$, este:

$$\overline{v} = grad\,\Phi = rot\,\overline{w},$$

adică

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial x} &= \frac{\partial w_z}{\partial y} - \frac{\partial w_y}{\partial z} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y} &= \frac{\partial w_x}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial x} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial z} &= \frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y}. \end{aligned} \qquad (19)$$

Am văzut că potențialul vector $\overline{w}$ nu este definit, decât cu aproximația unui gradient de funcție arbitrară $\theta(x, y, z)$. Putem

deci profita de această nederminare pentru a anula $div\,\overline{w}$ din prima soluție, găsită pentru $\overline{w}$ în ipoteza $w_z = 0$, adică pentru a găsi o soluție cu $div\,\overline{w} = 0$.

Intradevăr, dacă $div\,\overline{w}$ al primei soluții nu este întâmplător nul, se va putea scădea din $\overline{w}$ gradientul unei funcțiuni θ aleasă astfel ca

$$div\,grad\,\theta \equiv \Delta\theta = div\,\overline{w}, \qquad (20)$$

făcând în modul acesta să dispară $div\,\overline{w}$ în noua soluție a lui $\overline{w}$, care, în locul condiției $w_z = 0$, va satisface acum condiția $div\,\overline{w} = 0$.

Putem găsi ușor o soluție pentru θ în felul următor:

Ecuația de continuitate a unui fluid incompresibil care, în lipsă de surse, exprimă că divergența vitesei este nulă, în prezența unei distribuțiuni de surse cu debit volumic $q(x, y, z)$ în punctul (x, y, z) (se poate ușor verifica, după cum de altfel vom vedea și mai departe, că câmpul de vitesă al unei surse punctuale și deci al oricărui sistem de surse este potențial) exprimă că această divergență este în orice punct egală cu $q(x, y, z)$. Putem imagina atunci o distribuție de surse, astfel ca să avem în fiecare punct

$$q = div\,\overline{w} \qquad (21)$$

($div\,\overline{w}$ din prima soluție cu $w_z = 0$) și al cărei câmp de vitesă, cu toate că comportă aceași divergență (egală cu q) ca și câmpul $\overline{w}$ al primei soluții, poate diferi de $\overline{w}$ cu orice funcție vectorială solenoidală, căci o asemenea funcție are prin definiție divergența nulă.

Așa dar, distribuția de surse în chestiune, a cărei funcție de vitesă fie θ, va fi

$$q = div\,grad\,\theta\,. \qquad (21.1)$$

Funcția θ din această relație, ținând seama de (21), satisface ecuația (20), astfel că distribuția de surse propusă ne procură prin funcția ei de vitesă o soluție, care ne va da câmpul $\overline{w}$ căutat (cu $div\,\overline{w} = 0$). Acest câmp $\overline{w}$ va fi deci solenoidal ca și $\overline{v}$, fără a fi însă simultan și lamelar, fiindcă rotorul său este $\overline{v} \neq 0$. Câmpul potențialului vector astfel ales (cu $div\,\overline{w} = 0$) va satisface, în afară de relațiile (19), și relația $div\,\overline{w} = 0$:

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0. \qquad (21,2)$$

Prin combinațiuni simple se constată că cele trei funcțiuni w_x, w_y, w_z sunt, ca și Φ, armonice.

Așa dar, un câmp $\bar{v}$ simultan solenoidal și lamelar, poate fi definit printr'un grup de patru funcțiuni Φ, w_x, w_y, w_z, care verifică relațiile (19) și (21.2), $-\Phi$ fiind potențialul scalar al lui $\bar{v}$ iar $\bar{w}$ potențialul vector al lui $\bar{v}$.

Relațile (19) și (21,2) prezintă o arecare simetrie în raport cu cele patru funcții, forma lor rămânând invariantă, dacă în ele înlocuim:

$$\Phi, \quad w_x, \quad w_y, \quad w_z,$$

prin

$$w_x, \quad -\Phi, \quad w_z, \quad w_y,$$

sau prin

$$w_y, \quad -w_z, \quad -\Phi, \quad w_x,$$

sau, înfine, prin

$$w_z, \quad w_y, \quad -w_x, \quad -\Phi.$$

Rezultă că cele patru funcțiuni definesc patru câmpuri distincte, simultan lamelare și solenoidale.

15. Câmpuri plane.

Se numește astfel un câmp, la care vectorul său este paralel cu un plan dat, zis *director*, și în care la toate punctele ale unei perpendiculare pe planul director, vectorul în chestiune este echipolent.

Luând numitul plan drept plan de referință, *vectorul* $\bar{v}$ al câmpului va avea componenta sa v_z nulă, v_x și v_y fiind independente de z.

Pentru studiul unui asemenea câmp putem să ne limităm la planul xOy (deobicei la o parte mărginită a planului).

Vom avea pentru divergență forma redusă

$$div\,\bar{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}$$

iar pentru rotor

$$rot_x\,\bar{v} = 0, \quad rot_y\,\bar{v} = 0, \quad rot_z\,\bar{v} = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y},$$

mereu normal pe planul xOy și complet definit prin expresia scalară a lui $rot_z \bar{v}$.

Formula lui *Stokes*, apicată la o arie σ din planul xOy, limitată de conturul s, dă:

$$\oint^s v_x\,dx + v_y\,dy = \int^\sigma \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) d\sigma, \qquad (22)$$

care constitue una din formulele lui *Green*.

Să aplicăm acum teorema lui *Gauss* la un câmp plan. La un asemenea câmp se consideră spațiul dintre două planuri paralele cu planul director la distanța *1* între ele și deci singurul flux care intră în considerație este acela prin o suprafață cilindrică, perpendiculară pe acest plan, și care se reduce la un flux prin conturul din planul director, având drept element pe $d\bar{s}$ [dx, dy] și fiind prin definiție

$$\bar{v}\,\bar{n}\,ds = (n_x\,v_x + n_y\,v_y)\,d\sigma,$$

unde $\bar{n}[n_x, n_y]$ este vectorul unitar normal înspre exterior al elementului considerat din planul xOy. După teorema lui *Gauss* fluxul prin conturul s ce limitează aria σ (ținând seama că frontierele plane paralele cu planul director nu intervin), se transformă într'o integrală de suprafață, în care figurează divergența din spațiul menționat

$$\oint^s (n_x\,v_x + n_y\,v_y)\,ds = \oint \bar{v}\,\bar{n}\,ds = \int^\sigma \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) d\sigma. \qquad (23)$$

Așa dar, din cauză că în sens perpendicular pe plan s'a luat dimensiunea 1, nu numai teorema lui *Stokes*, dar și aceia a lui *Gauss* transformă o integrală de linie într'una de suprafață și vice-versa, formulele respective (20) și (23) în problema plană fiind de fapt echivalente.

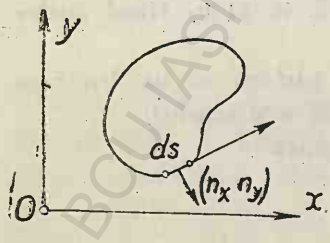


Fig. 17

Intradevăr, din vectorul unitar $\bar{n}$ al normalei (cu componetele n_x și n_y) obținem vectorul unitar pe direcția $d\bar{s}$ (cu componentele $\frac{dx}{ds}$ și $\frac{dy}{ds}$) prin învârtire cu 90^0 în sensul trigonometric. Dacă scriem pe $\bar{n}$ sub forma complexă

$$n_x + i\,n_y$$

și înmulțim cu i (pentru învârtirea în sensul trigonometric cu $\frac{\pi}{2}$), obținem în $in_x - n_y$ vectorul al doilea $\frac{d\bar{s}}{ds}$ cu componentele $\frac{dx}{ds}$ și $\frac{dy}{ds}$, cari constituesc partea reală și factorul lui i din produs. Rezultă $\frac{dx}{ds} = -n_y$ și $\frac{dy}{ds} = n_x$. Schimbând în (22) și pe v_x și v_y prin $-v_y$ și v_x respectiv, v_x și v_y putând fi funcțiuni arbitrare, obținem pe (23).

Câmpul *solenoidal* $\bar{v}$ satisface identic relația

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \qquad (24)$$

ceea ce atrage existența unei funcțiuni ψ, ale cărei derivate sunt

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Această funcție nu este altceva decât funcțiunea w_z, deci ψ definește în întregime potențialul vector $\bar{w}$ al lui $\bar{v}$, căci

$$w_x = w_y = 0.$$

Proprietățile 1) și 2), relative la circulația unui câmp $\bar{v}$ lamelar, se aplică și în plan.

In ceea ce privește teorema lui *Gauss*, în cazul câmpului solenoidal, fluxul prin o *curbă* (în loc de suprafață) *închisă* este nul, iar cel prin o *curbă deschisă* nu depinde decât de extremitățile curbei (în loc de conturul suprafeței deschise), cu aceleași restricții cu privire la conexitatea *suprafeței* (în locul volumului) de definiție a câmpului.

Se vede imediat că, în plan, cele două feluri de conexiuni *liniară și superficială* se confundă, o arie simplu conexă (conexiune liniară simplă) fiind și aperifractică (cu suprafețele cilindrice normale pe planul director, reprezintate prin urmele lor pe planul xOy), adică având conexiune superficială simplă.

O arie σ închisă într'un contur (fără puncte duble) este simplu conexă. Dacă i se scoate n arii interioare, deasemenea simplu conexe și fără părți comune, rezultând tot atâtea lacune, obținem o arie multiplu conexă, de gradul n de conexitate.

Dacă câmpul plan este în același timp *solenoidal* și *lamelar*,

vectorul câmpului poate fi definit plecând dela una sau dela alta din cele două funcţii Φ şi $w_z = \psi$. Vom avea întradevăr

$$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{şi} \quad v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

caz particular al sistemului (19) şi (20), arătând că Φ şi ψ sunt funcţii armonice cu două variabile:

$$\Delta \Phi = 0 \quad , \quad \Delta \psi = 0.$$

Două funcţii armonice Φ şi ψ, legate prin relaţiile de mai sus, se numesc *asociate* sau *conjugate*. Asemenea perechi de funcţii formează baza teoriei funcţiunilor analitice de variabilă complexă, pe care o vom aplica mai departe la studiul curenţilor plani. Sistemul (19) şi (20) permite generalizarea noţiunii funcţiunilor armonice conjugate, dela 2 la 3 variabile (*Volterra* a extins-o la orice număr de variabile).

15. Câmpuri tensoriale şi operator tensorial.

In afară de câmpurile scalare şi vectoriale în trei dimensiuni şi în două dimensiuni plane, la care în fiecare punct (x, y, z) avem o singură mărime fizică, fie de natură scalară (Φ) fie de natură vectorială $(\bar{v})$, şi care comportă deci funcţiuni *uniforme* de spaţiu (eventual şi de timp), sunt probleme unde în fiecare punct, adică local, mărimea fizică respectivă are o infinitate de valori, depinzând de direcţia la care ne referim.

Astfel, la un mediu material *tensionat* avem de considerat într'un punct efortul $\bar{f}$ pe unitatea de suprafaţă (rezultanta lui $\bar{\sigma}$ normal şi $\bar{\tau}$ tangenţial), care depinde de orientarea faţetei pe care se exercită, orientare definită de normala $\bar{n}$ (vector unitar) a faţetei. Exact aceeaşi problemă se prezintă şi la fluidele viscoase cu privire la eforturile de viscozitate, care ar putea fi reprezentate prin aceleaşi litere $\bar{f} = \bar{\sigma} + \bar{\tau}$, dacă prin aceasta nu se dă loc la confuzie. Un asemenea câmp, în care o mărime fizică vectorială, ca în exemplul materiei tensionate (dela care derivă şi numele de *tensor*) comportă în *acelaşi punct* o infinitate de valori, în corespondenţă sau depinzând de un vector unitar sau o direcţie, aci $\bar{n}$, în alte cazuri $\bar{s} = \frac{\overline{ds}}{|\overline{ds}|}$ (vectorul $\bar{n}$ definând o faţetă perpendiculară

pe $\bar{n}$, vectorul $\bar{s}$ definind direcţia însăşi ce interesează) se numeşte câmp *fensorial,* iar operatorul care simbolizează operaţiile ce trebuesc făcute asupra acestui din urmă vector independent, spre a găsi vectorul corespunzător al câmpului tensorial, se numeşte *tensor.* Uneori se obişnueşte a se vorbi de *mărimi fensoriale,* cum ar fi eforturile menţionate mai sus, dar prin această denumire nu se înţelege o mărime fizică de natură deosebită, ci tot mărimi fizice de natură vectorială, care însă într'un punct primesc o infinitate de valori după vectorul de orientare ($\bar{n}$ sau $\bar{s}$), ansamblul lor formând un *câmp tensorial.*

Orice câmp scalar sau vectorial comportă un câmp *derivat,* cu elemente cari ne informează asupra *variaţiei* câmpului primitiv în diferitele direcţiuni $\bar{s} = \frac{\bar{dr}}{|\bar{dr}|}$, atunci când ne deplasăm infinitesimal în acele direcţiuni. Derivatele vectoriale definite mai sus ne dau aceste variaţii raportate la unitatea de deplasare în diferitele direcţii. Derivata vectorială a unui câmp vectorial fiind tot un vector, infinitatea acestor vectori în jurul unui punct formează analog un ansamblu tensorial. Aceşti vectori reprezintă tot mărimi fizice, mărimi informative asupra variaţiei câmpului primitiv dat. Dacă în loc de a raporta aceste variaţii (care caracterizează repartiţia câmpului) la unitatea de deplasare, se consideră variaţiile pentru însăşi deplasarea $\bar{dr} = \bar{ds}$, vom avea o infinitate de mărimi fizice $d\Phi$ sau $\bar{dv}$ în jurul oricărui punct, cantităţi evident proporţionale cu $|dr| = ds$ ca primă aproximaţie (coeficientul de proporţionalitate fiind derivata vectorială menţionată, constituită din derivatele *spaţiale* de ordinul întâiu ale câmpului primitiv).

Dacă acest câmp este scalar Φ, cunaşterea vectorului *grad* $\Phi \left[\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \frac{\partial\Phi}{\partial z}\right]$ este de ajuns pentru a ne da pe $d\Phi$, căci după (12)

$$d\Phi = grad\,\Phi\ \bar{dr} = \bar{dr}\,grad\,\Phi, \text{ după cum şi } \frac{d\Phi}{|\bar{ds}|} = \bar{s}\,grad\,\Phi,$$

astfel că un vector sau trei scalari, anume componentele lui *grad* Φ după trei axe arbitrare, sunt necesare şi suficiente pentru cunoaşterea *repartiţiei* câmpului scalar în domeniul infinit mic al unui punct (x, y, z). Se poate spune că *grad* Φ este un operator care

operează pe $d\bar{r}$ sau pe $\bar{s}$ prin înmulțire scalară (operație comutativă), pentru a ne da pe $d\Phi$, respectiv pe $\frac{d\Phi}{|\overline{ds}|} = \frac{d\Phi}{|\overline{dr}|}$.

Dacă însă câmpul dat este vectorial $\bar{v}$, pentru a găsi pe $d\bar{v}[dv_x, dv_y, dv_z]$ este nevoie a cunoaște în fiecare punct trei gradienți sau nouă componente (cele 9 derivate parțiale), căci

$$\left.\begin{aligned} dv_x &= grad\, v_x\, d\bar{r} = \frac{\partial v_x}{\partial x}dx + \frac{\partial v_x}{\partial y}dy + \frac{\partial v_x}{\partial z}dz \\ dv_y &= grad\, v_y\, d\bar{r} = \frac{\partial v_y}{\partial x}dx + \frac{\partial v_y}{\partial y}dy + \frac{\partial v_y}{\partial z}dz \\ dv_z &= grad\, v_z\, dr = \frac{\partial v_z}{\partial x}dx + \frac{\partial v_z}{\partial x}dy + \frac{\partial v_z}{\partial z}dz \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

și deci

$$d\bar{v} = \mathbf{x}.\, grad\, v_x\, d\bar{r} + \mathbf{y}.\, grad\, v_y\, d\bar{r} + \mathbf{z}.\, grad\, d_z\, d\bar{r}, \quad (25.1)$$

respectiv

$$\frac{d\bar{v}}{|\overline{ds}|} = \mathbf{x}.\, grad\, v_x\, \bar{s} + \mathbf{y}.\, grad\, v_y\, \bar{s} + z.\, grad\, v_z\, \bar{s}, \quad (25.1.1).$$

căci

$$\frac{d\bar{r}}{|\overline{ds}|} = \bar{s}.$$

Ansamblul acestor trei vectori sau al celor 9 componente și operațiunile necesare pentru a ajunge dela $d\bar{r}[dx, dy, dz]$ la $d\bar{v}[dv_x, dv_y, dv_z]$, sau dela vectorul unitar $\frac{d\bar{r}}{|\overline{dr}|}$ la derivata vectorială $\frac{d\bar{v}}{|\overline{dr}|}$, (analog după cum în cazul materiei tensionate vectorului unitar $\bar{n}$ îi corespunde un vector $\bar{f}$, la care se ajunge prin o operație adecuată), constitue un *operator tensorial* $\mathcal{T}$, întrucât prin numitele operații se obține pentru orice vector $\bar{s} = \frac{d\bar{r}}{|\overline{dr}|}$ din jurul punctului (x, y, z) vectorul corespunzător $\frac{d\bar{v}}{|\overline{dr}|}$, prin urmare cunoașterea câmpului tensorial $\frac{d\bar{v}}{|\overline{dr}|}$, sau pentru $d\bar{r}$, ansamblul vectorilor $d\bar{v}$ în domeniul fiecărui punct (x, y, z).

Se poate spune că tensorul acesta operează transformarea vectorului $\bar{dr}$ în vectorul $\bar{dv}$ (sau a vectorului de direcție $\bar{s} = \frac{\bar{dr}}{|\bar{dr}|}$ în vectorul $\frac{\bar{dv}}{|\bar{dr}|}$). Operatorul acesta $\mathcal{T}$ care, dacă s'ar scoate $\bar{dr}$ sau $\bar{s}$ formal factor comun și s'ar scrie (25.1) sau (25.1.1)

$$\bar{dv} = \mathcal{T}\,\bar{dr} \quad \text{respectiv} \quad \frac{\bar{dv}}{|\bar{ds}|} = \mathcal{T}\bar{s},$$

ar fi simbolul

$$\mathcal{T} = \mathbf{x}.\,grad\,v_x + \mathbf{y}.\,grad\,v_y + \mathbf{z}.\,grad\,v_z\,, \qquad (25.1.2)$$

poate fi reprezentat, ca simbol detaliat, prin matricea *componentelor* lui, scriind:

$$\mathcal{T} = \begin{Vmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{Vmatrix},$$

deoarece operațiunile însăși ce trebuesc făcute după (25) asupra componentelelor vectorului de operat $|\bar{dr}|$ pentru a obține pe $\bar{dv}$, sau asupra lui $\bar{s}$ pentru a obține pe $\frac{\bar{dv}}{|\bar{ds}|}$, sunt subînțelese și aceleași pentru orice operator similar.

Tot astfel și la exemplul menționat mai sus al materiei tensionate există un tensor $\mathcal{T}$ operator, care comportă o matrice analoagă de 9 componente, și, fără ca aceste componente să reprezinte derivate, presupune operațiuni precise de efectuat cu ele asupra vectorului de direcție $\bar{n}$ [$n_x = cos\,(\bar{n}, x)$, $n_y = cos\,(\bar{n}, y)$, $n_z = cos\,(\bar{n}, z)$]. Menționăm de pe acum că, din cauza simetriei pe care o prezintă această problemă mecanică, matricea corespunzătoare $\mathcal{T}$ este *simetrică*, cuprinzând numai 6 componente distincte. Așa dar, tensorul care operează transformarea vectorului de direcție $\bar{n}$ în vectorul $\bar{f}$, adică ne procură în orice punct efortul $\bar{f}$ corespunzător fiecărei orientări $\bar{n}$ a fațetei, are numai 6 componente distincte.

Transformarea în chestiune se poate exprima prin înmulţirea simbolică a operatorului cu vectorul de operat:

$$d\bar{v} = \mathcal{T} d\bar{r} \quad \text{sau} \quad \frac{d\bar{v}}{|d\bar{r}|} = \mathcal{T} \frac{d\bar{r}}{|d\bar{r}|} = \mathcal{T} \bar{s}$$

respectiv

$$\bar{f} = \mathcal{F} \bar{n}.$$

Pentru motive formale ce vom discuta mai departe *), deşi aci este vorba de o operaţie simbolică, deci de pură convenţie, este util a nu considera această înmulţire drept comutativă, adică ca indiferent de a pune operatorul înainte sau în urma vectorului. Intradevăr, vom vedea că tensorul poate fi privit ca o generalizare a unui operator mai simplu numit *diadă*, care se compune din doi vectori numai, şi care, dacă în loc de a precede urmează vectorului de operat, conduce la rezultat diferit. Această înrudire a simbolului tensorial cu diada permite extinderea şi asupra tensorului a avantajului diadei anume ca, fiind alăturată vectorului, exprimă operaţiuni curente obişnuite, deci poate fi interpretată mai concret, adică cu caracter mai puţin simbolic (sau cu mai puţine operaţiuni subînţelese).

16. Operator diadic sau produs diadic sau diadă.

Operatorul *diadic* este un *operator distributiv* (nu însă şi comutativ), numit şi *produs diadic* sau simplu *diadă*, deoarece se compune din 2 vectori (unul putând fi şi nabla ∇).

Fie $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ vectorii (funcţii sau nu de x, y, z), notaţi alături într'o anumită ordine şi cari compun diada operatoare, iar $\bar{u}$ vectorul arbitrar de operat, luat ca variabilă independentă (în exemplele de mai sus $\bar{s}$ sau $\bar{n}$).

Primul vector al diadei se numeşte *antecedent* iar al doilea *consecvent*. Vectorul $\bar{u}$ putând fi aşezat fie în urma consecventului fie înaintea antecedentului, putem avea următoarele 4 permutări:

---

*) dar cari şi aci apar imediat din definiţia simbolului

$$\mathcal{T} = \mathbf{x}.\, grad\, v_x + \mathbf{y}.\, grad\, v_y + \mathbf{z}.\, grad\, v_z\,,$$

care dacă ar fi precedat de $d\bar{r}$ sau de $\bar{s}$, s'ar schimba complect înţelesul operaţiilor.

$$\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{u} \quad , \quad \overline{u}\,\overline{a}\,\overline{b},$$
$$\overline{b}\,\overline{a}\,\overline{u} \quad , \quad \overline{u}\,\overline{b}\,\overline{a}.$$

Dacă voim a forma produsul scalar a 2 vectori alăturați pentru a multiplica cu el pe al treilea, putem avea 8 moduri de scriere, care însă exprimă numai 3 cantități vectoriale distincte:

$$(\overline{a}\,\overline{b})\,\overline{u} \equiv (\overline{b}\,\overline{a})\,\overline{u} \equiv \overline{u}\,(\overline{a}\,\overline{b}) \equiv \overline{u}\,(\overline{b}\,\overline{a}), \qquad (26)$$
$$\overline{a}\,(\overline{b}\,\overline{u}) \equiv (\overline{u}\,\overline{b})\,\overline{a} = \overline{w}, \qquad (26.1)$$
$$\overline{b}\,(\overline{a}\,\overline{u}) \equiv (\overline{u}\,\overline{a})\,\overline{b} = w_c. \qquad (26.2)$$

Din aceste trei grupări distincte numai ultimele două conțin un operator nou, în $\overline{a}$ și $\overline{b}$, asupra lui $\overline{u}$, căci produsul scalar $\overline{a}\,\overline{b}$ sau $\overline{b}\,\overline{a}$ ne era cunoscut. In ultimele două grupări $\overline{u}$ este alipit fie în urma consecventului fie înaintea antecedentului, pentru a se înmulți cu el scalar furnizând un multiplicator pentru cel de al doilea vector, spre a-l transforma într'un alt vector $\overline{w}$, respectiv $\overline{w_c}$. In loc de paranteză, care are de scop a separa produsul scalar a 2 vectori de al treilea, *Gibbs* și *Wilson* au întrebuințat semnul; iar alții un simplu spațiu mai mare, rezervând paranteza pentru a închide în ea expresiuni supuse eventual unei alte operațiuni.

Vom întrebuința în locul acestor notațiuni un punct simplu, notație pe care n'am folosit-o până acum în alt scop. Ultimele două cantități vectoriale (26.1) și (26.2) se vor scrie, așa dar,

$$\overline{w} = \overline{a}\,.\,\overline{b}\,\overline{u} = \overline{u}\,\overline{b}\,.\,\overline{a} \qquad (26.1.1)$$
$$\overline{w_c} = \overline{b}\,.\,\overline{a}\,\overline{u} = \overline{u}\,\overline{a}\,.\,\overline{b}. \qquad (26.2.1)$$

La aceste cantități apar drept operatori ai lui $\overline{u}$, pentru a neda vectorii $\overline{w}$ și $\overline{w_c}$, diadele $D = \overline{a}\,.\,\overline{b}$ și $D_c = \overline{b}\,.\,\overline{a}$, cari ne permit a scrie simplificat

$$\overline{w} = D\overline{u} = \overline{u}D_c \quad \text{și} \quad \overline{w_c} = D_c\,\overline{u} = \overline{u}D.$$

In felul acesta se introduce un nou simbol, care poate opera și la stânga, însă cu resultate în general diferite.

Punctul, ce separă cei doi vectori constitutivi $\overline{a}$ și $\overline{b}$, este aci caracteristic acestui produs simbolic, care este un operator, ce nu trebue confundat nici cu un produs scalar nici cu unul vectorial, pentru care avem convenite alte notații. D_c se obține

din D prin *comutație*, indicată prin indicele c și care evident schimbă efectul operației, conducând în general la rezultat diferit $\overline{w}_c \neq \overline{w}$. Bine înțeles prin o nouă comutație se reproduce D:

$$D_{cc} = D. \tag{27}$$

Operatorii înrudiți D și D_c, cari pentru motivele ce vom vedea se mai numesc și *conjugați*, sunt așa dar simple simboluri, neavând, dacă sunt izolați, nici un sens, ca și *nabla*. Ei capătă un sens precis numai prin alipirea vectorului de operat $\overline{u}$, fie la antecedent fie la consecvent, cu rezultate în general diferite, fiindcă de ex. primul membru din (26.1) înseamnă vectorul $\overline{a}$ multiplicat cu scalarul $\overline{b}\,\overline{u}$, pe când primul membru din (26.2) înseamnă vectorul $\overline{b}$ multiplicat cu scalarul $\overline{a}\,\overline{u}$. Așa dar, nici operatorul, compus din doi vectori într'o anumită ordine, nu este comutativ pentru aceeași poziție a vectorului de operat, nici înmulțirea simbolică între acesta și operator nu este comutativă. Dacă însă se intervertesc vectorii operatorului și totodată se schimbă și poziția lui u, rezultatul rămâne același. Operația efectuată de *diadă* asupra lui $\overline{u}$ este în orice caz *distributivă*, constatându-se ușor că, dacă de ex. $\overline{u} = \overline{u}_1 + \overline{u}_2$, vom avea $D\overline{u} = D\overline{u}_1 + D\overline{u}_2$ și de asemenea operatorul însuși este distributiv adică, dacă de ex. $\overline{a} = \overline{a}_1 + \overline{a}_2$, vom avea

$$D = \overline{a}\,.\,\overline{b} = \overline{a}_1.\,\overline{b} + \overline{a}_2.\,\overline{b} \qquad \text{etc.},$$

căci

$$D\overline{u} = \overline{a}\,.\,\overline{b}\,\overline{u} = (\overline{a}_1 + \overline{a}_2).\,\overline{b}\,\overline{u} \quad \text{etc.}$$

și în general, dacă $D = D_1 + D_2$, vom avea $D\overline{u} = D_1\overline{u} + D_2\,\overline{u}$. Drept corolar avem

$$\lambda D = \lambda\,\overline{a}\,.\,\overline{b} = \overline{a}\,.\,\overline{b}\,\lambda,$$

cu

$$\lambda\,(D\overline{u}) = (\lambda D)\,\overline{u} = D\,(\lambda\overline{u}). \tag{28}$$

Pe când însă $\overline{a}\,\overline{b}$ sau $\overline{b}\,\overline{a}$ în (26) este un multiplicator scalar obișnuit, care amplifică numai valoarea absolută a lui $\overline{u}$ fără a schimba direcția vectorului, operatorul diadic, pus de ex. înaintea lui $\overline{u}$, ca în prima expresie din (26.1) și (26.2), îi shimbă acestuia și valoarea și direcția, iar o transformare analoagă, însă diferită, se obține atunci când același operator este pus în urma lui $\overline{u}$.

Să desvoltăm acum operatorul sau produsul diadic $D = \bar{a} \,.\, \bar{b}$, introducând componentele celor doi vectori consecutivi:

$$\begin{aligned} D = \bar{a} \,.\, \bar{b} &= (\mathrm{x}a_x + \mathrm{y}a_y + \mathrm{z}a_z) \,.\, (\mathrm{x}b_x + \mathrm{y}b_y + \mathrm{z}b_z) \\ &= \mathrm{x}.\mathrm{x}a_x\, b_x + \mathrm{x}.\mathrm{y}a_x\, b_y + \mathrm{x}.\mathrm{z}a_x\, b_z \\ &+ \mathrm{y}.\mathrm{x}a_y\, b_x + \mathrm{y}.\mathrm{y}a_y\, b_y + \mathrm{y}.\mathrm{z}a_y\, b_z \qquad (29) \\ &+ \mathrm{z}.\mathrm{x}a_z\, b_x + \mathrm{z}.\mathrm{y}a_z\, b_y + \mathrm{z}.\mathrm{z}a_z\, b_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \mathrm{x}.(\mathrm{x}a_x\, b_x + \mathrm{y}a_x\, b_y + \mathrm{z}a_x\, b_z) \\ &+ \mathrm{y}.(\mathrm{x}a_y\, b_x + \mathrm{y}a_y\, b_y + \mathrm{z}a_y\, b_z) \qquad (29.0) \\ &+ \mathrm{z}.(\mathrm{x}a_z\, b_x + \mathrm{y}a_z\, b_y + \mathrm{z}a_z\, b_z) \end{aligned}$$

$$= \mathrm{x}.\bar{b}a_x + \mathrm{y}.\bar{b}a_y + \mathrm{z}.\bar{b}a_z\,, \qquad (29.1)$$

sau, dacă punem multiplicatorii scalari înainte și adunăm coloanele

$$D = \bar{a} \,.\, \bar{b} = b_x\, \bar{a}\,.\,\mathrm{x} + b_y\, \bar{a}\,.\,\mathrm{y} + b_z\, \bar{a}\,.\,\mathrm{z}\,. \qquad (29.2)$$

In (29) figurează *diadele fundamentale:* xx, xy, xz, etc.

Inmulțindu-le pe acestea respectiv cu cei 9 coeficienți scalari sau componentele *matricei* (tablou) ce urmează și adunându-le, alcătuim *diada* (29). Matricea în chestiune poate reprezenta însăși diada, putând scrie:

$$D = \left\{ \begin{matrix} a_x\, b_x & a_x\, b_y & a_x\, b_z \\ a_y\, b_x & a_y\, a_y & a_y\, b_z \\ a_z\, b_x & a_z\, b_y & a_z\, b_z \end{matrix} \right\}, \qquad (30)$$

deoarece ea conține toți coeficienții desvoltării (29), analogi cu λ din (28), iar tabloul diadelor fundamentale, ce figurează în (29) multiplicate cu aceștia, este stereotip și subînțeles. In (29) dacă considerăm pe $a_x\, b_x \;\; a_x\, b_y$, $a_x\, b_z$ drept componente ale unui vector $\bar{t}_x = a_x \bar{b}$ și tot astfel $t_y = a_y \bar{b}$, $t_z = a_z \bar{b}$, toți în direcția $\bar{b}$, vom avea diada simplă $\bar{a} \,.\, \bar{b}$ desfăcută în o sumă de trei diade, o altă scriere a lui (29.1)

$$D = \mathrm{x}.\bar{t}_x + \mathrm{y}.\bar{t}_y + \mathrm{z}.\bar{t}_z\,. \qquad (30.1)$$

și deci

$$D_c = \bar{t}_x \cdot \mathrm{x} + \bar{t}_y \cdot \mathrm{y} + \bar{t}_z \cdot \mathrm{z}.$$

BCU CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Tot astfel (29.2) se poate scrie

$$D = \bar{t}_{(x)} \cdot \mathbf{x} + \bar{t}_{(y)} \cdot \mathbf{y} + \bar{t}_{(z)} \cdot \mathbf{z}$$

şi deci

$$D_c = \mathbf{x} . \bar{t}_{(x)} + \mathbf{y} . \bar{t}_{(y)} + \mathbf{z} . \bar{t}_{(z)} \qquad (30.2)$$

cu vectorii, în direcţia lui $\bar{a}$:

$$t_{(x)} = \bar{b}_x \, \bar{a}$$

$$\bar{t}_{y)} = b_y \, \bar{a}$$

$$\bar{t}_{(z)} = b_z \, \bar{a} \, .$$

Cei 9 coeficienţi, care formează componentele scalare ale diadei (30), nu sunt evident independenţi între ei, fiindcă sunt produse a numai 6 cantităţi distincte, luate câte două, anume cele 6 componente ale vectorilor constitutivi $\bar{a}$ şi $\bar{b}$.

Prin permutarea literelor a şi b (cu menţinerea indicilor) se ajunge la matricea *conjugată* a lui (30), adică matricea ce se obţine schimbând în (30) rândurile cu coloanele, ceeace, având în vedere că

$$D = \bar{a} \, . \, \bar{b} \qquad D_c = \bar{b} \, . \, \bar{a},$$

justifică denumirea de conjugată, dată diadei comutate $D_c = \bar{b} \, . \, \bar{a}$.

Am adoptat aceeaşi distincţie şi pentru vectorii $\bar{w}$, $\bar{w}_c$, obţinuţi din $\bar{u}$ prin operatorii D şi D_c, aşezaţi înaintea lui u.

Sub forma (30) se pot reprezenta şi diadele fundamentale cu ajutorul componentelor cari, de ex. pentru vectorul x, sunt $1, 0, 0$, etc:

$$\mathbf{x}.\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}.\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}.\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{y}.\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}.\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}.\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad (31)$$

$$\mathbf{z}.\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z}.\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z}.\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Prin înmulţirea acestor matrice cu respectivii coeficienţi $a_x b_x$, $a_x b_y$, etc. şi adunarea rezultatelor conform desvlotări (29), se ajunge la matricea diadei (30).

17. Diadă completă, echivalență cu tensorul.

Dacă avem o sumă de diade de tipul $D = \bar{a} \,.\, \bar{b}$ (în care tip intră și diadele fundamentale), vom putea, grație distributivității, descompune fiecare diadă după modelul de mai sus, adică în o sumă de 9 diade fundamentale, înmulțite cu coeficienții respectivi, și aduna apoi coeficienții de pe lângă aceste diade, scoase factori comuni, pentru a găsi în cele din urmă o matrice totalizatoare T de forma (30):

$$\Sigma D = T = \begin{pmatrix} t_{xx} & t_{xy} & t_{xz} \\ t_{yx} & t_{yy} & t_{yz} \\ t_{zx} & t_{zy} & t_{zz} \end{pmatrix}, \qquad (32)$$

numită *diadă completă*.

In această matrice însă cele 9 componente t sunt independente una de alta, fiindcă, chiar dacă am lua cazul redus cu numai două diade, adică 4 vectori, vom avea $4 \times 3 = 12$ cantități dinstincte, astfel că cele 9 componente ale matricei (32), care provin din adunarea a 2 sau mai multe diade, vor fi în general independente.

Desvoltând o diadă completă ca (32) și conjugata ei T_c după modelul (29.0), vom avea:

$$\begin{aligned} T \;&= \mathrm{x}.(\mathrm{x}t_{xx} + \mathrm{y}t_{xy} + \mathrm{z}t_{xz}) \\ &+ \mathrm{y}.(\mathrm{x}t_{yx} + \mathrm{y}t_{yy} + \mathrm{z}t_{yz}) \\ &+ \mathrm{z}.(\mathrm{x}t_{zx} + \mathrm{y}t_{zy} + \mathrm{z}t_{zz}) \end{aligned} \qquad (33)$$

și

$$\begin{aligned} T_c = \mathrm{x}\,&(\mathrm{x}t_{xx} + \mathrm{y}t_{yx} + \mathrm{z}t_{zx}) \\ &+ \mathrm{y}.(\mathrm{x}t_{xy} + \mathrm{y}t_{yy} + \mathrm{z}t_{zy}) \\ &+ \mathrm{z}\,(\mathrm{x}t_{xz} + \mathrm{y}t_{yz} + \mathrm{z}t_{zz}) \end{aligned} \qquad (33.1)$$

sau, definind câte trei vectori auxiliarí:

$$\begin{aligned} \bar{t}_x &= \mathrm{x}t_{xx} + \mathrm{y}t_{xy} + \mathrm{z}t_{xz} \\ \bar{t}_y &= \mathrm{x}t_{yx} + \mathrm{y}t_{yy} + \mathrm{z}t_{yz} \\ \bar{t}_z &= \mathrm{x}t_{zx} + \mathrm{y}t_{zy} + \mathrm{z}t_{zz} \end{aligned} \qquad (34)$$

și alți 3:

$$\begin{aligned} \bar{t}_{(x)} &= \mathrm{x}t_{xx} + \mathrm{y}t_{yx} + \mathrm{z}t_{zx} \\ \bar{t}_{(y)} &= \mathrm{x}t_{xy} + \mathrm{y}t_{yy} + \mathrm{z}t_{zy} \\ \bar{t}_{(z)} &= \mathrm{x}t_{xz} + \mathrm{y}t_{yz} + \mathrm{z}t_{zz}\,, \end{aligned} \qquad (34.1)$$

BCU IAȘI / CENTRUL UNIVERSITY LIBRARY

sub o formă mai concentrată, exact ca la (30.1) şi (30.2):

$$T = \mathbf{x}.\bar{t}_x + \mathbf{y}.\bar{t}_y + \mathbf{z}.\bar{t}_z \tag{35}$$

şi

$$T_c = \mathbf{x}.\bar{t}_{(x)} + \mathbf{y}.\bar{t}_{(y)} + \mathbf{z}.\bar{t}_{(z)}. \tag{35.1}$$

Prin comutare vom avea:

$$T_c = \bar{t}_x \,.\, \mathbf{x} + \bar{t}_y \,.\, \mathbf{y} + \bar{t}_z \,.\, \mathbf{z} \tag{36}$$

şi

$$T = \bar{t}_{(x)}.\,\mathbf{x} + \bar{t}_{(y)}.\,\mathbf{y} + \bar{t}_{(z)}.\,\mathbf{z}. \tag{36.1}$$

Se vede că orice diadă totalizată (cum de altfel şi o diadă simplă) se poate totdeauna reduce la o diadă triplă după tipul (35), (35.1), (36), (36.1). De aceea $\Sigma D = T$ a primit numele de diadă *completă*, reprezentând operatorul cel mai general de această speţă. După operatorul T (sau D) şi conjugatul său T_c (sau D_c) vectorul transformat $\bar{w}$ se poate exprima desvoltat în patru feluri, intervenind acum şi poziţia acestuia:

$$\bar{w} = T\bar{u} = (\mathbf{x}.\bar{t}_x + \mathbf{y}.\bar{t}_y + \mathbf{z}.\bar{t}_z)\,\bar{u} = (\bar{t}_{(x)}.\,\mathbf{x} + \bar{t}_{(y)}.\,\mathbf{y} + \bar{t}_{(z)}.\mathbf{z})\,\bar{u}$$

$$= \bar{u}T_c = \bar{u}\,(\bar{t}_x \,.\, \mathbf{x} + \bar{t}_y \,.\, \mathbf{y} + \bar{t}_z \,.\, \mathbf{z}) = \bar{u}\,(\mathbf{x}.\bar{t}_{(x)} + \mathbf{y}.\bar{t}_{(y)} + \mathbf{z}.\,\bar{t}_{(z)}), \tag{37}$$

iar schimbând T prin T_c sau vice-versa, obţinem vectorul $\bar{w}_c$ (x, y, z).

Aşa dar, formulele (37) arată modalitatea în care o diadă completă T sau conjugata ei operează asupra vectorului $\bar{u}\,(x, y, z)$, pentru a ne da în acelaşi punct, fie vectorul $\bar{w}$ (x, y, z) fie pe $\bar{w}_c\,(x, y, z)$.

Dacă matriţa este simetrică în raport cu diagonala aplecată spre stânga, avem $T = T_c$ şi deci $\bar{w} = \bar{w}_c$.

Dacă scriem

$$\bar{w} = \bar{u}.\mathbf{x}\bar{t}_{(x)} + \bar{u}\,\mathbf{y}.\bar{t}_{(y)} + \bar{u}\,\mathbf{z}.\,\bar{t}_{(z)},$$

se vede că vectorii $\bar{t}_{(x)}$, $\bar{t}_{(y)}$, $\bar{t}_{(z)}$ exprimă vectorul $\bar{w}$, împărţit prin valoarea absolută a lui $\bar{u}$, atunci când acesta se ia în direcţia x, respectiv y, respectiv z. Tot astfel $\bar{t}_x$, $\bar{t}_y$, $\bar{t}_z$ sunt egali, respectiv, cu vectorul $\bar{w}_c$, împărţit prin valoarea absolută a lui $\bar{u}$, atunci când acesta se ia în direcţia axei x, y sau z (proecţiile lui pe celelalte 2 axe fiind nule). Dacă de ex. luăm cazul:

$$u_x = u\,, \quad u_y = 0\,, \quad u_z = 0\,,$$

avem

$$\bar{w} = u\bar{t}_{(x)} \qquad \bar{w}_c = u\bar{t}_x .$$

Vectorii $\bar{t}_{(x)}$, $\bar{t}_{(y)}$, $\bar{t}_{(z)}$ (deasemenea și $\bar{t}_x$, $\bar{t}_y$, $\bar{t}_z$) nu pot fi în general *complanari*, deoarece în acest caz $\bar{w}$ ar cădea totdeauna în același plan și deci $\bar{u}$, presupus a fi un vector ce poate lua toate direcțiile în spațiu, n'ar putea corespunde biunivoc cu $\bar{w}$.

Din modul diadei complete de a face să corespundă orcărui vector $\bar{u}$ într'un punct (x, y, z) un alt vector $\bar{w}$, se vede că diada completă este echivalentă cu *tensorul*.

De altfel pentru $\mathcal{T}$ am văzut din (25.1.2), că acest tensor particular ia forma unei diade triple.

18. Expresia prin tensor a unei funcțiuni vectoriale liniare omogene.

In teză generală, pentru orice funcțiune vectorială $\bar{w}$ a unei funcțiuni vectoriale de spațiu $\bar{u}$ (x, y, z), pentru care avem

$$\begin{aligned} w_x &= t_{xx}\, u_x + t_{xy}\, u_y + t_{xz}\, u_z \\ w_y &= t_{yx}\, u_x + t_{yy}\, u_y + t_{yz}\, u_z \\ w_z &= t_{zx}\, u_x + t_{zy}\, u_y + t_{zx}\, u_z , \end{aligned} \qquad (38)$$

adică ale cărei componente sunt funcțiuni liniare omogene de componentele u_x, u_y u_z ale variabilei $\bar{u}$, considerate ca independente, vom putea scrie:

$$\begin{aligned} \bar{w} = \mathbf{x}\,\bar{v}_x + \mathbf{y}\,\bar{v}_y + \mathbf{z}\,\bar{v}_z = {} & \mathbf{x}\,(t_{xx}\, u_x + t_{xy}\, u_y + t_{xz}\, u_z) \\ & + \mathbf{y}\,(t_{yx}\, u_x + t_{yy}\, u_y + t_{yz}\, u_z) \\ & + \mathbf{z}\,(t_{zx}\, u_x + t_{zy}\, u_y + t_{zz}\, u_z). \end{aligned} \qquad (39)$$

Definind 3 vectori auxiliari ca în (34)

$$\begin{aligned} \bar{t}_x &= \mathbf{x}\, t_{xx} + \mathbf{y}\, t_{xy} + \mathbf{z}\, t_{xz} \\ \bar{t}_y &= \mathbf{x}\, t_{yx} + \mathbf{y}\, t_{yy} + \mathbf{z}\, t_{yz} \\ \bar{t}_z &= \mathbf{x}\, t_{zx} + \mathbf{y}\, t_{zy} + \mathbf{z}\, t_{zz} \end{aligned}$$

și observând că parantezele din (39) exprimă atunci niște produse scalare, putem scrie aceste relații sub forma de diadă triplă sau completă

$$\bar{w} = \mathbf{x}.\bar{t}_x\,\bar{u} + \mathbf{y}.\bar{t}_y\,\bar{u} + \mathbf{z}.\bar{t}_z\,\bar{u} = T\bar{u} = \bar{u}\,T_c , \qquad (39.1)$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

înțelegând prin T matricea (32). Relațiile (38) precizează deci modul tensorului, de a face să corespunză oricărui $\bar{u}$ un alt vector $\bar{w}$ în jurul unui punct (x, y, z).

Constatându-se astfel completa identitate dintre funcțiunea vectorială liniară definită prin (38) și operatorul diadic complet sau tensorul urmat de vectorul $\bar{u}$, putem aplica aci toate proprietățile acestora, d. ex. cele relative la vectorul conjugat $\bar{w}_c$ și la ceilalți 3 vectorii auxiliari $\bar{t}_{(x)}$, $\bar{t}_{(y)}$, $\bar{t}_{(z)}$.

19. Tensorul repartiției afine a unui câmp vectorial în domeniul unui punct.

La același tip ca (38) aparține și funcțiunea vectorială $\bar{w} = \frac{d\bar{v}}{|d\bar{r}|}$ resp. $d\bar{v}$, care definește repartiția la un moment dat a câmpului $\bar{v}$ (în special al vitesei) în domeniul unui punct (x, y, z), $\bar{w} = \frac{d\bar{v}}{|d\bar{r}|}$ resp. $d\bar{v}$ fiind o funcțiune de $\bar{u} = \bar{s}$ respectiv $d\bar{r}$. Vom avea în acest caz:

$$t_{xx} = \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad t_{xy} = \frac{\partial v_x}{\partial y}, \quad t_{xz} = \frac{\partial v_x}{\partial z}, \quad \text{etc. etc.}$$

iar pentru

$$\mathcal{T} = \begin{Vmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{Vmatrix}.$$

După (39.1) vom scrie:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\bar{v}}{|d\bar{s}|} = \mathcal{T}\bar{s} &= \mathbf{x}.\bar{t}_x\,\bar{s} + \mathbf{y}.\bar{t}_y\,\bar{s} + \mathbf{z}.\bar{t}_z\,\bar{s}, \\ \text{respectiv} \qquad d\bar{v} = \mathcal{T}\,d\bar{r} &= \mathbf{x}.\bar{t}_x\,d\bar{r} + \mathbf{y}.\bar{t}_y\,d\bar{r} + \mathbf{z}.\bar{t}_z\,d\bar{r} \end{aligned}\right\} \quad (40)$$

și cum după (25.1) de ex.

$$d\bar{v} = \mathbf{x}.\,grad\,v_x\,d\bar{r} + \mathbf{y}.\,grad\,v_y\,d\bar{r} + \mathbf{z}.\,grad\,v_z\,d\bar{r},$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

rezultă că în acest caz special, una din cele două soluții de *triplete* de vectori constitutivi ai tensorului $\mathcal{T}$, relativ la sistemul de referință ales, este :

$$\bar{t}_x = grad\, v_x\,,$$
$$\bar{t}_y = grad\, v_y\,,$$
$$\bar{t}_z = grad\, v_z\,.$$

După cealaltă desvoltare:

$$\frac{d\bar{v}}{|d\bar{s}|} = \bar{s}\,\mathcal{T}_c\,,$$

respectiv

$$d\bar{v} = d\bar{r}\,\mathcal{T}_c = d\bar{r}\,\mathbf{x}.\bar{t}_{(x)} + d\bar{r}\,\mathbf{y}.\bar{t}_{(y)} + d\bar{r}\,\mathbf{z}.\bar{t}_{(z)}$$
$$= \bar{t}_{(x)}\,dx + \bar{t}_{(y)}\,dy + \bar{t}_{(z)}\,dz, \qquad (40.1)$$

se vede că a doua soluție de triplete de vectori constitutivi ai tensorului, relativ la sistemul de referință ales, este:

$$\bar{t}_{(x)} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}$$
$$\bar{t}_{(y)} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}$$
$$\bar{t}_{(z)} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}$$

și deci

$$d\bar{v} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\,dy + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\,d_z, \qquad (40.2)$$

respectiv

$$\frac{d\bar{v}}{|d\bar{s}|} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\,s_x + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\,s_x + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\,s_z\,.$$

Tensorul $\mathcal{T}$, ale cărei componente în număr de 9 nu sunt complet independente una de alta, căci

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)}{\partial x} = \frac{\partial\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)}{\partial y} \text{ etc.}, \qquad (40.3)$$

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

se poate asimila cu o diadă simplă, dacă scriem matricea sub forma (analog cu a diadei $\bar{a}.\bar{b}$):

$$\mathcal{T}=\mathcal{D}=\left\{\begin{array}{ccc}\frac{\partial}{\partial x}v_x & \frac{\partial}{\partial y}v_x & \frac{\partial}{\partial z}v_x\\ \frac{\partial}{\partial x}v_y & \frac{\partial}{\partial y}v_y & \frac{\partial}{\partial z}v_y\\ \frac{\partial}{\partial x}v_z & \frac{\partial}{\partial y}v_z & \frac{\partial}{\partial z}v_z\end{array}\right\}=\bar{v}.\nabla,$$

care conduce după (40) la:

$$\frac{d\bar{v}}{|d\bar{s}|}=\mathcal{D}\bar{s}=\bar{s}\mathcal{D}_c=\bar{s}\nabla.\bar{v},$$

respectiv

$$d\bar{v}=\mathcal{D}\,d\bar{r}=d\bar{r}\,\mathcal{D}_c=d\bar{r}\nabla.\bar{v}.$$

La aceasta se mai poate ajunge și pe calea următoare:

$$dv_x=d\bar{r}\nabla v_x$$

$$dv_y=d\bar{r}\nabla v_y$$

$$dv_z=d\bar{r}\nabla v_z$$

$$d\bar{v}=\mathbf{x}\,dv_x+\mathbf{y}\,dv_y+\mathbf{z}\,dv_z=d\bar{r}\nabla.(\mathbf{x}v_x+\mathbf{y}v_y+\mathbf{z}v_z)=d\bar{r}\nabla.\bar{v},$$

întrucât un scalar ca v_x, v_y, v_z se poate alipi oricăruia din vectori ca multiplicator (datorită distributivității).

De altfel și din (40,2) se deduce

$$d\bar{v}=\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}+dz\frac{\partial}{\partial z}\right)\bar{v}=(d\bar{r}\nabla)\bar{v}=d\bar{r}\nabla.\bar{v},$$

apărând și aci diada $\nabla.\bar{v}$ în urma vectorului de operat $d\bar{r}$.

Se vede deci că în expresia

$$d\bar{r}\nabla.\bar{v}=d\bar{r}\,grad.\bar{v},$$

sau altfel scrisă

$$(d\bar{r}\nabla)\bar{v}=(d\bar{r}\,grad)\bar{v},$$

punctul sau paranteza s'a impus pentru a separa un produs scalar de un vector, fiind vorba de o operație diadică și anume cu diada $\nabla.v$, al cărei antecedent aci este simbolul nabla.

BCU IASI CENTRALA UNIVERSITY LIBRARY

Inlocuirea, în acest caz (distribuţie *liniară* a câmpului $\bar{v}$), a tensorului =diadă triplă $\mathcal{T}$ prin o diadă simplă $\mathcal{D}$, este mai mult de cât numai formală, cele 9 componente ale tensorului (formal alcătuite din 6 şi anume componentele nablei şi acelea ale lui $\bar{v}$), nefiind după (40.3) complet independente.

Precum un operator vectorial, ca *grad* Φ, este un *invariant*, deşi componentele lui în număr de 3 (triplet scalar) se schimbă la schimbarea axelor de referinţă, tot astfel, ţinând seama de ex. aci, că ansamblul vectorilor $\frac{d\bar{v}}{ds}$ într'un punct este independent de sistemul de referinţă, tensorul, care conduce la acel ansamblu prin transformarea lui $\bar{s}$, este un invariant, deşi componentele lui (formând trei triplete scalare sau un triplet vectorial) variază după sistemul de referinţă.

In exemplul considerat

$$\frac{d\bar{v}}{|d\bar{r}|} = \frac{d\bar{v}}{ds} = \mathcal{T}\bar{s} \quad \text{sau} \quad d\bar{v} = \mathcal{T}\,d\bar{r}\ ^{*}),$$

tensorul $\mathcal{T}$ se numeşte şi *afinor*, fiindcă dă (ca o primă aproximaţie) o transformare *liniară omogenă* (în unitatea de timp) a spaţiului $d\bar{r}$, care se numeşte *afină*. In exemplul eforturilor $\bar{f} = \mathcal{F}\bar{n}$, câmpul tensorial $\bar{f}$ are un caracter fizic diferit. In ambele cazuri, bine înţeles, tensorul ($\mathcal{T}$ sau $\mathcal{F}$) este operatorul unei transformări *liniare omogene*, în sensul arătat mai sus, a unui vector $\bar{u}$.

Această transformare se poate înţelege însă şi într'un sens mai restrâns, putând genera nu numai un câmp tensorial, ci şi un câmp vectorial, în cazul când $\bar{u}$ are o singură valoare în orice punct, sau chiar un singur vector, dacă $\bar{u}$ nu variază. Aceste funcţii de altfel pot depinde şi de timp.

Se demonstrează uşor că tensorul eforturilor $\mathcal{F}$, după cum am menţionat deja, este simetric faţă de diagonala matricei aplecată spre stânga, în care caz avem prin urmare

$$\mathcal{F}_c = \mathcal{F}.$$

Cu ajutorul tensorului conjugat se vede imediat că orice tensor T se poate descompune într'un tensor simetric T_s şi altul

*) Se vede că tensorul $\mathcal{T}$ este operatorul simbolic al derivării vectoriale.

antisimetric T_a, acesta având componentele din diagonala menționată nule, iar termenii, simetric așezați față de ea, egali și de semn contrar. Intradevăr $\frac{1}{2}(T+T_c)$ este evident un tensor simetric T_s, iar $\frac{1}{2}(T-T_c)$ un tensor antisimetric T_a. Ori, din

$$T_s = \frac{1}{2}(T+T_c) \quad \text{și} \quad T_a = \frac{1}{2}(T-T_c)$$

rezultă

$$T_s + T_a = T.$$

Mai avem relațiile evidente

$$T_s = T_{sc} \quad \text{și} \quad T_a = -T_{ac}.$$

Tensorul, redus, precum am arătat, la o diadă triplă, are rolul de *multiplicator* și tot odată de *versor* (adică schimbă direcția) al vectorului $\bar{u}$, pentru a ne da un alt vector $\bar{w}$. Acest dublu rol în spațiu este comparabil cu acela al unui factor *complex* în plan.

Operația de înmulțire formală a unui vector cu tensorul T, drept operator echivalent cu o diadă completă, nu este precum am văzut comutativă, decât în cazul tensorului simetric. Distributivitatea diadei și a operației pe care o efectuează permite a se scrie și pentru tensori, dacă $T = T_1 + T_2$ și $\bar{u} = \bar{u}_1 + \bar{u}_2$:

$$T(\bar{u}_1 + \bar{u}_2) = T\bar{u}_1 + T\bar{u}_2$$

$$(T_1 + T_2)\bar{u} = T_1\bar{u} + T_2\bar{u}$$

$$\lambda(T\bar{u}) = (\lambda T)\bar{u} = T(\lambda\bar{u}).$$

20. Recapitularea operațiilor cu simbolul vectorial ∇ (nabla) și simbolul tensorial T.

Avem:

$$\nabla\Phi = grad\,\Phi, \quad \text{(vector)}$$

$$\nabla\bar{v} = div\,\bar{v}, \quad \text{(scalar)}$$

$$[\nabla\bar{v}] = rot\,\bar{v}, \quad \text{(vector)}$$

$$T\bar{u} = \bar{u}\,T_c = \bar{w}, \quad \text{(vector)}.$$

Pentru repartiția câmpului $\bar{v}$ în domeniul unui punct (x, y, z) se aplică ultima formulă cu $\bar{u} = d\bar{r}$ și $\bar{w} = d\bar{v}$, tensorul fiind:

$$\mathcal{T} = \begin{Vmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_s}{\partial z} \end{Vmatrix} = \bar{v} \cdot \nabla \quad \text{și} \quad \mathcal{T}_c = \nabla \cdot \bar{v} = grad \cdot \bar{v}$$

astfel că

$$d\bar{v} = \mathcal{T}\, d\bar{r} = d\bar{r}\, \mathcal{T}_c = d\bar{r}\, \nabla \cdot \bar{v} = d\bar{r}\, grad \cdot \bar{v} \qquad (41)$$

și

$$\frac{d\bar{v}}{ds} = \bar{s} \nabla \cdot \bar{v} = \bar{s}\, grad \cdot \bar{v}.$$

21. Descompunerea după Helholtz a câmpului vitesei în domeniul unui punct.

Reluăm această chestiune, pentru a o trata cu ajutorul tensorului $\mathcal{T}$, numit și *afinor*.

1) Fie că afinorul $\mathcal{T}$ într'un punct A este simetric, fie că într'un afinor oarecare, considerăm componenta lui simetrică $\mathcal{T}_s$, pentru câmpul respectiv vom avea

$$\frac{\partial v_z}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial y},$$

ceeace denotă că rotaționalul vitesei este nul și mișcarea este o mișcare de pură deformație (deci potențială).

Pentru un asemenea afinor avem $\mathcal{T} = \mathcal{T}_c$ respectiv $\mathcal{T}_s = \mathcal{T}_{sc}$, numai 6 din componente fiind distincte. Aceste 6 componente definesc *deformațiunea* în unitatea de timp, fiind anume

$$\alpha_x = \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad \alpha_y = \frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad \alpha_z = \frac{\partial v_z}{\partial z},$$

dilatații liniare în unitatea de timp,

și

$$2\beta_x = \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} = 2\frac{\partial v_z}{\partial y} = 2\frac{\partial v_y}{\partial z}$$

$$2\beta_y = \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} = 2\frac{\partial v_x}{\partial z} = 2\frac{\partial v_z}{\partial x}$$

$$2\beta_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} = 2\frac{\partial v_y}{\partial x} = 2\frac{\partial v_x}{\partial y},$$

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Așa dar, fie că afinorul $\mathcal{T}$ este simetric, fie că, la un afinor oarecare considerăm componenta $\mathcal{T}_s = \frac{1}{2}\left(\mathcal{T}+\mathcal{T}_c\right)$, vom avea în ambele cazuri

$$\mathcal{T}_s = \frac{1}{2}(\mathcal{T}+\mathcal{T}_c) = \begin{pmatrix} \alpha_x & \beta_z & \beta_y \\ \beta_z & \alpha_y & \beta_x \\ \beta_y & \beta_x & \alpha_z \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\bar{v}\cdot\nabla+\nabla\cdot\bar{v}). \qquad (42)$$

2) Dacă, din contra, la un afinor $\mathcal{T}$ avem

$$\alpha_x = \alpha_y = \alpha_z = 0,$$
$$\beta_x = \beta_y = \beta_z = 0,$$

sau dacă considerăm la un afinor oarecare numai componenta lui antisimetrică $\mathcal{T}_a$, vom avea pentru câmpul respectiv:

$$\frac{\partial v_z}{\partial y} = -\frac{\partial v_y}{\partial z}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{\partial v_z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = -\frac{\partial v_x}{\partial y}$$

și deci

$$\omega_x = \frac{1}{2}\,rot_x\,\bar{v} = \frac{\Omega_x}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right) = \frac{\partial v_z}{\partial y} = -\frac{\partial v_y}{\partial z}$$

$$\omega_y = \frac{1}{2}\,rot_y\,\bar{v} = \frac{\Omega_y}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right) = \frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{\partial v_z}{\partial x}$$

$$\omega_z = \frac{1}{2}\,rot_z\,\bar{v} = \frac{\Omega_z}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = \frac{\partial v_y}{\partial x} = -\frac{\partial v_x}{\partial y}.$$

Așa dar, fie că afinorul $\mathcal{T}$ este antisimetric, fie că la orice afinor considerăm componenta $\mathcal{T}_a = \frac{1}{2}\left(\mathcal{T}-\mathcal{T}_c\right)$, vom avea în ambele cazuri:

$$\mathcal{T}_a = \frac{1}{2}\left(\mathcal{T}-\mathcal{T}_c\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}. \qquad (43)$$

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

3) Cum în cazul general avem în $\mathcal{T}$ suma tensorilor (42) și (43), vom avea:

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} \alpha_x & \beta_z - \omega_z & \beta_y + \omega_y \\ \beta_z + \omega_z & \alpha_y & \beta_x - \omega_x \\ \beta_y - \omega_y & \beta_x + \omega_x & \alpha_z \end{pmatrix},$$

Vom putea scrie acum pentru vitesa de deformație și cea datorită rotației, față de punctul $\bar{r}\ [x, y\ z]$ animat cu vitesa $\bar{v}$

$$d\bar{v} = d\bar{r}\,grad.\bar{v} = \mathcal{T}\,d\bar{r} = \mathcal{T}_s\,d\bar{r} + \mathcal{T}_a\,d\bar{r} = \mathcal{T}_s\,d\bar{r} + [\bar{\omega}\,d\bar{r}]$$

$$= d\bar{v}_s + d\bar{v}_a, \qquad (44)$$

$d\bar{v}_a = [\bar{\omega}\,d\bar{r}]$ rezultând din matricea antisimetrică (43), care dă

$$\begin{aligned} dv_{ax} &= -\omega_z\,dy + \omega_y\,dz, \\ dv_{ay} &= \omega_z\,dx - \omega_x\,dz, \\ dv_{az} &= -\omega_y\,dx + \omega_x\,dy \end{aligned} \qquad (45)$$

și deci

$$d\bar{v}_a = \begin{vmatrix} x & y & z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = [\bar{\omega}\,d\bar{r}],$$

ceea ce se știa și pe altă cale.

22. Elipsoidul tensorial al deformației în domeniul unui punct.

Dacă considerăm tensorul simetric (42), care cu notația adoptată la pagina 29: $dx = x'$, $dy = y'$, $dz = z'$, $d\bar{r} = \bar{r}'$ și punând $d\bar{v}_s = \bar{v}'$ pentru vitesa relativă (de deformație) față de molecula din punctul $\bar{r}$ sau $A\,(x, y, z)$, vom scrie pentru domeniul acestui punct

$$\begin{aligned} dv_{sx} &= v'_x = \alpha_x\,x' + \beta_z\,y' + \beta_y\,z', \\ dv_{sy} &= v'_y = \beta_z\,x' + \alpha_y\,y' + \beta_x\,z', \\ dv_{sz} &= v'_z = \beta_y\,x' + \beta_z\,y' + \alpha_z\,z' \end{aligned} \qquad (46)$$

sau concentrat

$$\bar{v}' = \mathcal{T}_s\,\bar{r}'.$$

Mișcarea aceasta de deformație (lipsită de rotație) fiind potențială, va exista evident o funcție de vitesă Φ', a cărei diferențială va fi elementul de circulație $\bar{v}'d\bar{r}'$

$$d\Phi' = \bar{v}'d\bar{r}'.$$

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Dacă integrăm dela $A(x, y, z)$, pentru care $\bar{r}' = 0$ și $\bar{v}' = 0$, până la $\bar{r}'$ cu $\bar{v}'$, fiind vorba de o funcțiune liniară, valoarea medie a vectorului viteză va fi $\frac{1}{2}\bar{v}'$, astfel că integrala de linie pe raza vectoare $\bar{r}'$, alegând în punctul A valoarea $\Phi' = 0$, dă după (46)

$$\Phi' = \frac{1}{2}\bar{r}'\bar{v}' = \frac{1}{2}(\alpha_x x'^2 + \alpha_y y'^2 + \alpha_z z'^2 + 2\beta_x y'z' + 2\beta_y z'x' + 2\beta_z x'y'), \quad (47)$$

verificându-se ușor, cum trebue să fie, că

$$v'_x = \frac{\partial \Phi'}{\partial x}, \quad v'_y = \frac{\partial \Phi'}{\partial y}, \quad v'_z = \frac{\partial \Phi'}{\partial z}. \qquad (47.1)$$

Suprafețele $\Phi' = const$ sunt cuadrice echipotențiale, printre care și suprafața particulară

$$\Phi' = \pm\frac{1}{2},$$

cu semnul ales astfel, ca să fie o cuadrică reală. Această cuadrică se numește *elipsoidul tensorului* sau *afinorului* $\mathcal{T}_s$, chiar dacă eventual n'ar fi elipsoid, și se poate considera ca reprezentantul tensorului $\mathcal{T}_s$, fiind independentă de sistemul de referință ca și $\mathcal{T}_s$.

Parametrii directori ai celor trei axe ale elipsoidului tensorial sunt date de rădăcinile ecuației de gradul al treilea în S:

$$\begin{vmatrix} \alpha_x - S & \beta_z & \beta_y \\ \beta_z & \alpha_y - S & \beta_x \\ \beta_y & \beta_x & \alpha_z - S \end{vmatrix} = 0. \qquad (48)$$

Dacă raportăm elipsoidul la axele sale principale, vom avea evident:

$$\Phi'(X, Y, Z) = \frac{1}{2}(\alpha_1 X^2 + \alpha_2 Y^2 + \alpha_3 Z^2) = \pm\frac{1}{2}, \quad (49)$$

α_1, α_2, α_3 fiind dilatațiile în unitatea de timp după axele principale ale deformației, iar $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$, adică deformațiile unghiulare după fețetele din planurile coordonate fiind nule. In acest caz sistemul (46) devine:

$$v'_1 = \alpha_1 X = \frac{\partial \Phi'}{\partial X}$$

$$v'_2 = \alpha_2 Y = \frac{\partial \Phi'}{\partial Y} \qquad (50)$$

$$v'_3 = \alpha_3 Z = \frac{\partial \Phi'}{\partial Z},$$

ceeace arată că, față de axele principale, componentele lui $\bar{v}'$ se obțin din ale lui $\bar{r}'[X, Y, Z]$ prin multiplicarea cu un scalar, în general diferit pentru cele trei direcțiuni principale. Dacă am avea cazul particular ipotetic $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$, (50) s'ar reduce la $\bar{v}' = \alpha \bar{r}'$, astfel că operația (50), scrisă simbolic $\bar{v}' = \mathcal{T}_s \bar{r}'$, se poate socoti ca o generalizare a multiplicării.

Diferența între acest caz particular și cazul mai general (49) este că, după (50), α_1, α_2, α_3 fiind diferite, $\bar{v}'$ nu are direcția lui $\bar{r}'$.

In mod analog într'un corp izotrop inducția electrică $\bar{D}$ este proporțională cu câmpul electric $\bar{H}$:

$$\bar{D} = \varepsilon \bar{H},$$

unde ε este constanta dielectrică a mediului. Intr'un cristal, din contra, pentru aflarea lui $\bar{D}$ trebue descompus $\bar{H}$ după axele principale ale cristalului, care sunt rectangulare, și aceste componente trebuesc înmulțite cu constantele dielectrice respective ale cristalului $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, obținându-se astfel o direcție $\bar{D}$, diferită de a lui $\bar{H}$. Direcțiile 1, 2, 3 și cei trei coeficienți principali (α_1, α_2, α_3, respectiv ε_1, ε_2, ε_3) determină complet tensorul simetric corespunzător. Și întradevăr, direcția uneia din axe are nevoie, pentru a fi determinată, de două date; direcția celei de a doua axă, ortogonală primei, are nevoie de o singură dată în plus, iar direcția axei a treia nu are nevoe de nici una, fi indperfect determinată de primele două axe. Adăogând și cei trei coeficienți principali α_1, α_2, α_3, avem 6 date necesare și suficiente pentru determinarea elipsoidului sau a tensorului simetric respectiv.

După (49) semi-axele principale ale elipsoidului tensorial sunt date de expresiile:

$$R_1 = \frac{1}{\sqrt{\pm\alpha_1}}, \quad R_2 = \frac{1}{\sqrt{\pm\alpha_2}}, \quad R_3 = \frac{1}{\sqrt{\pm\alpha_3}}. \qquad (51)$$

Se poate arăta că, cu ajutorul elipsoidului tensorial, vectorul $\bar{v}'$ înt'un punct al său se poate deduce geometric din raza vectoare $\bar{r}'$. Intradevăr, cum mișcarea este potențială și (vezi 47.1)

$$\bar{v}' = grad\, \Phi'$$

(independent de sistemul de referință), vectorul $\bar{v}'$ are direcția normalei la suprafața echipotențială.

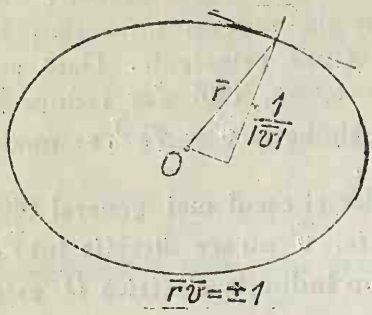


Fig. 18

In ceeace privește valoarea absolută a lui $\bar{v}'$, din relația

$$\Phi' = \frac{1}{2}\bar{r}'\bar{v}' = \pm\frac{1}{2}$$

sau

$$\bar{r}'\bar{v}' = \pm 1 \quad (51{,}1)$$

rezultă că $|\bar{v}'|$ este inversul proecției lui $\bar{r}'$ pe $\bar{v}'$, adică pe normală (fig. 18). (51.1) se mai poate scrie

$$r'v'\cos(r'v') = r'\alpha r' = \pm 1, \qquad (51.2)$$

căci proecția lui $\bar{v}'$ pe $\bar{r}'$ este tocmai alungirea lui $\bar{r}'$ în unitatea de timp, adică $\alpha r'$.

Se verifică că, dacă luăm vitesele la extremitatea razelor principale R_1, R_2, R_3, cari după (50) sunt în direcția semiaxelor pozitive, fiind respectiv egale cu

$$\alpha_1 R_1 \ , \quad \alpha_2 R_2 \ , \quad \alpha_3 R_3$$

și le înmulțim cu razele respective R_1, R_2, R_3, obținând

$$\alpha_1 R_1^2 \ , \quad \alpha_2 R_2^2 \ , \quad \alpha_3 R_3^2,$$

acestea sunt întradevăr, cu aproximația semnului, egale cu unitatea conform relației (51).

Rezumând, vitesa moleculei din $A(x, y, z)$ fiind v_A, vitesa unei alte molecule B din domeniul lui A, la distanța $d\bar{r} = \bar{r}'$, va fi după (41) și (44) în virtutea deformației și a rotației

$$\begin{aligned}\bar{v}_B &= \bar{v}_A + d\bar{v} = \bar{v}_A + \bar{r}'\,grad\,\bar{v}',\\ &= \bar{v}_A + \mathcal{T}\bar{r}' = \bar{v}_A + \mathcal{T}_s\bar{r}' + \mathcal{T}_a\bar{r}',\\ &= \bar{v}_A + \mathcal{T}_s\bar{r}' + [\bar{\omega}\bar{r}'],\end{aligned}$$

sau

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + grad\,\Phi'_B + [\bar{\omega}\bar{r}'],$$

iar pe cele trei axe

$$v_x = v_{Ax} + \frac{\partial\Phi'}{\partial x'} + \omega_y z' - \omega_z y'$$

$$v_y = v_{Ay} + \frac{\partial\Phi'}{\partial y'} + \omega_z x' - \omega_x z'$$

$$v_z = v_{Az} + \frac{\partial\Phi'}{\partial z'} + \omega_x y' - \omega_y x',$$

ECU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

care nu este altceva decât descompunerea din Cap. II (14) după *Helmholtz.*]

Dacă luăm pe $d\bar{r} = \bar{r}'$ chiar în direcția vitesei $\bar{v}$ din A și numeric egal cu $|\bar{v}|$, vom avea pentru $\bar{v}_B - \bar{v}_A = \bar{v}\,grad.\bar{v}$ (p. 46):

$$\bar{v}_B - \bar{v}_A = \bar{v}\,grad.\bar{v} = grad\,\Phi'_{\bar{r}'=\bar{v}} + [\bar{\omega}\,\bar{v}]. \qquad (52)$$

Elementul liniar *fluid* (compus din aceleași molecule) $AB = |d\bar{r}| = |\bar{r}'|$, datorită mișcării de deformație într'un interval dt, va deveni evident în proecție pe cele trei axe cu vârful în A:

$$x' + \frac{\partial \Phi'}{\partial x'}\,dt = x' + dt\,(\alpha_x\,x' + \beta_z\,y' + \beta_y\,z')$$

$$y' + \frac{\partial \Phi'}{\partial y'}\,dt = y' + dt\,(\alpha_y\,y' + \beta_x\,z' + \beta_z\,x')$$

$$z' + \frac{\partial \Phi'}{\partial z'}\,dt = z' + dt\,(\alpha_z\,z' + \beta_y\,x' + \beta_x\,y').$$

Lungimea $|\bar{r}'| = r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$ va deveni astfel, neglijând infinit micii de ordin superior și ținând seamă de (47):

$$\sqrt{r'^2 + 2\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x'}\,x' + \frac{\partial \Phi'}{\partial y'}\,y' + \frac{\partial \Phi'}{\partial z'}\,z'\right)dt} = \sqrt{r'^2 + 4\Phi' dt} = r' + 2\frac{\Phi' dt}{r'}.$$

Creșterea lungimei r' fiind astfel $2\frac{\Phi' dt}{r'}$ în timpul dt, vitesa de *creștere proporțională*, adică a unității de lungime în unitatea de timp (vitesa de dilatație α) în o direcție oarecare $\frac{d\bar{r}}{|d\bar{r}|} = \frac{\bar{r}'}{|\bar{r}'|}$, va fi (împărțind cu $r'dt$):

$$\alpha = 2\frac{\Phi'}{r'^2},$$

ceeace de altfel, pentru cazul elipsoidului de deformație cu $\Phi' = \pm\frac{1}{2}$ și $r' = |\bar{r}'|$ resultă imediat din (51.2).

Pentru $X' = r'$, $Y' = 0$, $Z' = 0$ trebue evident să găsim α_1, ceea ce se verifică după (49):

$$\alpha_1 = \frac{\alpha_1 X'^2}{X'^2} = \alpha_1.$$

APLICAȚIUNI DE CALCUL VECTORIAL.

Operațiuni simple.

Aplicația Nr. 1. Care este înțelesul geometric al relației:

$$(\bar{a}+\bar{b})^2 = a^2 + 2\bar{a}\,\bar{b} + b^2 ?$$

Răspuns. In trigonometrie această relație dă cosinusul unghiului cuprins între laturile $\bar{a}$ și $\bar{b}$, scriindu-se (dacă punem $\bar{a}+\bar{b}=\bar{c}$)

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(a,b).$$

Schimbarea semnului provine din faptul că unghiul interior dintre laturile a și b ale triunghiului este suplimentul unghiului format de vectorii $\bar{a}$ și $\bar{b}$.

Aplicația Nr. 2. Care este înțelesul geometric al relației:

$$(\bar{a}+\bar{b})\ (\bar{a}-\bar{b}) = a^2 - b^2,$$

în cazul când cei doi vectori au aceași valoare scalară?

Răspuns. $\bar{a}+\bar{b}$ și $\bar{a}-\bar{b}$ fiind diagonalele paralelogramului format de cei doi vectori, egalitatea laturilor acestuia (romb) atrage nulitatea produsului scalar din primul membru, ceea ce arată perpendicularitatea diagonalelor la un romb.

Aplicația Nr. 3. In geometria analitică în trei dimensiuni toate teoremele relative la plan și la dreaptă se obțin aproape imediat, dacă în loc de coordonate se introduce raza vectoare $\bar{r}$, direcțiunile fiind desemnate prin vectorii unitari respectivi.

A se stabili în felul acesta:

a) Ecuația planului, a cărui normală este în direcția $\bar{n}$, iar distanța la origină p.

b) Distanța unui punct $\bar{r}_0$ la acest plan.

c) Ecuația unui plan care trece prin trei puncte $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$, $\bar{r}_3$.

Răspuns. *a*) Proecția razei vectoare $\bar{r}\,[x,y,z]$ a unui punct al planului pe direcția $\bar{n}\,[n_x, n_y, n_z]$ va fi evident egală cu p, rezultând ecuația planului:

$$\bar{r}\,\bar{n} = xn_x + yn_y + zn_z = p.$$

b)
$$p_0 = (\bar{r}_0 - \bar{r})\,\bar{n} = \bar{r}_0\,\bar{n} - p.$$

c) Vectorii $(\bar{r}-\bar{r}_1)$, $(\bar{r}_2-\bar{r}_1)$ și $(\bar{r}_3-\bar{r}_2)$ fiind complanari, paralelipipedul format cu acești trei vectori va avea un volum nul:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0,$$

ceea ce formează ecuația căutată.

BCU IAȘI CARTEA UNIVERSITARĂ LIBRARY

Aplicația Nr 4. Să stabilim identitatea lui *Lagrange*, scrisă simetric:

$$[\overline{a}\,\overline{b}]\,[\overline{c}\,\overline{d}] + [\overline{b}\,\overline{c}]\,[\overline{a}\,\overline{d}] + [\overline{c}\,\overline{a}]\,[\overline{b}\,\overline{d}] = 0,$$

simetria constând în faptul că, pentru a scrie termenul al 2-lea sau al 3-lea mutăm perechea mijlocie de vectori a termenului precedent, ca produs vectorial, înaintea produsului vectorial al celorlalți doi vectori. Evident că ultimul termen va reproduce în același mod pe primul (operație ciclică).

Soluție. Comutativitatea produsului scalar permite să scriem:

$$[\overline{a}\,\overline{b}]\,[\overline{c}\,\overline{d}] = [\overline{c}\,\overline{d}]\,[\overline{a}\,\overline{b}]$$

și, aplicând între cei 3 vectori $\overline{c}$, $\overline{d}$ și $[\overline{a}\,\overline{b}]$ din ultimul membru egalitatea dintre două expresiuni echivalente ale volumului paralelipipedului respectiv, cu desvoltarea în urmă a triplului produs geometric, obținem:

$$[\overline{a}\,\overline{b}]\,[\overline{c}\,\overline{d}] = \overline{c}\,[\overline{d}\,[\overline{a}\,\overline{b}]] = \overline{c}\,\{\overline{a}\,(\overline{d}\,\overline{b}) - \overline{b}\,(\overline{d}\,\overline{a})\}$$

și tot astfel

$$[\overline{b}\,\overline{c}]\,[\overline{a}\,\overline{d}] = \overline{a}\,[\overline{d}\,[\overline{b}\,\overline{c}]] = \overline{a}\,\{\overline{b}\,(\overline{d}\,\overline{c}) - \overline{c}\,(\overline{d}\,\overline{b})\}$$

$$[\overline{c}\,\overline{a}]\,[\overline{b}\,\overline{d}] = \overline{b}\,[\overline{d}\,[\overline{c}\,\overline{a}]] = \overline{b}\,\{\overline{c}\,(\overline{d}\,\overline{a}) - \overline{a}\,(\overline{d}\,\overline{c})\},$$

constatând prin adunare nulitatea rezultatului.

Aplicația Nr. 5. A se stabili relația:

$$\overline{a}\,(\overline{b}\,[\overline{c}\,\overline{d}]) - \overline{b}\,([\overline{c}\,\overline{d}]\,\overline{a}) + \overline{c}\,(\overline{d}\,[\overline{a}\,\overline{b}]) - \overline{d}\,(\overline{c}\,[\overline{a}\,\overline{b}]) = 0.$$

Soluție. Considerând ca vector simplu mai întâi pe $[\overline{c}\,\overline{a}]$ și apoi pe $[\overline{a}\,\overline{b}]$, desvoltăm după regula tripului produs geometric următorul produs geometric a 2 asemenea produse de câte 2 vectori:

$$[[\overline{c}\,\overline{d}]\,[\overline{a}\,\overline{b}]] = \overline{a}\,(\overline{b}\,[\overline{c}\,\overline{d}]) - \overline{b}\,([\overline{c}\,\overline{d}]\,\overline{a})$$

$$[[\overline{a}\,\overline{b}]\,[\overline{c}\,\overline{d}]] = \overline{c}\,(\overline{d}\,[\overline{a}\,\overline{b}]) - \overline{d}\,([\overline{a}\,\overline{b}]\,\overline{c}).$$

Prin adunare se obține relația de mai sus, întrucât în primul membru avem 0.

Aplicația Nr. 6 A se rezolva următorul sistem de ecuații vectoriale

$$(\overline{x}\,\overline{a}) = p$$

$$[\overline{x}\,\overline{a}] = \overline{b}.$$

Răspuns. Înmulțind vectorial a doua ecuație cu $\overline{a}$ și desvoltând triplul produs geometric obținut, avem:

$$[\overline{a}\,[\overline{x}\,\overline{a}]] = [\overline{a}\,\overline{b}] = \overline{x}a^2 - \overline{a}\,(\overline{a}\,\overline{x}) = \overline{x}a^2 - \overline{a}p,$$

de unde

$$\overline{x} = \frac{[\overline{a}\,\overline{b}]}{a^2} + \frac{\overline{a}p}{a^2}.$$

Aplicația Nr. 7. Dându-se trei vectori $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, $\overline{a_3}$, a se găsi un vector $\overline{x}$, astfel ca să satisfacă următoarele ecuații vectoriale:

$$\overline{a_1}\,\overline{x} = \alpha_1$$

$$\overline{a_2}\,\overline{x} = \alpha_2$$

$$\overline{a_3}\,\overline{x} = \alpha_3.$$

Răspuns. Cum patru vectori sunt totdeauna liniar dependenți între ei, vom putea scrie:

$$\overline{x} = \lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2} + \lambda_3 \overline{a_3},$$

unde multiplicatorii λ_1, λ_2, λ_3 nu vor putea fi toți nuli.

Înmulțind scalar această relație succesiv cu $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, vom avea următorul sistem de ecuații neomogene în λ:

$$\alpha_1 = \lambda_1 (\overline{a_1}\,\overline{a_1}) + \lambda_2 (\overline{a_1}\,\overline{a_2}) + \lambda_3 (\overline{a_1}\,\overline{a_3})$$

$$\alpha_2 = \lambda_1 (\overline{a_2}\,\overline{a_1}) + \lambda_2 (\overline{a_2}\,\overline{a_2}) + \lambda_3 (\overline{a_2}\,\overline{a_3})$$

$$\alpha_3 = \lambda_1 (\overline{a_3}\,\overline{a_1}) + \lambda_2 (\overline{a_3}\,\overline{a_2}) + \lambda_3 (\overline{a_3}\,\overline{a_3}).$$

Acest sistem comportă o soluție determinată, numai atunci când am avea diferit de zero determinantul lui *Gram*, al celor 3 vectori $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, $\overline{a_3}$

$$D(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}) = \begin{vmatrix} \overline{a_1}\,\overline{a_1} & \overline{a_1}\,\overline{a_2} & \overline{a_1}\,\overline{a_3} \\ \overline{a_2}\,\overline{a_1} & \overline{a_2}\,\overline{a_2} & \overline{a_2}\,\overline{a_3} \\ \overline{a_3}\,\overline{a_1} & \overline{a_3}\,\overline{a_2} & \overline{a_3}\,\overline{a_3} \end{vmatrix},$$

care totodată este pătratul determinantului

$$\begin{vmatrix} a_{1x} & a_{1y} & a_{1z} \\ a_{2x} & a_{2y} & a_{2z} \\ a_{3x} & a_{3y} & a_{3z} \end{vmatrix}.$$

Pe când acesta trebue să fie nul, pentru ca cei trei vectori să fie liniar dependenți între ei, aci se cere ca pătratul său $D(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3})$ să fie din contra diferit de zero (deci vectori liniar independenți), pentru a avea o soluție. Fiind vorba de un pătrat, va trebui să avem, așa dar:

$$D(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}) > 0,$$

astfel că problema nu admite soluție, decât dacă vectorii $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, $\overline{a_3}$ sunt liniar independenți unul de altul. Rezolvind ecuațiile în λ, găsim soluția.

În loc de a rezolvi sistemul de mai sus în raport cu $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, spre a găsi pe

$$\overline{x} = \lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2} + \lambda_3 \overline{a_3},$$

putem proceda astfel: înmulțim cele trei ecuații vectoriale date respectiv cu

$$[\overline{a_2}\,\overline{a_3}], [\overline{a_3}\,\overline{a_1}], [\overline{a_1}\,\overline{a_2}]$$

și adunăm:

$$(\overline{x}\,\overline{a_1})[\overline{a_2}\,\overline{a_3}] + (\overline{x}\,\overline{a_2})[\overline{a_3}\,\overline{a_1}] + (\overline{x}\,\overline{a_3})[\overline{a_1}\,\overline{a_2}] = \alpha_1[\overline{a_2}\,\overline{a_3}] + \alpha_2[\overline{a_3}\,\overline{a_1}] + \alpha_3[\overline{a_1}\,\overline{a_2}].$$

Numind $\overline{N}$ vectorul din membrul al doilea și înmulțind scalar această relație succesiv cu $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$, obținem, punând $\overline{a_1}\,\overline{a_2}\,\overline{a_3} = V$ *):

$$(\overline{x}\ \overline{a_1})\ \overline{a_1}\ [\overline{a_2}\ \overline{a_3}] = \overline{N}\ \overline{a_1}$$

$$(\overline{x}\ \overline{a_2})\ \overline{a_2}\ [\overline{a_3}\ \overline{a_1}] = \overline{N}\ \overline{a_2}$$

$$(\overline{x}\ \overline{a_3})\ \overline{a_3}\ [\overline{a_1}\ \overline{a_2}] = \overline{N}\ \overline{a_3},$$

de unde

$$\overline{x}\ \overline{a_1} = \frac{\overline{N}\ \overline{a_1}}{V}$$

$$\overline{x}\ \overline{a_2} = \frac{\overline{N}\ \overline{a_2}}{V}$$

$$\overline{x}\ \overline{a_3} = \frac{\overline{N}\ \overline{a_3}}{V}.$$

Din egalitatea dintre două produse scalare a doi vectori și aceia dintre unul din factori, nu rezultă în general egalitatea și a celui de al doilea; aci însă egalitatea are loc între 3 produse scalare a celor 2 vectori $\overline{x}$ și $\frac{\overline{N}}{V}$ (sau $V\overline{x} = \overline{A}$ și $\overline{N}$) separat cu fie care din alți trei vectori diferiți $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$, în care caz rezultă totdeauna egalitate între primii cei doi vectori, cu condiția ca $V \neq 0$ ($\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$ să fie cu direcții diferite necomplanare). Așa dar vom avea și aci:

$$\overline{x} = \frac{\overline{N}}{V} = \frac{\alpha_1 [\overline{a_2}\ \overline{a_3}] + \alpha_2 [\overline{a_3}\ \overline{a_1}] + \alpha_3 [\overline{a_1}\ \overline{a_2}]}{\overline{a_1}\ \overline{a_2}\ \overline{a_3}}.$$

Într'adevăr, având

$$\overline{A}\ \overline{a_1} = \overline{N}\ a_1$$

$$\overline{A}\ \overline{a_2} = \overline{N}\ a_2$$

$$\overline{A}\ \overline{a_3} = \overline{N}\ \overline{a_3}$$

sau

$$A_x a_{1x} + A_y a_{1y} + A_z a_{1z} = N_x a_{1x} + N_y a_{1y} + N_z a_{1z}$$

$$A_x a_{2x} + A_y a_{2y} + A_z a_{2z} = N_x a_{2x} + N_y a_{2y} + N_z a_{2z}$$

$$A_x a_{3x} + A_y a_{3y} + A_z a_{3z} = N_x a_{3x} + N_y a_{3y} + N_z a_{2z},$$

rezultă:

$$(A_x - N_x)\, a_{1x} + (A_y - N_y)\, a_{1y} + (A_z - N_z)\, a_{1z} = 0$$

$$(A_x - N_x)\, a_{2x} + (A_y - N_y)\, a_{2y} + (A_z - N_z)\, a_{2z} = 0$$

$$(A_x - N_x)\, a_{3x} + (A_y - N_y)\, a_{3y} + (A_z - N_z)\, a_{2z} = 0.$$

---

*) Intru cât volumul paralelipipedului, format cu cei trei vectori, au drept expresii echivalente:

$$V = \overline{a_1}\,[\overline{a_2}\ \overline{a_3}] \equiv \overline{a_2}\,[\overline{a_3}\ \overline{a_1}] \equiv \overline{a_3}\ [\overline{a_1}\ \overline{a_2}] \equiv [\overline{a_1}\ \overline{a_2}]\ \overline{a_3} \equiv [\overline{a_2}\ \overline{a_3}]\ \overline{a_1} \equiv [\overline{a_3}\ \overline{a_1}]\ \overline{a_2},$$

în care s'a păstrat condiționat ordinea ciclică, putem lăsa paranteza de o parte:

$$V = \overline{a_1}\ \overline{a_2}\ \overline{a_3} \equiv \overline{a_2}\ \overline{a_3}\ \overline{a_1} \equiv \overline{a_3}\ \overline{a_1}\ \overline{a_2}.$$

BIBLIOTECA CENTRALĂ UNIVERSITARĂ

Ori, acest sistem, atunci când determinantul format din a_{1x}, a_{1y}, a_{1z} etc. este diferit de zero, comportă unica soluție

$$A_x = N_x, \quad A_y = N_y, \quad A_z = N_z, \text{ adică } \overline{A} = \overline{N}.$$

Aceasta se vede mai clar geometric: dintr'o origină comună a celor trei vectori (necomplanari) a_1, a_2, a_3 și a vectorului $\overline{A}$, luând proecția vectorului $\overline{A}$ pe fiecare din primii, dacă din picioarele de proecție vom duce planurile normale pe vectorii respectivi, aceste planuri se vor tăia în extremitatea lui $\overline{A}$. Cum acest punct există și este unic, atunci când cei 3 vectori au direcții diferite necomplanare, nu poate exista un vector diferit $\overline{N} \neq \overline{A}$, care să dea aceleași proecții pe $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, $\overline{a_3}$ și, în consecință, aceleași produse scalare cu acești vectori.

Aplicația Nr. 8. — Cum o ecuație vectorială echivalează cu trei ecuațiuni algebrice, a se găsi x, y, z din ecuația vectorială:

$$\overline{p} = x\overline{a} + y\overline{b} + z\overline{c}.$$

Răspuns. Dacă s'ar lua $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ drept vectori unitari pe cele trei direcțiuni respective, în general oblice, x, y, z ar fi evident componentele oblice ale vectorului $\overline{p}$.

Ca să găsim pe x, înmulțim scalar ecuația cu $[\overline{b}\ \overline{c}]$ spre a face să dispară ceilalți doi termeni necunoscuți, obținând astfel

$$\overline{p}\,[\overline{b}\,\overline{c}] = x\,\overline{a}\,[\overline{b}\,\overline{c}],$$

de unde

$$x = \frac{\overline{p}\,[\overline{b}\,\overline{c}]}{\overline{a}\,[\overline{b}\,\overline{c}]},$$

și așa mai departe. Soluția geometrică apare imediat: găsirea unui punct, cunoscându-i coordonatele oblice.

Aplicația Nr. 9. A se desvolta produsul scalar:

$$[\overline{a}\,\overline{b}]\,[\overline{c}\,\overline{d}].$$

Răspuns. Punând $[\overline{a}\,\overline{b}] = \overline{e}$, produsul se scrie succesiv:

$$\overline{e}\,[\overline{c}\,\overline{d}] = [\overline{e}\,\overline{c}]\,\overline{d} = -\,\overline{d}\,[\overline{c}\,[\overline{a}\,\overline{b}]]$$

$$= -\,\overline{d}\,[\overline{a}\,(\overline{c}\,\overline{b}) - \overline{b}\,(\overline{c}\,\overline{a})] = (\overline{d}\,\overline{b})\,(\overline{c}\,\overline{a}) - (\overline{d}\,\overline{a})\,(\overline{c}\,\overline{b}).$$

Aplicația Nr. 10. A se desvelta produsul vectorial:

$$[\,[\overline{a}\,\overline{b}]\,[\overline{c}\,\overline{d}]\,].$$

Răspuns. Punând $[\overline{a}\,\overline{b}] = \overline{e}$ și desvoltând obținem:

$$\overline{c}\,(\overline{e}\,\overline{d}) - \overline{d}\,(\overline{e}\,\overline{c}) = \overline{c}\,(\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{d}) - \overline{d}\,(\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}),$$

deci un vector în planul $\overline{c}$, $\overline{d}$. Dacă punem în schimb analog $[\overline{c}\,\overline{d}] = \overline{f}$, obținem:

$$\overline{b}\,(\overline{f}\,\overline{a}) - \overline{a}\,(\overline{f}\,\overline{b}) = \overline{b}\,(\overline{c}\,\overline{d}\,\overline{a}) - \overline{a}\,(\overline{c}\,\overline{d}\,\overline{b}),$$

deci un vector în planul $\overline{a}, \overline{b}$.

Produsul vectorial căutat va fi, așa dar, în direcția intersecției celor două planuri $\overline{a}, \overline{b}$ și $\overline{c}, \overline{d}$.

Aplicația Nr. 11. A se rezolvi ecuația:

$$\overline{p} = x\,[\overline{b}\,\overline{c}] + y\,[\overline{c}\,\overline{a}] + z\,[\overline{a}\,\overline{b}].$$

Răspuns: Găsim la fel ca la Nr. 8, folosind Nr. 10:

$$x = \frac{\overline{p}\;\overline{a}}{[\overline{b}\,\overline{c}]\;\overline{a}} \quad \text{etc.}$$

Aplicația Nr. 12. A se demonstra următoarea inegalitate:

$$(\overline{a}\,\overline{b})\,(\overline{a}\,\overline{b}) \leq (\overline{a}\,\overline{a})\,(\overline{b}\,\overline{b}).$$

Răspuns. Aceasta revine a arăta că

$$(\overline{a}\,\overline{b})^2 \leq a^2 b^2,$$

ceea ce este evident, dacă scriem primul membru desvoltat:

$$a^2b^2 \cos^2(a,b) \leq a^2b^2 \quad \text{sau} \quad \cos^2(a,b) \leq 1.$$

Aplicația Nr. 13. A se demonstra relația:

$$[(\overline{a}+\overline{b})\,(\overline{a}-\overline{b})] = -2\,[\overline{a}\,\overline{b}].$$

Răspuns. Aplicăm principiul distributivității, constatând apoi că:

$$[\overline{a}\,\overline{a}] = [\overline{b}\,\overline{b}] = 0 \quad \text{și} \quad [\overline{b}\,\overline{a}] = -[\overline{a}\,\overline{b}].$$

Aplicația Nr. 14. Privitor la paralelogramul format de vectorii $\overline{a}$ și $\overline{b}$, orientarea lui este dată de perpendicularitatea pe vectorul $\overline{p} = [\overline{a}\,\overline{b}]$. Acest vector poate reprezenta astfel numitul paralelogram ca mărime și direcție și chiar ca sens de parcurgere periferică, dacă convenim a-l parcurge în sensul dat de vectorii ordonați $\overline{a}, \overline{b}$ (așezând originea lui $\overline{b}$ la extremitatea lui $\overline{a}$), și care este sensul rotației indicat de $\overline{p}$ la un triedru congruent cu $\overline{a}, \overline{b}, \overline{p}$.

Forma paralelogramului, reprezentat numai de $\overline{p}$, rămâne bineînțeles nedeterminată, ori ce suprafață plană, având aceleași arie, orientare și sens de parcurgere a conturului, fiind reprezentată prin același vector $\overline{p}$. Putem în acest caz nota o suprafață plană orientată, prin aria σ prevăzută cu semnul distinctiv al vectorului: $\overline{\sigma}$. La un poliedru închis luând vectorii $\overline{\sigma_i}$ ai diferitelor fețete astfel, ca sensul lor să fie îndreptat în exterior, a se demonstra că avem:

$$\Sigma \overline{\sigma_i} = 0$$

și deci pentru orice suprafață închisă:

$$\oint \overline{d\sigma} = 0.$$

Demonstrație. Este suficient a arăta că relația în chestiune este exactă în cazul tetraedrului, fiindcă orice poliedru se poate împărți în tetraedre și, la adunarea termenilor relativi la elementele de volum dispărând termenii comuni ce apar doi câte doi egali și de sens contrar, rămân numai termenii relativi la fețele poliedrului.

Ori, la un tetraedru (fig. 19) considerând vectorii $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ după muchile

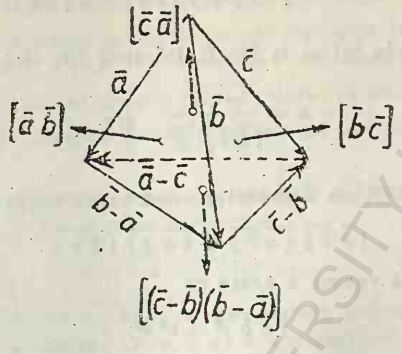


Fig. 19

unuia din unghiurile triedre, cu origina în vârful respectiv, celelalte muchii vor reprezenta cu necesitate vectorii:

$$\overline{b}-\overline{a},\ \overline{c}-\overline{b},\ \overline{a}-\overline{b}.$$

Produsele vectoriale $[\overline{a}\,\overline{b}]$, $[\overline{b}\,\overline{c}]$, $[\overline{c}\,\overline{a}]$, orientate înspre exterior, reprezintă fețele triedrului menționat. Rămâne a calcula produsul vectorial, care reprezintă a patra față.

Luând două oarecari din cele trei laturi ale acestei fețe, de ex. $\overline{c}-\overline{b}$ și $\overline{b}-\overline{a}$, vom avea vectorul respectiv în expresia $[(c-b)\,(b-a)]$. Desvoltând cele patru produse vectoriale, se constată ușor că suma lor este nulă.

O demonstrație imediată a relației $\oint \overline{d\sigma} = 0$ se poate da pe cale mecanică, presupunând că suprafața închisă este supusă unei presiuni exterioare uniform repartizate $p=1$, presiunea elementară pe $d\sigma$ fiind reprezentată în mărime, direcție și cu sens opus, de vectorul $\overline{d\sigma}$. Se știe că rezultanta acestei presiuni este totdeauna nulă, ceea ce dealtfel se poate stabili și prin următorul raționament.

Să admitem că presiunile în chestiune sunt datorite unui fluid elastic înconjurător, inponderabil sau de o densitate nulă, care este în echilibru.

Dacă suprimăm corpul, înlocuindu-l cu același fluid, masa substituită se va găsi evident în echilibru sub acțiunea presiunilor exterioare ei, care sunt cele considerate (greutatea proprie fiind admisă nulă), ceeace s'a spus și în Hidrostatica.

Aplicația Nr. 15. A se efectua înmulțirea între cei 2 scalari din paranteze:

$$(\overline{a}\,[\overline{b}\,\overline{c}])\,(\overline{d}\,[\overline{e}\,\overline{f}]).$$

Răspuns. In fiecare din factori avem expresia unui volum de paralelipiped (cu aproximația semnului), care se poate pune și sub formă de determinant. Vom avea astfel:

$$\overline{(a\,[\overline{b\,c}])\,(\overline{d\,[\overline{e\,f}]})} = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d_x & e_x & f_x \\ d_y & e_y & f_y \\ d_z & e_z & f_z \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_x d_x + a_y d_y + a_z d_z & a_x e_x + a_y e_y + a_z e_z & a_x f_x + a_y f_y + a_z f_z \\ b_x d_x + b_y d_y + b_z d_z & b_x e_x + b_y e_y + b_z e_z & b_x f_x + b_y f_y + b_z f_z \\ c_x d_x + c_y d_y + c_z d_z & c_x e_x + c_y e_y + c_z e_z & c_x f_x + c_y f_y + c_z f_z \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \overline{a\,d} & \overline{a\,e} & \overline{a\,f} \\ \overline{b\,d} & \overline{b\,e} & \overline{b\,f} \\ \overline{c\,d} & \overline{c\,e} & \overline{c\,f} \end{vmatrix}.$$

In caz de identitate a factorilor scalari avem:

$$\overline{(a\,[b\,c])}^2 = \begin{vmatrix} a^2 & \overline{a\,b} & \overline{a\,c} \\ \overline{b\,a} & b^2 & \overline{b\,c} \\ \overline{c\,a} & \overline{c\,b} & c^2 \end{vmatrix},$$

Derivări spațiale mai complicate cu ajutorul operatorului lui Hamilton.

Ca extindere a unei proprietăți, verificată și utilizată în cazurile simple, operațiunile de derivare spațială: *grad, div, rot, grad.* (de vector) se pot efectua rapid și în cazul unui *produs scalar sau vectorial de două sau mai multe funcțiuni spațiale* (adică de x, y, z), la rândul lor scalare sau vectoriale, de asemenea și *derivările spațiale duble*, cu ajutorul operatorului lui *Hamilton*: *nabla*, drept factor simbolic.

Vom întrebuința numai notația ∇ (*nabla*), care a fost adoptată în cele mai multe tratate, deși notația $\overline{D}$ (*del*), întrebuințată de ex. în cartea lui *Coffin*, reamintește mai bine operația de *derivare*, exprimată printr'un factor *vectorial*.

In nici un caz nu trebue pierdut din vedere că operatorul lui *Hamilton*, în rolul lui de factor simbolic, este în realitate un *operator de derivare*. Ca atare, dacă facem abstracție de diade și tensorii de care nu este vorbă aci, ele ascultând de alte reguli, ∇ operează în general ceeace stă la dreapta lui ca funcție de x, y, z (adică spațială), fie scalară fie vectorială. Cum însă, la *derivarea unui produs*, operația trebue făcută succesiv la fiecare factor al produsului, ceilalți rămânând constanți, spre a înlătura orice confuzie vom pune la simbolul operatorului, ca indice distinctiv, pentru aceste faze parțiale ale derivării, litera funcțiunii asupra căreia se operează, chiar dacă întâmplător acea funcțiune se găsește la stânga nablei, dar prin permutări permise poate fi adusă la dreapta ei.

La aceste operațiuni de derivare spațială se recomandă a se păstra regula practică de a plasa, în cele din urmă, funcțiunea de derivat la dreapta operato-

rului și *alipit de acesta*, în care caz indicele dinstinctiv se poate suprima. În acest scop va trebui folosită la nevoe facultatea de a interverti ordinea factorilor. Astfel, la un produs scalar așezat la dreapta, permutarea factorilor se poate face fără schimbare de semn iar la un produs vectorial cu schimbare de semn, un factor simplu sau un produs constant așezat la stânga se poate muta la dreapta nablei și vice-versa, etc.

După efectuarea operațiilor cu ajutorul simbolului ∇, acesta se poate înlocui cu simbolul explicit de derivare spațială, conform interpretării adecuate. Astfel, ∇ înaintea unui scalar nu poate fi decât un *gradient*, $\nabla\overline{u}$ este o *divergență*, $[\nabla\overline{u}]$ un *rotor* etc.

Pentru exemplele ce urmează este util a încerca și alte simboluri.

Să examinăm de ex. ce sens se poate atribui operatorilor obținuți prin permutarea factorilor la produsele simbolice simple studiate, și anume operatorilor $\Phi\nabla$, $\overline{u}\nabla$, $[\overline{u}\nabla]$, urmați de o funcțiune spațială simplă, scalară sau vectorială.

Astfel

$$\Phi\nabla \equiv \Phi x\frac{\partial}{\partial x} + \Phi y\frac{\partial}{\partial y} + \Phi z\frac{\partial}{\partial z}$$

ar fi o simplă multiplicare a operatorului ∇.

Operația $[\overline{u}\nabla]$ nu prezintă utilitate.

În schimb am fost conduși a întrebuința simbolul operator

$$\overline{u}\nabla = (\overline{u}\nabla) = \overline{u}\,grad. = (\overline{u}\,grad) = ux\frac{\partial}{\partial x} + uy\frac{\partial}{\partial y} + uz\frac{\partial}{\partial z}$$

(pe care îl vom considera că operează asupra unei funcții așezate la dreapta, făcând abstracție de orice apropiere cu o diadă), care, în legătură cu o funcție scalară Φ dă :

$$\overline{u}\nabla\,\Phi \equiv \overline{u}\,grad\,\Phi,$$

nefiind aci necesar a despărți pe Φ prin paranteză sau un punct.

Dacă însă în loc de Φ avem un vector $\overline{v}$ (în care caz aceași regula de mai sus se aplică componentelor lui scalare), atunci $\overline{v}$ se desparte obișnuit prin paranteză sau un punct (întrucât *grad* simplu se aplică la scalari).

În acest caz

$$\overline{u}\nabla.\overline{v} \equiv (\overline{u}\nabla).\overline{v} \equiv \overline{u}\,grad\,.\,\overline{v} \equiv (\overline{u}\,grad)\,\overline{v}$$

reprezintă *prin definiție* rezultanta vectorilor cu valori scalare :

$$\overline{u}\,grad\,vx\,, \qquad \overline{u}\,grad\,vy\,, \qquad \overline{u}\,grad\,vz\,,$$

orientați după cele 3 axe, adică obținuți din aceste expresii scalare, înmulțite respectiv cu x, y, z.

În privința interpretării avem, în primul caz :

$$\overline{u}\nabla\Phi \equiv \overline{u}\,grad\,\Phi \equiv ux\frac{\partial\Phi}{\partial x} + uy\frac{\partial\Phi}{\partial y} + uz\frac{\partial\Phi}{\partial z} \equiv u\left\{\frac{\partial\Phi}{\partial x}\cos(\overline{ux}) + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\cos(\overline{uy}) + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\cos(\overline{uz})\right\}$$

$$\equiv u\left\{\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{dx}{du} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{dy}{du} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{dz}{du}\right\} \equiv u\frac{\partial\Phi}{\partial u},$$

înțelegând prin *du* o deplasare elementară în direcția vectorului $\overline{u}$.

Ultima expresie arată cu $\overline{u}\,grad\,\Phi$ este creșterea scalarului Φ, atunci când ne deplasăm (infinitezimal) cu unitatea de lungime în direcția $\overline{u}$ (derivata vectorială a lui Φ în direcția $\overline{u}$), înmulțită cu $|\overline{u}| = u$. Dacă $\overline{u}$ este vectorul unitar $\overline{s}$ sau $\overline{n}$ în o direcție oarecare, avem pur și simplu derivata vectorială a lui Φ în acea direcție:

$$\overline{s}\,\nabla\,\Phi \equiv \overline{s}\,grad\,\Phi \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial s}$$

$$\overline{n}\nabla\,\Phi \equiv \overline{n}\,grad\,\Phi \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial n}.$$

In al doilea caz avem:

$$(\overline{u}\,\nabla)\,\overline{v} \equiv \overline{u}_{\nabla}.\overline{v} \equiv \overline{(u\,grad)}\,\overline{v} \equiv \overline{u}\,grad.\overline{v} \equiv u_x \frac{\partial \overline{v}}{\partial x} + u_y \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} + u_z \frac{\partial \overline{v}}{\partial z},$$

care se poate scrie analog ca mai sus

$$u\left\{\frac{\partial \overline{v}}{\partial x}\frac{dx}{du} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial y}\frac{dy}{du} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial z}\frac{dz}{du}\right\} = u\,\frac{\partial \overline{v}}{\partial u};$$

se vede că $\overline{u}\,grad.\,\overline{v}$ este creșterea lui $\overline{v}$ când ne deplasăm infinitesimal cu unitatea de lungime în direcția $\overline{u}$, înmulțită cu $|\overline{u}| \equiv u$.

Interpretarea este deci identică ca în cazul funcțiunii scalare Φ. Însemnarea cu punct: $\overline{u}\,grad.\,\overline{v}$ are avantajul (independent de interpretarea matematică, de a vedea în această expresie pe $\overline{u}$ operat de un produs diadic: $grad.\,\overline{v}$ sau $\nabla.\overline{v}$ între vectorii ∇ și $\overline{v}$), ca la scrierea $\overline{u}\nabla.\overline{v}$ să fim conduși a efectua produsul scalar $\overline{u}\nabla$

$$= u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} + u_z \frac{\partial}{\partial z},$$

alipind apoi la fiecare termen pe $\overline{v}$, pe când $\overline{u}\,\nabla\,\overline{v}$ s'a putea interpreta și $\overline{u}\,div\,\overline{v}$.

Interpretarea geometrică a lui $\overline{v}\,grad\,.\,\overline{v}$, dată aci, concordă exact cu acea dată lui $\overline{ds}\,grad\,.\,\overline{v} = \overline{dv}$, de a exprima anume variația vectorului $\overline{v}$ atunci când ne deplasăm în direcția $\overline{dr} = \overline{ds}$ cu $|\overline{ds}| = ds$. Dacă ne deplasăm (infinitisimal) cu unitatea, avem derivata vectorială a vectorului $\overline{v}$ în direcția $\overline{s}$: $\frac{\partial \overline{v}}{|\overline{ds}|} = \overline{s}\,grad.\overline{v}$.

Aplicația Nr. 16. Derivare spațială a unui produs scalar de funcțiuni:

a) $grad\,\Phi\chi \equiv \nabla_{\Phi}\Phi\chi + \nabla_{\chi}\Phi\chi = \chi\,\nabla_{\Phi}\Phi\nabla + \Phi\nabla_{\chi}\chi \equiv \chi\,grad\,\Phi + \Phi\,grad\,\chi$

b) $grad\,\Phi\chi\psi \equiv \nabla_{\Phi}\Phi\chi\psi + \nabla_{\chi}\Phi\chi\psi + \nabla_{\psi}\Phi\chi\psi \equiv \chi\psi\,grad\,\Phi + \Phi\psi\,grad\,\chi + \Phi\chi\,grad\,\psi.$

Aplicația Nr. 17. Derivări spațiale a produsului unei funcțiuni scalare cu alta vectorială:

a) $div\,\Phi\overline{v} \equiv \nabla_{\Phi}\Phi\overline{v} + \nabla_{v}\Phi\overline{v} \equiv \overline{v}\,grad\,\Phi + \Phi\,div\,\overline{v}.$

b) $rot\,\Phi\overline{v} \equiv [\nabla_{\Phi}\Phi\overline{v}] + [\nabla_{v}\Phi\overline{v}] \equiv -[\overline{v}\nabla\Phi] + [\Phi\,\nabla\,\overline{v}] \equiv [grad\,\Phi.\,\overline{v}] + \Phi\,rot\,\overline{v}.$

Aplicația Nr. 18. Derivări spațiale de produse de 2 funcțiuni de x, y, z vectoriale:

a) $grad\,(\overline{u}\,\overline{v}) \equiv \nabla(\overline{u}\,\overline{v}) \equiv \nabla_u \overline{u}\,\overline{v} + \nabla_v \overline{v}\,\overline{u}.$

Ori, desvoltând triplul produs geometric:

$$[\overline{u}\,rot\,\overline{v}] \equiv [\overline{u}\,[\nabla\overline{v}]] \equiv \nabla_v \overline{u}\,\overline{v} - \overline{v}.\overline{u}\,\nabla_v \equiv \nabla_v \overline{v}\,\overline{u} - \overline{u}\nabla.\overline{v},$$

scoatem

$$\nabla_v \overline{v}\,\overline{u} \equiv [\overline{u}\,rot\,\overline{v}] + \overline{u}\,grad.\overline{v}$$

și deci

$$grad\,(\overline{u}\,\overline{v}) \equiv [\overline{u}\,rot\,\overline{v}] + \overline{u}\,grad.\overline{v} + [\overline{v}\,rot\,\overline{u}] + \overline{v}\,grad.\overline{u}$$

b) $div\,[\overline{u}\,\overline{v}] \equiv \nabla_u [\overline{u}\,\overline{v}] + \nabla_v [\overline{u}\,\overline{v}] \equiv [\nabla_u \overline{u}]\,\overline{v} - \nabla_v [\overline{v}\,\overline{u}] \equiv [\nabla\overline{u}]\,\overline{v} - [\nabla\overline{v}]\,\overline{u}$

$$\equiv \overline{v}\,rot\,\overline{u} - \overline{u}\,rot\,\overline{v}$$

c) $rot\,[\overline{u}\,\overline{v}] \equiv [\nabla_u [\overline{u}\,\overline{v}]] + [\nabla_v [\overline{u}\,\overline{v}]] \equiv [\nabla_u [\overline{u}\,\overline{v}]] - [\nabla_v [\overline{v}\,\overline{u}]].$

Or

$$[\nabla_u [\overline{u}\,\overline{v}]] \equiv \overline{u}.\nabla_u \overline{v} - \overline{v}.\nabla\overline{u} \equiv \overline{v}\,\nabla.\overline{u} - \overline{v}.\nabla\overline{u}.$$

Rezultă

$$rot\,[\overline{u}\,\overline{v}] \equiv \overline{v}\,grad.\overline{u} - \overline{v}\,div\,\overline{u} - \overline{u}\,grad.\overline{v} + \overline{u}\,div\,\overline{v}.$$

Aplicația Nr. 19. Dublă derivare de funcțiuni spațiale scalare.

a) Produsul scalar al lui ∇ cu vectorul $\nabla\Phi$ conduce la:

$$div\,grad\,\Phi \equiv \nabla\,\nabla\Phi \equiv \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\Phi}{\partial z} \equiv \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \equiv \nabla\Phi.$$

Se vede că, în cazul unei funcțiuni simple scalare de spațiu, înmulțirea scalară a operatorului ∇ cu el însuși conduce la operatorul lui *Laplace* Δ, însă în cazul unui produs de mai multe funcțiuni, această înlocuire nu este utilă, operațiunile trebuind făcute succesiv (vezi și aplicația Nr. 17):

$$div\,grad\,\Phi\chi \equiv \nabla\nabla\,\Phi\chi \equiv \nabla\,(\Phi\nabla\chi + \chi\nabla\Phi) \equiv div\,(\Phi\,grad\,\chi + \chi\,grad\,\Phi)$$

$$\equiv \Phi\Delta\chi + \chi\Delta\Phi + 2\,grad\,\Phi\,grad\,\chi.$$

b) Produsul vectorial al lui ∇ cu vectorul $\nabla\Phi$ conduce la:

$$rot\,grad\,\Phi \equiv [\nabla\nabla\Phi] \equiv \Phi\,[\nabla\nabla] \equiv 0,$$

rezultat cunoscut, aci însă dedus imediat.

Aplicația Nr. 20. Dublă derivare de funcțiuni spațiale vectoriale:

a) Produsul scalar al lui ∇ cu vectorul $[\nabla\overline{v}]$ conduce la:

$$div\,rot\,\overline{v} \equiv \nabla\,[\nabla\overline{v}] \equiv [\nabla\nabla]\,\overline{v} \equiv 0.$$

BCU IAȘI - CENTRUL UNIVERSITAR LIBRARY

b) Produsul lui ∇ cu scalarul $\nabla\overline{v}$ conduce la *grad div* $\overline{v} \equiv \nabla.\nabla\overline{v}$ (despărțind produsul scalar $\nabla\overline{v}$ printr'un punct ca la diade), care însă nu se poate trata ușor simbolic. In coordonate cartesiene avem desvoltarea :

$$\overline{x}\frac{\partial}{\partial x} div\,\overline{v}+\overline{y}\frac{\partial}{\partial y} div\,\overline{v}+\overline{z}\frac{\partial}{\partial z} div\,\overline{v}=\mathbf{x}\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial x\partial z}\right)$$
$$+\mathbf{y}\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial y\partial z}\right)$$
$$+\mathbf{z}\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial z\partial x}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial z\partial y}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right).$$

c) Produsul vectorial al lui ∇ cu vectorul $[\nabla\overline{v}]$ conduce, cu ajutorul expresiei *b*), la *rot rot* $\overline{v}$ într'o formă importantă în hidro-dinamică :

$$rot\,rot\,\overline{v} = [\nabla[\nabla\overline{v}]] = \nabla.\nabla\overline{v} - \overline{v}.\nabla\nabla = grad\,div\,\overline{v} - \nabla\nabla.\overline{v} = grad\,div\,\overline{v} - \Delta\overline{v}.$$

Faptul că și în cazul unui vector se poate scrie :

$$\nabla\nabla.\overline{v} = \Delta\overline{v},$$

rezultă și din scrierea în coordonate carteziene a expresiei *rot rot* $\overline{v}$ și scăderea din ea a expresiei *grad div* $\overline{v}$. Este inutil a scrie $\Delta.\overline{v}$ cu punct, fiindcă Δ este produsul scalar $\nabla\nabla$ efectuat, și nu mai poate fi confundat cu $\nabla.\nabla\overline{v}$.

Aplicația Nr. 21. A se calcula

$$grad\,(\overline{u}\,\overline{v}\,\overline{w}).$$

Răspuns :

$$grad\,(\overline{u}\,\overline{v}\,\overline{w}) = grad_u\,(\overline{u}\,[\overline{v}\,\overline{w}]) + grad_v\,(\overline{v}\,[\overline{w}\,\overline{u}]) + grad_w\,\overline{w}\,[\overline{u}\,\overline{v}]).$$

Punând, în primul termen din membrul al doilea, $[\overline{v}\,\overline{w}] = \overline{a}$ cu $\overline{a}$ constant, găsim

$$grad\,(\overline{u}\,\overline{a}) = \nabla\,(\overline{u}\,\overline{a}) = [\overline{a}\,rot\,\overline{u}] + \overline{a}\,grad.\,\overline{u}$$

și deci

$$grad_u\,(\overline{u}\,[\overline{v}\,\overline{w}]) = [[\overline{v}\,\overline{w}]\,rot\,\overline{u}] + [\overline{v}\,\overline{w}]\,grad.\,\overline{u}.$$

In mod analog se transformă și ceilalți doi termeni.

Aplicația Nr. 22. A se demonstra următoarele formule ale vectorului de poziție $\overline{r}(x, y, z)$, cea mai simplă funcție vectorială de spațiu și care are o deosebită importanță în Hidrodinamică. Vectorii $\overline{a}$ și $\overline{b}$ sunt presupuși constanți :

a) $rot\,\overline{r} = 0.$

b) $div\,\overline{r} = 3.$

c) $grad\,(\overline{r}\,\overline{a}) = \overline{a}.$

d) $rot\,[\overline{r}\,\overline{a}] = -2\,\overline{a}.$

e) $div\,[\overline{r}\,\overline{a}] = 0.$

BIBLIOTECA CENTRALĂ UNIVERSITARĂ

Răspuns:

$$a)\ \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z} = 0 \text{ etc.}$$

$$b)\ \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3.$$

$$c)\ grad\ (\overline{r}\,\overline{a}) = \overline{a}\ grad\,.\,\overline{r} = \overline{a},$$

căci $\overline{a}\ grad.\ \overline{r}$ are drept componente $\overline{a}\ grad\ x$, $\overline{a}\ grad\ y$, $\overline{a}\ grad\ z$, adică

$$\overline{a}\ grad\ x = a_x \frac{\partial x}{\partial x} + a_y \frac{\partial x}{\partial y} + a_z \frac{\partial x}{\partial z} = a_x, \text{ etc.}$$

$$d)\ rot\ [\overline{r}\,\overline{a}] = \overline{a}\ grad\,.\,\overline{r} - \overline{a}\ div\ \overline{r} = \overline{a} - 3\,\overline{a} = -2\,\overline{a}.$$

$$e)\ div\ [\overline{r}\,\overline{a}] = \overline{a}\ rot\ \overline{r} = 0.$$

Aplicația Nr. 23. A se demonstra următoarele formule, relativ la vectorul $\overline{r}$.

$$a)\ rot\ (\overline{b}.\ \overline{r}\ \overline{a}) = [\overline{a}\,\overline{b}]\,.$$

$$b)\ div\ (\overline{b}.\ \overline{r}\ \overline{a}) = \overline{a}\ \overline{b}.$$

$$c)\ grad\ r = \frac{\overline{r}}{r}\,.$$

$$d)\ grad\ \frac{1}{r} = -\frac{r}{r^3}\,.$$

$$e)\ div\ (r\,\overline{a}) = \frac{\overline{r}\ \overline{a}}{r}\,.$$

$$f)\ \overline{a}\ grad\ r = \frac{\overline{a}\ \overline{r}}{r}\,.$$

$$g)\ rot\ (r\,\overline{a}) = [\overline{r}\,\overline{a}]\,.$$

$$h)\ grad\ \frac{\overline{a}\ \overline{r}}{r^n} = \frac{\overline{a}}{r^n} = \frac{n\,\overline{r}.\ \overline{a}\ \overline{r}}{r^{n+2}}\,.$$

$$i)\ rot\ \frac{[\overline{a}\,\overline{r}]}{r^n} = \frac{(2-n)\,\overline{a}}{r^n} - \frac{n\,\overline{r}.\ \overline{a}\ \overline{r}}{r^{n+2}}\,.$$

j) Raza de curbură $\overline{R}$ a unei curbe oarecare este dată de relația

$$\frac{\overline{R}}{R} = \frac{d^2\overline{r}}{ds^2}\,.$$

Răspuns:

$$a)\ rot\ (\overline{r}\ \overline{a}\cdot\overline{b}) = [grad\ (\overline{r}\,\overline{a})\,.\overline{b}] = [\overline{a}\,\overline{b}]\,.$$

$$b)\ div\ (\overline{r}\ \overline{a}\ .\overline{b}) = \overline{b}\ grad\ (\overline{r}\,\overline{a}) = \overline{b}\ \overline{a}.$$

BCU CLUJ CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

c) $grad\ r = x\frac{\partial(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{\partial x} + y\frac{\partial(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{\partial y} + z\frac{\partial(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{\partial z}$

$$= (x\,x + y\,y + z\,z)(x^2+y^2+z^2)^{-1/2} = \frac{\overline{r}}{r}$$

d) $grad\frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}\,grad\,r = -\frac{\overline{r}}{r^3}$.

e) $div\,(\overline{r}\,\overline{a}) = \overline{a}\,grad\,r = \frac{\overline{a}\,\overline{r}}{r}$.

f) $\overline{a}\,grad\,r = \frac{\overline{a}\,\overline{r}}{r}$ în virtutea lui c).

g) $rot\,(\overline{r}\,\overline{a}) = [grad\,r.\,\overline{a}] = \frac{[\overline{r}\,\overline{a}]}{r}$.

Se mai putea deduce și din e), scriind $\nabla\overline{r}\,\overline{a} = \frac{\overline{a}\,\overline{r}}{r}$, deci $[\nabla\overline{r}\,\overline{a}] = \frac{[\overline{a}\,\overline{r}]}{r}$.

h) $grad\frac{\overline{a}\,\overline{r}}{r^n} = \frac{1}{r^n}\,grad\,(\overline{a}\,\overline{r}) + \overline{a}\,\overline{r}.\,grad\frac{1}{r^n} = \frac{\overline{a}}{r^n} - nr^{-(n+1)}\,\overline{a}\,\overline{r}.\,grad\,r$

$$= \frac{\overline{a}}{r^n} - \frac{n\,\overline{r}.\,\overline{a}\,\overline{r}}{r^{n+2}}.$$

i) $rot\frac{[\overline{a}\,\overline{r}]}{r^n} = [grad\frac{1}{r^n}\,[\overline{a}\,\overline{r}]] + \frac{1}{r^n}\,rot\,[\overline{a}\,\overline{r}] = -\frac{n\,[\overline{r}\,[\overline{a}\,\overline{r}]]}{r^{n+2}} + \frac{2\,\overline{a}}{r^n}$

$$= -\frac{n\,\overline{a}}{r^n} + \frac{n\,\overline{r}.\,\overline{a}\,\overline{r}}{r^{n+2}} + \frac{2\,\overline{a}}{r^n}.$$

j) Pentru vectorul unitar $\overline{s}$ după tangenta la curbă, avem evident

$$\overline{s} = \frac{d\overline{s}}{ds} = \frac{d\overline{r}}{ds}.$$

Unghiul de contingență $d\overline{s}$ al arcului ds este modulul vectorului $d\overline{s} = \frac{d^2\overline{r}}{ds^2}\,ds$, care are și direcția lui $\overline{R}$, iar inversul razei de curbură, adică *curbura*, este

$$\frac{1}{R} = \left|\frac{d^2\overline{r}}{ds^2}\right|.$$

Vectorul unitar în direcția razei de curbură fiind $\frac{\overline{R}}{R}$, vom avea egalitatea vectorială

$$\frac{\overline{R}}{R^2} = \frac{d^2\overline{r}}{ds^2}.$$

Aplicația Nr. 24. A se calcula: $\Delta\frac{1}{r}$.

BCU IAȘI CENTRUL UNIVERSITY LIBRARY

Răspuns. Avem $\Delta\frac{1}{r} = div\ grad\frac{1}{r} = div\left(-\frac{\overline{r}}{r^3}\right) = \frac{3}{r^4}\overline{grad\, r} - \frac{1}{r^3} div\,\overline{r}$.

Cum însă $\overline{grad\, r} = \frac{\overline{r}}{r}$ și $div\,\overline{r} = 3$, găsim

$$\Delta\frac{1}{r} = 0.$$

Aplicația Nr. 25. A se calcula, $\overline{a}$ fiind un vector constant, integralele de suprafață:

$$\text{I)}\ \oint^{\sigma} (\overline{a}\,\overline{r})\,d\overline{\sigma} \quad \text{și} \quad \text{II)}\ \oint^{\sigma} \overline{r}.\,\overline{a}\,d\overline{\sigma} = \overline{v}.$$

Răspuns: I) Punând $\overline{a}\,\overline{r} = \Phi$ avem pentru volumul finit τ din σ:

$$\oint^{\sigma} \Phi\, d\overline{\sigma} = \int^{\tau} \overline{grad\,\Phi}\, d\tau.$$

Dar $\overline{grad\ a\ r} = \overline{a}$, căci $rot\ \overline{r} = 0$ și $\overline{a}$ este constant, iar $\overline{a}\ \overline{grad}.\ \overline{r} = \overline{a}$. Așa dar

$$\oint^{\sigma} \overline{a}\ \overline{r}.\,d\overline{\sigma} = \int^{\tau} \overline{a}\,d\tau = \overline{a}\,\tau.$$

II) Să luăm produsul scalar al vectorului căutat $\overline{v}$ cu $\overline{a}$, care ne dă, împărțit cu a, proecția pe $\overline{a}$ a vectorului în chestiune:

$$\overline{a}\,\overline{v} = \oint^{\sigma} \overline{a}\,\overline{r}.\,\overline{a}\,d\overline{\sigma} = \overline{a}\oint^{\sigma} \overline{a}\,\overline{r}.\,d\overline{\sigma} = a^2\tau.$$

Rezultă că proecția lui $\overline{v}$ pe $\overline{a}$ este $a\tau$. Vom arăta că această proecție este chiar mărimea naturală a lui $\overline{v}$, adică $\overline{v} = \overline{a\tau}$.

Intradevăr, să descompunem volumul τ în cilindri elementari paraleli cu $\overline{a}$, și cari decupează pe suprafața σ perechi de $d\sigma$, ce dau câte o pereche de termeni $\overline{r}.\,\overline{a}\,d\overline{\sigma}$, la cari $\overline{a}\,d\overline{\sigma}$ sunt egale între ele în valoare absolută, ca fiind egale cu secțiunea dreaptă a cilindrului înmulțită cu a, dar de semn contrar, iar $\overline{r_2} - \overline{r_1}$, care înmulțește pe $\overline{(a\,d\sigma)_2}$, este chiar axa cilindrului, adică în direcția lui $\overline{a}$.

Rezultanta va fi deci și ea în direcția lui $\overline{a}$.

Conchidem că proecția $a\tau$ a lui $\overline{v}$ pe $\overline{a}$ reprezintă chiar valoarea absolută a lui $\overline{v}$, adică: $\overline{v} = \overline{\tau a}$.

Aplicația Nr. 26. A se transforma integrala de suprafață.

$$\oint^{\sigma} U\,\overline{grad\, V}\,d\overline{\sigma} - V\,\overline{grad\, U}\,d\overline{\sigma},$$

într'o integrală de volum. A se aplica în special la cazul $V = \frac{1}{r}$, observând că

punctul O, din cauza discontinuității lui $\frac{1}{r}$, trebue exclus dela integrare, astfel că integrala de suprafață trebue să se întindă și asupra unei sfere mici Σ în jurul lui O și cu normala îndreptată înspre O.

Răspuns. După teorema lui *Green* avem:

$$\oint^{\sigma} U \operatorname{grad} V \overline{d\sigma} - V \operatorname{grad} U \overline{d\sigma} = \int^{\tau} (U\Delta V - V\Delta U)\, d\tau .$$

Dacă $V = \frac{1}{r}$, în care caz $\Delta V = 0$, se adagă în primul membru pentru sfera Σ de rază $\overline{a}$

$$\oint^{\Sigma} \left(U \operatorname{grad} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \operatorname{grad} U\right)\overline{a\sigma} = 4\pi a^2 \frac{U_0}{a^2} = 4\pi U_0 ,$$

căci $\operatorname{grad} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}\overline{n}$, dacă $\overline{n}$ are sensul lui $\overline{r}$, însă $= \frac{1}{r^2}\overline{n}$, dacă $\overline{n}$ este îndreptat spre centru, ca aci (adică spre exteriorul lui Σ) și deci $U \operatorname{grad} \frac{1}{r}\,\overline{d\sigma}$ tinde către $U_0 \frac{1}{a^2}\overline{n}\,\overline{d\sigma} = U_0 \frac{d\sigma}{a^2}$, adică $\oint^{\Sigma}$ către $4\pi U_0$ (termenul al doilea tinzând către 0, căci $\operatorname{grad} U$ este finit ca și U). Rezultă:

$$\oint^{\sigma} U \operatorname{grad} \frac{1}{r}\overline{d\sigma} - \frac{1}{r} \operatorname{grad} U \overline{d\sigma} = -\int^{\tau} \frac{1}{r}\Delta U d\tau - 4\pi U_0 .$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

CAP. III.

PROPRIETĂȚI GENERALE ALE MIȘCĂRILOR POTENȚIALE ÎN SPAȚII SIMPLU ȘI MULTIPLU CONEXE.

1. Proprietățile funcțiunei de vitesă*) Φ în spații liniar simplu conexe.

Mișcările potențiale se bucură de anumite proprietăți, din cari, în studiul cinematicei fluidelor perfecte, am enunțat numai unele, dar pe cari în cele ce urmează le vom expune mai amănunțit, independent de faptul că fluidul este sau nu perfect.

A) **Unicitatea lui Φ în domenii simplu conexe.** Într'un domeniu de definire a câmpului de vitesă potențial, dacă acesta este simplu conex, am arătat că integrala de linie I_{BA} între două puncte A și B este independentă de drumul parcurs.

Datorită acestui caracter, mișcarea potențială într'un domeniu liniar simplu conex este caracterizată printr'un potențial de vitesă uniform.

Intradevăr, integrala curbilinie I dela punctul fix A la un punct variabil B

$$I_{AB} = \int_A^B v_x\,dx + v_y\,dy + v_z\,dz = \int_A^B \bar{v}\,\bar{dr},$$

fiind în acest caz independentă de drumul integrării, este o *funcțiune uniformă* a punctului B (x, y, z). Dacă deplasăm pe B infinit de puțin, succesiv paralel cu fiecare din axele coordonate, această relație ne dă :

$$v_x = \frac{\partial I}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial I}{\partial y}, \quad v_z = \frac{\partial I}{\partial z}$$

și prin urmare I nu diferă de funcțiunea de vitesă Φ, de cât prin faptul că aceasta conține o constantă arbitrară, ceeace dealtfel se

*) Funcțiunea de vitesă Φ se numește deseori în mod impropiu și *potențial de vitesă*, deși acesta este $\varphi = -\Phi$. De câte ori nu va putea fi confuzie, vom uza și noi de această denumire.

poate imagina şi pentru I, dacă, în loc de I_{AB}, am considera pe I_{OAB}, plecând dela o origină O arbitară.

Intradevăr, dacă în loc de A se ia ca limită inferioară sau drept origina integralei curbilinii un alt punct O înaintea lui A, putem pune $\Phi = I_{OBA}$, căci Φ capătă astfel o constantă arbitrar şi anume valoarea lui I dela O la A, nefiind astfel determinat decât cu aproximaţia unei constante, conform definiţiei date acestei funcţiuni.

B) **Caraterizarea incompresibilităţei în cazul unei mişcări potenţiale, fără surse.** Să considerăm cazul special al *fluidelor incompresibile.* Intr'un domeniu de mişcare potenţială simplu conex, funcţiunea Φ precum şi prima ei derivată, care reprezintă o vitesă, sunt finite, continue şi univoce în toate punctele domeniului; Φ trebue să satisfacă *în orice punct* (proprietate locală) ecuaţia de continuitate. Aceasta, în cazul fluidelor incompresibile lipsite de surse, având forma generală

$$div\,\bar{v} \equiv \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \qquad (1)$$

rezultă pentru Φ ecuaţia lui *Laplace*:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \equiv \Delta \Phi = 0. \qquad (1.1)$$

Aşa dar, Φ în cazul fluidelor incompresibile este, în spaţiul exterior surselor, o funcţie armonică şi posedă toate proprietăţile acestei clase de funcţiuni. Printre aceste funcţiuni se numără şi potenţialul de forţă al maselor, care ascultă de legea lui *Newton*, pentru toate punctele exterioare maselor atrăgătoare (compară aci: domeniu exterior surselor). Deaceea multe din rezultatele demonstrate pentru potenţialul de forţă în teoria gravităţii, în electro-statică, magnetism, etc., găsesc aplicare şi în Hidrodinamică la funcţia sau potenţialul de vitesă.

Drept consecinţă a incompresibilităţii, proprietate locală exprimată prin (1), la orice mişcare potenţială sa nu a unui fluid imcompresibil, integrala de suprafaţă a fluxului vitesei, adică a debitului de volum eşind prin orice suprafaţă *) închisă σ, este nulă:

$$\oint v_n \, d\sigma \equiv \oint \bar{v} \, d\bar{\sigma} = 0. \qquad (2.1)$$

*) Cum relaţia (1) se aplică şi în celelalte domenii menţionate, se obişnueşte a se spune că *fluxul electric* sau cel *magntic* este incompresibil, înţelegându-se prin aceasta că ele se conservă ca şi *debitul de volum* (fluxul vitesei unui fluid incompresibil).

Dacă mișcarea este potențială, în care caz incompresibilitatea se exprimă prin relația (1.1), vom avea pentru *orice suprafață închisă* forma analitică:

$$\oint \frac{\partial \Phi}{\partial n} d\sigma \equiv \oint grad\, \Phi\, d\bar{\sigma} = 0, \qquad (2.1)$$

unde $d\sigma$ este un element al suprafeței și n este luat în direcția normalei, al cărei sens pozitiv convenim a fi acela al normalei exterioare, cu vectorul unitar $\bar{n}$, punând prin definiție $d\bar{\sigma} = \bar{n}\, d\sigma$. Fluxul $\bar{v}\, d\bar{\sigma}$ este în consecință cel eșind (cu semnul său intrinsec). Echivalența dintre relația locală (1) $div\, \bar{v} = 0$ și relația (2), înlocuite, în cazul mișcării potențiale, respectiv prin formulele (1.1) și (2.1) pentru tot spațiul ocupat de fluidul imcompresibil fără surse, se deduce imediat și din teorema lui *Gauss*.

Dacă acum la o mișcare, potențială sau nu, ducem liniile de curent prin toate punctele unei curbe închise infinit de mici, formând ceeace se numește un *tub de curent*, relația incompresibilității (2) arată că produsul secțiunei drepte a unui asemenea tub cu vitesa $\bar{v}$, exprimând debitul de volum al acestuia, este constant dealungul tubului.

Ne putem închipui întregul spațiu ocupat de fluidul incompresibil ca fiind compus din asemenea tuburi de curent, trase astfel ca debitele lor $v_n\, d\sigma$ să fie egale între ele, în care caz fluxul vitesei sau debitul printr'o suprafață oarecare este proporțional cu numărul tuburilor ce o străbat. Dacă această suprafață este închisă, ecuația (2) exprimă, că prin ea intră și ese același număr de tuburi sau *fire* de curent. Deaceea într'un spațiu *simplu conex* un fir (tub de curent de secțiune infinitesimală cu debit constant dealungul tubului) nu poate lua naștere sau sfârși în fluid. La o mișcare potențială el nici nu se poate închide, deoarece atunci vitesa fiind mereu în același sens, Φ în acel sens va crește continuu, ceea ce la închidere ar conduce la o altă valoare a lui Φ de cât la plecare, fapt incompatibil cu unicitatea lui Φ. Această proprietate a liniilor de câmp este proprie câmpurilor *lamelare* cu flux incompresibil.

Am văzut că și rotaționalul vitesei se comportă ca vectorul vitesei din cazul unui fluid incompresibil, în sensul că fluxul său prin o suprafață închisă este nul și că prin urmare un tub sau un fir rotațional deasemenea nu poate lua naștere sau sfârși în interiorul fluidului. In schimb însă tuburile sau firele rotaționale,

pe lângă că pot merge până la frontieră (ca şi la câmpurile lamelare) se pot închide şi în ele înşile, proprietate ce aparţine câmpurilor *solenoidale*.

C) **Maxime şi minime.** Se vede imediat că Φ la un fluid incompresibil nu poate avea într'un punct interior fluidului nici maxim nici minim, caci $\frac{d\Phi}{dn}$ depe o sferă infinitesimală în jurul acestui punct ar fi sau peste tot negativ sau peste tot pozitiv, ceeace este imcompatibil cu (2.1).

Deasemenea $v^2 = (grad\,\Phi)^2$ în nici-un punct interior P nu poate avea un maxim. Pentru demonstrare să luăm axa x paralelă cu vitesa din P. Ecuaţia (2.1) va fi deasemenea satisfăcută, dacă punem $\frac{\partial\Phi}{\partial x}$ în loc de Φ.

Repetând raţionamentul de adinioară, vedem că $\frac{\partial\Phi}{\partial x}$ în P nu poate avea nici maxim nici minim. Or, $\frac{\partial\Phi}{\partial x}$ nefiind maxim în P, rezultă că, dacă în imediata vecinătate a lui P toate valorile lui $\frac{\partial\Phi}{\partial x}$ sunt pozitive, $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2$ nu va putea fi maxim în P.

Aceeaşi concluzie o tragem în cazul când toate valorile sunt negative, bazându-ne de data acesta pe faptul că $\frac{\partial\Phi}{\partial x}$ nu poate fi un minim în P Deci în toate cazurile v^2 nu poate fi un maxim în P, astfel că, nici pentru axe oare cari, expresia

$$v^2 = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2$$

nu poate fi un maxim în P.

In ceeace priveşte posibilitatea ca v^2 să fie minim în P, o asemnea posibilitate există numai pentru $v^2_P = 0$ (vitesă nulă) în P (căci şi valorile negative ale lui v dau $v^2 > 0$).

D) **Medie pe suprafaţa unei sfere.** Să aplicăm ecuaţia (2.1) la suprafaţa σ a unei mase sferice din fluidul *incompresibil*, raza r fiind distanţa unui punct al suprafeţei la centrul P iar $d\omega$ unghiul solid sub care elementul $d\sigma$ se vede din centru. Vom avea:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = \frac{\partial\Phi}{\partial r}$$

şi

$$d\sigma = r^2\, d\omega,$$

astfel că, lăsând la oparte factorul comun r^2, ceeace revine la transportarea valorilor $\frac{\partial \Phi}{\partial r}$ de pe sfera r pe sfera unitară $r=1$, ecuaţia (2) devine:

$$\oint^{4\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial r}\, d\omega = 0$$

sau, suprafaţa de integrare $\sigma = 4\pi$ rămânând aceeaşi:

$$\frac{\partial}{\partial r} \oint^{4\pi} \Phi\, d\omega = 0 \qquad (3)$$

şi cum $\frac{1}{4\pi}\oint^{4\pi} \Phi\, d\omega$ sau $\frac{1}{4\pi r^2}\oint^{\sigma} \Phi\, d\sigma$ este media lui Φ pe suprafaţa sferică, (3) arată că această medie este constantă adică independentă de r. Aşa dar, media lui Φ este aceeaşi pentru orice suprafaţă concentrică şi în particular pentru o sferă infinitesimală cu centrul în P, astfel că într'un punct oarecare P avem media de pe orice suprafaţă sferică cu centrul în P.

E) **Media pe o suprafaţă cu spaţiul interior perifractic (superficial multiplu conex).** Să presupunem acum că domeniul τ ocupat de fluid în mişcare rotaţională, ar fi *perifractic*, adică limitat în interior de una sau mai multe suprafeţe închise (frontiere interioare)*). Dacă aplicăm (2.1) la spaţiul dintre frontierele interioare (una sau mai multe) şi o suprafaţă sferică Σ suficient de mare pentru a le cuprinde pe toate, însă fără a eşi din fluid, vom avea pentru integrala, întinsă atât pe suprafaţa sferică Σ cât şi pe frontierele interioare, prin care vom presupune că intră în acest spaţiu τ un debit de volum total Q, eşit din volumul mărginit de frontierele interioare (astfel că debitul corespunzător *eşind* din τ este $-Q$), următoarea expresie

$$\oint^{\Sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial r}\, d\sigma - Q = 0 \quad \text{sau} \quad \oint^{\Sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial r}\, d\sigma = Q.$$

Relaţia mai poate fi scrisă, introducând unghiul solid $d\omega$ sub care se vede $d\sigma$ din centrul sferei:

*) *Aperifractic* sau *de conexiune superficială simplă* ar fi atunci când, din contră, o suprafaţă închisă arbitrară ar fi reductibilă la un punct fără a eşi din domeniu.

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial r}\oint^{4\pi}\Phi\, d\omega = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

sau

$$\frac{1}{4\pi}\oint^{4\pi}\Phi\, d\omega = C - \frac{Q}{4\pi r} \qquad (4)$$

Aceasta înseamnă, că media lui Φ de pe o suprafaţă sferică, îndeplinind condiţia de mai sus, este egală cu $C - \frac{Q}{4\pi r}$, unde C este o mărime independentă de raza r, dar care ar putea depinde de poziţia centrului (Q fiind după definiţie o constantă absolută).

Dacă totuşi domeniul iniţial al mişcării nerotaţionale este nelimitat în exterior, iar *primele derivate* (şi deci şi celelalte) ale lui Φ se anulează la ∞, atunci C ar fi independent nu numai de r pentru un centru dat, dar şi de poziţia însăşi a centrului. Intradevăr, dacă o asemenea sferă cu r crescând la ∞ este deplasată paralel cu x, derivata $\frac{\partial C}{\partial x}$ datorită acestei deplasări va fi după (4) egală cu media lui $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ de pe suprafaţa sferică.

Cum însă $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ prin ipoteză se anulează la ∞, putem face această medie, prin sporirea lui r, ori cât de mică voim, rezultând $\frac{\partial C}{\partial x} = 0$ şi tot astfel $\frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial C}{\partial z} = 0$. Aşa dar, C va fi o constantă absolută.

Dacă frontierele interioare ale domeniului sunt astfel, ca fluxul Q total eşind din ele să fie nul, de exemplu dacă ele sunt constituite din suprafeţe cu pereţii rigizi sau conţin în spaţiile lor interioare lichide incompresibile fără surse, Φ va avea în general aceeaşi medie pe orice sferă a unei familii de sfere concentrice ce ar cuprinde frontierele interioare, iar în particular, atunci când vitesele se anulează la ∞, adică C este o constată absolută ($\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$ pe sfera dela infinit), această medie va fi aceeaşi pentru orice sferă, independent de r şi de poziţa centrului.

F) Determinarea mişcării prin condiţiunile dela frontiera exterioară.

a) Dacă Φ *este constant* pe frontiera unui domeniu *simplu conex, ocupat de un fluid* incompresibil, presupus în mişcare poten-

ţială, el va fi constant şi în interiorul domeniului. Intradevăr, în cazul contrar Φ ar avea în interior un maxim sau minim, ceeace s'a arătat că nu este posibil.

Se mai poate raţiona astfel: la un fluid incompresibil potenţial liniile de curent nu pot începe sau sfârşi în nici-un punct interior şi nici forma curbe închise, cuprinse complet în domeniul liniar simplu conex. Ar trebui deci ca ele, dacă există, să străbată domeniul începând şi sfârşind la frontieră, ceeace deasemenea nu este posibil, fiindcă Φ, trebuind în acest caz să varieze în acelaşi sens dela un capăt la altul, n'ar ajunge pe frontieră cu aceaşi valoare ca la plecare. Nu poate exista deci nici-un fel de linie de curent şi prin urmare nici un fel de mişcare, ceeace cere ca Φ să fie constant şi în interiorul domeniului.

b) Dacă în aceleaşi condiţiuni ca mai sus $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ este nul în toate punctele frontierei, Φ va fi în acest caz constant în interior şi pe frontieră. Intradevăr, condiţia $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ înseamnă că nici o linie de curent nu poate pleca dela frontieră, astfel că acelaşi raţionament, ca cel de mai sus, arată că mişcare nu poate exista, urmând ca Φ să fie constant în întreg domeniul.

Această teoremă se mai poate enunţa şi astfel: *într'o masă liniar simplu conexă, limitată peste tot de pereţi rigizi fixi, nu poate exista mişcare potenţială, adică nerotaţională.*

c) Dacă frontiera domeniului considerat constă, parte din o suprafaţă σ pe care Φ este constant şi parte din o suprafaţă Σ pe care $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$, atunci pentru motivele mai sus arătate nu va mai exista nici o linie de curent în interiorul domeniului, astfel că Φ va fi constant şi egal cu valoarea lui constantă de pe σ.

d) Din teoremele de mai sus tragem următarea concluzie: mişcarea nerotaţională a unui fluid incompresibil într'un spaţiu liniar simplu conex este complet determinată, dacă sunt date pe întreaga frontieră, fie valorile lui Φ cu aproximaţia unei constante arbitrare (problema lui *Dirichlet*), fie acelea al e vitezei normale $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ (problema lui *Neumann*), înfine dacă sunt date valorile lui Φ pentru o parte a suprafeţelor de frontieră şi valorile lui $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ pentru rest.

Într-adevăr, dacă Φ_1, Φ_2 sunt funcțiunile de vitesă a două mișcări, care amândouă ar îndeplini condițiile la frontieră din oricare din cazurile sus enumreate *a*) sau *b*) sau *c*), funcțiunea $\Phi_1 - \Phi_2$ ar satisface condiția de constanță a potențialului la frontieră (aci nul), respectiv de nulitate a vitesei normale, putându-se conchide la constanța, în întreg spațiul, a valorii potențialului, egală deci cu valoarea dela frontieră. Cele două mișcări au, așadar, în fiecare punct potențiale egale sau diferind cu o constantă, (deci echivalente), fiind identice.

G) **Fluid nerotațional care dela frontiere interioare se întinde la infinit.**

Analog cazurilor de mai sus vom considera acum alte cazuri foarte importante în aplicații, în cari spațiul ocupat de fluidul incompresibil potențial sau nerotațional se întinde la infinit, fiind mărginit numai în interior de una sau mai multe frontiere (interioare). Admitem dela început că acest domeniu este liniar simplu conex și prin urmare Φ uniform (univoc).

α) Dacă Φ de pe frontierele interioare este constant și același la toate, iar la distanță infinită tinde peste tot către aceeași valoare constantă, egală cu aceea de pe frontiere, după raționamentul făcut la *a*) Φ va fi constant în întregul spațiu, căci altfel s'ar găsi în interiorul acestuia un maxim sau un minimum. De aci conchidem, că vom avea repaus și că, în cazul mișcărei, precum s'a desvoltat mai sus la *d*), valoarea lui Φ va fi peste tot complet determinată, dacă ea este cunoscută sau prescrisă într'un mod oarecare pe frontierele interioare, iar *la* ∞ *este egală cu o constantă dată*.

β) De mai mare importanță este cazul caracterizat prin următoarea teoremă:

Φ va fi peste tot constant, adică *fluidul în repaus, atunci când componenta normală a vitesei* $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ *pentru orice punct al frontierei interioare este nulă, iar fluidul tinde la infinit către repaus* (derivatele lui tinzând acolo către zero, adică Φ către o constantă C).

Acest caz, deși analog, nu se poate totuși considera ca demonstrat riguros prin același raționament ca la *b*). Putem limita domeniul indefinit în exterior printr'o suprafață infinit de mare,

pe care $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ să fie cât voim de mic, fără a putea conchide totuşi că integrala $\int\int \frac{\partial \Phi}{\partial x} d\sigma$, întinsă asupra oricărei părţi de suprafaţă, ce se depărtează la ∞ dar simultan creşte în proporţii, se anulează şi că prin urmare nici-o linie de curent nu pleacă dela ∞ şi nu soseşte la ∞.

S'ar impune deci un raţionament mai riguros în felul următor (*Lamb*): cum vitesa la distanţă infinită de frontierele interioare σ tinde către zero, aceasta înseamnă că putem găsi o suprafaţă destul de mare Σ, coprinzând complet pe σ, astfel ca, în afara ei, vitesa să fie mai mică decât un ε dinainte prescris, cât de mic voim.

Să luăm acum un punct P într'o direcţiune arbitrară faţă de σ, însă în afară de Σ şi la o distanţă atât de mare faţă de Σ, ca unghiul solid sub care se vede Σ din P să fie infinit de mic. In jurul lui P ca centru să trasăm două sfere, din care una abia să conţină pe σ iar a doua abia să-l excludă. Vom arăta că mediile lui Φ pe fiecare din aceste două suprafeţe sferice nu pot diferi între ele decât cu o cantitate infinit de mică. Intradevăr, fie Q, Q' puncte de pe aceste suprafeţe sferice aşezate pe o rază comună PQQ'. Dacă Q şi Q' cad în interiorul lui Σ, valorile lui Φ pot diferi cu o cantitate finită; cum însă părţile celor două suprafeţe sferice incluse în Σ formează numai o porţiune infinit de mică a sferelor întregi, nu poate rezulta de aci nici-o diferenţă finită între mediile lui Φ pe sfere.

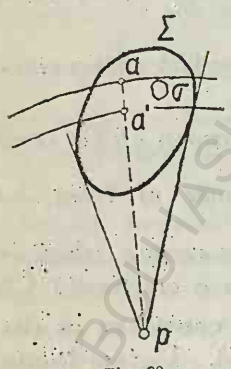


Fig. 20

Dacă din contră Q şi Q' se găsesc în afară de Σ, valorile corespunzătoare ale lui Φ nu pot diferi decât mai puţin ca $\varepsilon QQ'$, căci ε este prin definiţie o limită superioară pentru gradientul lui Φ în afară de Σ.

De aceea mediile lui Φ pe ambele suprafeţe sferice nu pot diferi decât $< \varepsilon QQ'$. Cum QQ' este finit iar ε printr'o suficientă mărire a lui Σ poate fi făcut cât de mic, diferenţa mediilor prin luarea lui P suficient de depărtat poate fi făcută cât de mică voim. S'a văzut mai sus că media lui Φ pe suprafaţa sferică interioară este egală cu Φ din centrul P şi că media pe cea exterioară este egală cu o constantă C *unică*, adică independentă de P. Rezultă

că valoarea lui Φ din P (prima medie), când acesta se depărtează la ∞ în orice direcție, va tinde către constanta C (a doua medie), deoarece cele două medii am văzut că tind la egalitate.

Din ceeace precede vom deduce acum, ca la β): *dacă pentru toate punctele frontierei inferioare* $\frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0$, *iar fluidul la* ∞ *este în repaus, el va trebui să fie peste tot în repaus.*

Intradevăr, pe frontiera interioară nu poate începe sau sfârși o linie de curent și deaceea asemenea linii, dacă ar exista, n'ar putea veni decât dela ∞.

Dar și aceasta este imposibil, fiindcă ar urma ca aceste linii venind dela ∞ să traverseze domeniul și să meargă iarăși la ∞, cu parcursul unor drumuri infinit de lungi între locuri cu Φ având valori ce diferă de C infinit de puțin. Ne-existând deci nici o linie de curent, fluidul va fi în repaus.

In asemenea condițiuni, analog ca la *d*), tragem concluzia că, pentru un fluid în mișcare dar care la ∞ este în repaus, dacă prescriem pe $\frac{\partial\Phi}{\partial n}$ pe întreaga frontieră interioară, mișcarea este determinată, fiindcă *mișcarea-diferență* între două soluțiuni, presupuse un moment posibile, ar avea $\frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0$ pe frontieră și repaus la ∞, fiind deci nulă.

γ) Infine, dacă Φ este constant (Φ_0) pe parte din frontierele interioare, la infinit tinzând către aceeași valoare constantă Φ_0 (deci repaus), iar pe restul frontierelor avem $\frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0$, fluidul va fi deasemenea peste tot în repaus, neputând exista linii de câmp nici dela o frontieră la ∞, nici de la frontieră la frontieră, nici dela ∞ la ∞. Conchidem ca la *d*) că, dacă se dau pe de o parte valorile lui Φ pe o parte a frontierelor interioare, valoarea sa la ∞ fiind o constantă C, iar pe de altă parte se dă $\frac{\partial\Phi}{\partial n}$ pe restul frontierelor, mișcarea va fi determinată în întreg spațiul, fiindcă, analog ca mai sus, *mișcarea-diferență* ar fi nulă, cu $\Phi_0 = 0$ la parte din frontiere și la ∞ și cu $\frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0$ pe restul frontierelor.

2. Teorema lui Gauss și aplicațiile ei în spații simplu conexe.

Teorema lui Gauss și formula ei generală. Ca și în Electrostatică, multe din proprietățile potențialului se pot deduce și aci din aplicarea teoremei lui *Gauss*, care de asemenea conduce la rezultatele mai importante, aflate mai sus pe altă cale, precum și la expresia energiei cinetice în cazul unei mișcări nerotaționale.

Având în vedere importanța acestei teoreme, care, precum am văzut, permite transformarea unei integrale de volum într'o integrală de suprafață, o vom stabili acum și pe cale analitică.

Fie U, V, W trei funcțiuni arbitrare de x, y, z, continue, uniforme și derivabile în toate punctele unui domeniu fluid, limitat de una sau mai multe suprafețe, indicate în ansamblu prin σ, $d\sigma$ fiind un element cu *cosinusurile directoare ale normalei exterioare* n_x, n_y, n_z. Asimilând U, V, W cu proecțiile unui vector $\overline{G}$, având originea în punctul $M(x, y, z)$ și care nicăeri nu devine nici infinit, nici discontinuu (posedând o direcție determinată, cu excepția punctelor unde se anulează), vom stabili relația:

$$\int^{\tau}\left\{\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial z}\right\}d\tau=\oint^{\sigma}\{n_x U+n_y V+n_z W\}\,d\sigma$$

sau

$$\int^{\tau} div\,\overline{G}\,d\tau=\oint^{\sigma}\overline{G}\,d\overline{\sigma}, \qquad (5)$$

prima integrală întinzându-se la toate elementele de volum τ, arbitrar ales în câmpul vectorului $\overline{G}$, iar a doua întinzându-se la întreaga suprafață limitativă σ a volumului.

Să calculăm separat integrala $\int^{\tau}\frac{\partial U}{\partial x}\,d\tau$, care, punând $d\tau=dx\,dy\,dz$, se poate scrie:

$$\int\int\int^{\tau}\frac{\partial U}{\partial x}dx\,dy\,dz=\int\int^{\sigma}dy\,dz\int\frac{\partial U}{\partial x}dx$$

și să integrăm mai întâi în raport cu variabila x, examinând între ce limite trebue întinsă această integrare.

Fie în planul $y\,z$ un element $dy\,dz$, și să considerăm prisma, paralelă cu Ox, având acest element ca bază și care tae suprafața σ, decupând pe fig. (21) elementele $d\sigma_1, d\sigma_2, d\sigma_3, d\sigma_4$.

Cum volumul τ este presupus limitat, numărul de intrări şi eşiri este par, elementele în chestiune având toate $dy\,dz$ ca proecţiune pe planul yz.

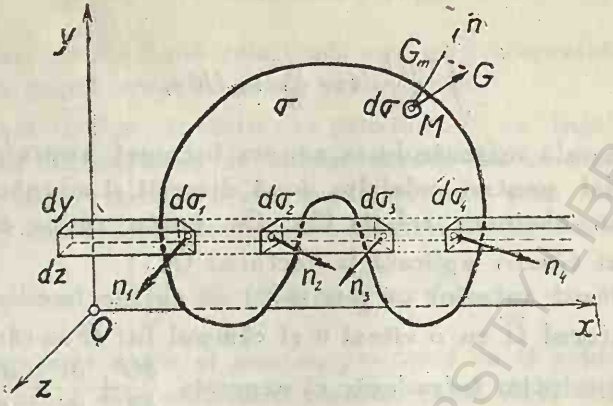


Fig. 21

Fie U_1, U_2.... valorile funcţiei U în punctele unde axa prismei stăbate menţionatele elemente.

Vom avea:

$$\int \frac{\partial U}{\partial x}\,dx = (U_2 - U_1) + (U_4 - U_3) + \ldots\ldots,$$

fiindcă integrala indefinită este U şi integrarea trebue făcută dela elementul $d\sigma_1$ la elementul $d\sigma_2$, etc. Integrala de volum devine atunci:

$$\int\int^{\sigma} dy\,dz\,\{(U_2 - U_1) + (U_4 - U_3) + \ldots\}$$

Normala lui $d\sigma_1$, îndreptată înspre exterior, face cu Ox un unghiu obtus şi deci:

$$dy\,dz = -n_{1x}\,d\sigma_1.$$

La $d\sigma_2$ normala exterioară face cu Ox un unghiu ascuţit şi aşa mai departe, având succesiv:

$$dy\,dz = -n_{1x}\,d\sigma_1$$
$$dy\,dz = +n_{2x}\,d\sigma_2$$
$$dy\,dz = -n_{3x}\,d\sigma_3.$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

BCU IAŞI CENTRALA UNIVERSITARĂ LIBRARY

Inlocuind

$$\int^{\tau} \frac{\partial U}{\partial x} d\tau = \int\int^{\sigma} dy\, dz\, (-U_1 + U_2 - U_3 + U_4 \ldots)$$

avem:

$$\int^{\tau} \frac{\partial U}{\partial x} d\tau = \oint^{\sigma} n_x U d\sigma, \qquad (5.1)$$

ultima integrală întinzându-se asupra întregei suprafeţe σ. Procedând la fel pentru celelalte două direcţii şi adunând membru cu membru, obţinem relaţia (5). Se poate spune că (5.1) este teorema lui *Gauss*, aplicată la vectorul $\bar{G}_x$.

Am văzut anterior că relaţia (5) se obţine imediat, dacă asimilăm vectorul $\bar{G}$ cu o viteză $\bar{v}$ şi câmpul lui $\bar{G}$ cu câmpul acestei viteze. Reamintim întradevăr că expresia $\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}$ ar reprezinta în acest caz dilataţia volumică proporţională în unitatea de timp, astfel că integrala din membrul întâiu ar exprima dilataţia totală a volumului τ în unitatea de timp, egală evident cu fluxul de viteză eşind prin suprafaţa limitativă, care se exprimă tocmai prin integrala din membrul al doilea.

A) **Cazurile** $\bar{G} = \bar{v}$; $\bar{G} = \rho \bar{v}$; $\bar{G} = f \bar{v}$.

A_1) Dacă $\bar{G} = \bar{v}$, în integrala de volum $div\, \bar{v}$ poate corespunde cu o modificare de volum fie prin dilatare (pozitivă sau negativă), fie prin surse (pozitive sau negative). Teorema lui *Gauss* dă:

$$\int^{\tau} div\, \bar{v}\, d\tau = \oint^{\sigma} \bar{v}\, d\bar{\sigma} \equiv \oint^{\sigma} v_n\, d\sigma,$$

iar în cazul mişcărei potenţiale cu $\bar{v} = grad\, \Phi$

$$\int^{\tau} \Delta\Phi\, d\tau = \oint^{\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial n} d\sigma \equiv \oint^{\sigma} \nabla\Phi d\bar{\sigma} \equiv \int grad\, \Phi\, d\bar{\sigma}.$$

Notăm că, în cazul fluidelor incompresibile, $div\, \bar{v}$ sau $\Delta\Phi$ este nul în punctele unde nu există surse, în care caz, deci, din $div\, \bar{v} = 0$, respectiv $\Delta\Phi = 0$, în tot spaţiul τ lipsit de surse rezultă $\oint^{\sigma} \bar{v}\, d\sigma = 0$, respectiv $\oint^{\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial n} d\sigma = 0$, pe suprafaţa sa limitativă. Pentru a deduce însă reciproca, trebue să invocăm faptul că τ cu σ respectiv sunt arbitrar alese în spaţiu, putând deci scrie şi pentru orice element $d\tau$:

$$div\, \bar{v} = 0, \quad \text{respectiv} \quad \Delta\Phi = 0.$$

deci

$$\oint^{\sigma} \bar{v}\, d\bar{\sigma} = 0, \quad \text{respectiv} \quad \oint^{\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial n}\, d\sigma = 0.$$

Așa dar, aceste două relațiuni, una pe o suprafață arbitrară, alta într'un punct arbitrar, sunt echivalente.

A_2) Dacă $\bar{G} = \rho\bar{v}$, în care caz prin $div\, \rho\bar{v}$ se înțelege eșirea ($\pm$) de mase din unitatea de volum, ceeace nu se poate produce decât prin surse (pozitive sau negative) sau prin dilatare (sau contractare) antrenând variațiunea densității ρ, avem:

$$\int^{\tau} div\, \rho\bar{v}\, d\tau = \oint^{\sigma} \rho\bar{v}\, d\bar{\sigma},$$

ceeace în lipsă de surse și pentru $\rho = const$ va fi evident nul.

Dacă însă ρ este constant, regăsim cazul de la A_1).

A_3) In fine, la un *fluid incompresibil* închis în o frontieră solidă, dacă punem $\bar{G} = f\bar{v}$, unde f este o *funcțiune scalară oare-care* fără a fi neapărat armonică, avem pe deoparte:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \qquad (\textit{fluid incompresibil}),$$

iar pe de altă parte la o frontieră solidă (dealtfel pentru orice fluid)

$$n_x v_x + n_y v_y + n_z v_z \equiv \bar{n}\bar{v} \equiv v_n = 0 \qquad (\textit{frontieră solidă}),$$

formula (5) reducându-se la

$$\int^{\tau} \left\{ v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} \right\} d\tau \equiv \int^{\tau} \bar{v}\, grad\, f\, d\tau = 0, \quad (5.2)$$

de oarece integrala de suprafață este nulă:

$$\oint^{\sigma} f\bar{v}\,\bar{n}\, d\sigma \equiv \oint^{\sigma} f v_n\, d\sigma \equiv \oint^{\sigma} f\bar{v}\, d\bar{\sigma} = 0,$$

$\bar{v}\,\bar{n} = v_n$ fiind nul.

Dacă mișcarea este potențială: $\bar{v} = grad\, \Phi$ și $f = \Phi$, vom avea după (5.2)

$$\int^{\tau} v^2 d\tau = 0,$$

adică repaus, ceea ce arată că nu putem avea mișcare potențială la un fluid perfect mărginit de o frontieră solidă.

B) **Cazul $\bar{G}=f\,grad\,f_1$ cu f și f_1 arbitrare (formula Green I).**

Dacă f și f_1 sunt două funcțiuni *arbitrare*, care împreună cu derivatele de primul și al doilea ordin sunt finite și univoce, punând:

$$U=f\frac{\partial f_1}{\partial x}\,,\quad V=f\frac{\partial f_1}{\partial y}\,,\quad W=f\frac{\partial f_1}{\partial z}\,,$$

astfel că pe σ avem:

$$n_x U+n_y V+r_z W\equiv f\frac{\partial f_1}{\partial n}\equiv f\bar{n}\,grad\,f_1$$

relația (5) ne va da:

$$\int^{\tau}\left\{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f_1}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial f_1}{\partial z}\right\}d\tau+\int^{\tau} f\Delta f_1 d\tau=\oint^{\sigma} f\frac{\partial f_1}{dn}\,d\sigma$$

$$\equiv\oint^{\sigma} f\,grad\,f_1 d\bar{\sigma}\,,$$

iar prin permutarea lui f cu f':

$$\int^{\tau}\left\{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{df_1}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f_1}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial f_1}{\partial z}\right\}d\tau+\int^{\tau} f_1\Delta f\,d\tau=\oint^{\sigma} f_1\frac{\partial f}{\partial n}\,d\sigma$$

$$\equiv\oint_{\sigma} f_1\,gradf\,d\bar{\sigma}. \qquad (5.3)$$

Prin scăderea acestor relațiuni una din alta, membru cu membru, obținem următoarea formulă, pe care o vom numi formula I-a a lui *Green*:

$$\int^{\tau}\{f\Delta f_1-f_1\Delta f\}\,d\tau=\oint^{\sigma}\left\{f\frac{\partial f_1}{\partial n}-f_1\frac{\partial f}{\partial n}\right\}d\sigma \quad (I). \qquad (5.4)$$

C) **Cazul $\bar{G}=\Phi\,grad\,\Phi_1$, cu Φ și Φ_1 funcțiuni de viteză.**

Dacă acum Φ și Φ_1 sunt *potențiale de viteză* a două mișcări nerotaționale diferite ale aceluiași fluid incompresibil, deci cu $\Delta\Phi=0$ și $\Delta\Phi_1=0$, (I) se reduce la formula simplă:

$$\oint^{\sigma}\Phi\frac{\partial\Phi_1}{\partial n}\,d\sigma=\int^{\sigma}\Phi_1\frac{\partial\Phi}{\partial n}\,d\sigma$$

sau

$$\oint^{\sigma}\Phi\,grad\Phi_1\,d\bar{\sigma}=\oint^{\sigma}\Phi_1\,grad\Phi d\bar{\sigma}, \qquad (5.5)$$

aplicabilă dealtel la orice funcții Φ și Φ_1 armonice, adică cari satisfac ecuația lui *Laplace*:

$$\Delta\Phi=0\,,\qquad \Delta\Phi_1=0.$$

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Notă. Referindu-ne la interpretarea mecanică dată potențialului de viteză $\varphi = -\Phi$ de a putea reprezenta o impulsiune de presiune pentru $\rho = 1$ (vezi Cap. V), iar $\frac{\partial \Phi_1}{\partial n}$ fiind vitesa, normală pe $d\sigma$, a mișcării potențiale Φ_1, se recunoaște în această ecuație, în cazul pornirei instantanee a mișcărilor din repaos, un caz special al teoremei dinamice :

$$\Sigma p'_r \, q_{1r} = \Sigma p'_{1r} \, q_r ,$$

unde $p'r$, qr și p'_{1r} q_{1r} sunt componentele generalizate ale presiunei de impulsiunei și vitesei, respectiv la două mișcări posibile arbitrare ale unui sistem (*Thomson & Tait*)

D) **Cazul $\bar{G} = f \, grad \, f$ cu f arbitrar (Formula Green II).**

Dacă în (5.3) facem $f' = f$, obținem:

$$\int^{\tau} \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \right\} d\tau + \int^{\tau} f \Delta f \, d\tau = \oint^{\sigma} f \frac{\partial f}{\partial n} \, d\sigma$$

$$\equiv \oint^{\sigma} f \nabla f \, d\bar{\sigma} \equiv \oint^{\sigma} f \, grad f \, d\bar{\sigma}, \quad \text{(II)} \qquad (5.6)$$

pe care o vom numi *formula II-a a lui Green.*

E) **Cazul $\bar{G} = \Phi \, grad \, \Phi$ cu Φ funcție de vitesă; energia cinetică a unui fluid potențial, limitat de o frontieră exterioară.**

Dacă în (II) f este funcția de vitesa Φ a unei mișcări nerotaționale de fluid incompresibil, deci cu $\Delta \Phi = 0$, ajungem la relația simplă :

$$\int^{\tau} v^2 d\tau = \oint^{\sigma} \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} \, d\sigma \equiv \oint^{\sigma} \Phi \, grad \, \Phi \, d\bar{\sigma} \equiv \oint^{\sigma} \Phi \nabla \Phi \, d\bar{\sigma}. \quad (6)$$

Din această relație rezultă că, în cazul unei mișcări potențiale, dacă la frontieră avem peste tot $\Phi = 0$ sau $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$, va trebui cu necesitate să avem în tot fluidul incompresibil $v = 0$, adică repaus. Dealtfel dacă Φ are o altă valoare constantă, ea se poate scoate factor comun, și cum pentru un fluid incompresibl $\oint^{\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \, d\sigma = 0$, concluzia este aceeași.

Se ajunge astfel pe o altă cale la necesitatea repausului, atunci când Φ este constant sau $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$ pe frontieră, și de aci, la unicitatea soluției pentru funcția Φ, atunci când se dă pe frontieră fie Φ fie $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ (problemele lui *Dirichlet* și *Neumann*), cuprinzând și cazurile cu frontiere interioare și repaus la ∞.

BUCAREST CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Pentru a interpreta relaţia (6), să înmulţim ambii membri cu $\frac{\rho}{2}$, în care caz $-\rho\Phi = p\varphi$ va reprezenta (vezi nota p. 121) impulsiunea de presiune, care produce mişcarea, pe când $\frac{\partial\Phi}{\partial n}$ reprezintă viteza normală îndreptată în spre exterior, $-\frac{\partial\Phi}{\partial n}$ în sensul impulsii. Or, o teoremă a dinamicei *) ne spune, că lucrul mecanic produs de o forţă de impulsiune egalează produsul impulsiunei cu media aritmetică a vitezelor iniţială şi finală ale punctului, proectate ambele pe direcţia impulsiunii, deci aici cu $\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial n}$. Aşa dar, membrul al doilea din (6) exprimă dublat lucrul mecanic al impulsiunilor şi era natural ca în membrul întâiu se apară energia cinetică $2T$. S'ar fi putut deci scrie dela început (cele două — dau +):

$$T = \frac{\rho}{2}\oint^{\sigma} \Phi \frac{\partial\Phi}{\partial n}\, d\sigma . \qquad (7)$$

Faptul că Φ poate diferi cu o cantitate arbitrară constantă nu trebue să surprindă, fiindcă o asemenea constantă din Φ iese factor comun, iar la un fluid incompresibil avem:

$$\oint^{\sigma} \frac{\partial\Phi}{dn}\, d\sigma = 0.$$

F) **Cazul** $G = \frac{\partial\Phi}{\partial x} grad \frac{\partial\Phi}{\partial x}$ **etc; maximum de** v^2.

---

*) Impulsiunea de presiune $p' = p\varphi = -\rho\Phi = \int_0^t pdt$ (cu t foarte mic) corespunde unei presiuni medii $\frac{p\varphi}{t}$ care, înmulţită cu $d\sigma$ şi cu deplasarea dn în spre interior, dă lucrul elementar $p\varphi d\sigma \frac{dn}{t}$ sau, dacă luăm dn în spre exterior: $\rho\Phi d\sigma \frac{dn}{t}$.

Dar viteza medie (între 0 şi cea finală) în spre exterior fiind $\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial n} = \frac{dn}{t}$, vom avea ca lucru efectuat $\frac{1}{2}\rho\oint^{\sigma} \Phi \frac{\partial\Phi}{\partial n}\, d\sigma$ cu dn în spre exterior, lucru ce se transformă în T.

Dacă în (II) punem $\frac{\partial\Phi}{\partial x}$ în loc de Φ, cu $\Delta\Phi = 0$ şi deci şi $\Delta\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 0$, şi aplicăm formula la un domeniu sferic de rază r şi cu centrul în punctul (x, y, z), găsim, întrebuinţând notaţia ω pentru unghiul solid la centru şi transportând valorile depe suprafaţa σ pe suprafaţa sferei unitare de o întindere $\omega = 4\pi$:

$$\int_\tau \left\{\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial z}\right)^2\right\} d\tau = \oint_\sigma v_x \frac{\partial v_x}{\partial r} d\sigma = \frac{1}{2} r^2 \frac{\partial}{\partial r} \oint^{4\pi} v^2{}_x d\omega,$$

iar dacă repetăm operaţia relativ şi la celelalte două axe, şi adunăm, ţinând seama că

$$v^2{}_x + v^2{}_y + v^2{}_z = v^2,$$

găsim:

$$\int_\tau \left\{\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial z}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\right)^2\right\} d\tau$$

$$= \frac{1}{2} r^2 \frac{\partial}{\partial r} \oint^{\omega=4\pi} v^2 d\omega.$$

Cum primul membru este pozitiv, rezultă că media lui v^2 în jurul oricărui punct interior arbitrar P, luat ca centru, creşte cu raza, şi deacea v^2 din P, având în vecinătate puncte cu valori de v^2 mai mari, nu poate fi un maxim. Aşa dar, precum am arătat şi pe altă cale, v^2 nu poate fi maxim în nici un punct interior, astfel că un asemea maxim poate fi numai la frontieră.

Dar ecuaţia generală a unei mişcări potenţiale de fluid incompresibil este (precum vom vedea la Capitolul V) într'un moment t:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + U + \frac{p}{\varrho} + \frac{v^2}{2} = f(t)$$

şi cum $\frac{\partial\Phi}{\partial t}$ (ca şi Φ) precum şi U, când este şi acesta funcţie armonică ($\Delta U = 0$), au medii constante pe o sferă cu rază variabilă, având centrul într'un punct arbitrar, evident că se va întâmpla cu media lui p invers de ceeace se întâmplă cu media lui v^2, adică media lui p va scădea când raza sferei creşte. Rezultă că, într'un punct interior p nu poate fi minim, astfel că un minim de p nu poate fi de cât la frontieră.

G) **Energie cinetică minimă.** O teoremă interesantă, descoperită de *Lordul Kelvin*, sună astfel:

Mişcarea nerotaţională a unui fluid incompresibil într'un spaţiu

simpla conex posedă o energie cinetică mai mică ca oricare altă mişcare, care la frontieră ar avea aceleaşi componente normale de viteză.

Fie T energia cinetică a mişcării nerotaţionale şi T_1 aceia a unei alte mişcări, definită prin vitesele:

$$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v_{x0} \quad , \quad v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} + v_{y0} \quad , \quad v_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} + v_{z0},$$

cu observaţia că, din cauza ecuaţiei de continuitate, de care trebue să asculte ambele mişcări, trebue să avem şi pentru vectorul component $\bar{v}_0$:

$$\frac{\partial v_{x0}}{\partial x} + \frac{\partial v_{y0}}{\partial y} + \frac{\partial v_{z0}}{\partial z} = 0 .$$

De asemenea $\bar{v}_0$ pe frontieră trebuind să fie normal sau nul:

$$\bar{n}\,\bar{v} = n_x v_{x0} + n_y v_{y0} + n_z v_{z0} = 0 ,$$

avem îndeplinite condiţiile unui câmp vectorial $\bar{G} = \Phi \bar{v}_0$ ca cel studiat la A_3), în care caz avem relaţia (5.2), adică

$$\int^{\tau} \left\{ v_{x0} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v_{y0} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + v_{z0} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right\} d\tau \equiv \int^{\tau} \bar{v}_0 \, grad \, \Phi = 0.$$

Or, dacă punem

$$T_0 = \frac{1}{2} \rho \int^{\tau} (v^2_{x0} + v^2_{y0} + v^2_{z0}) \, d\tau,$$

găsim, ţinând seamă de (5.2):

$$T_1 = T + T_0 + \rho \int^{\tau} \bar{v}_0 \, grad \, \Phi = T + T_0.$$

Mai intuitiv aceasta se poate explica astfel: dacă în domeniile unor puncte destul de apropiate unul de altul, luate ca repere în masa fluidă, descompunem după *Helmholz* vitesa mişcărei nepotenţiale în cele trei componente: vitesă de translaţie, vitesă de deformaţie şi vitesa datorită rotaţiei fiecăiui domeniu elementar, la frontieră primele două componente (care sunt potenţiale) vor da pe $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ al mişcării potenţiale, căci în ceeace priveşte a treia componentă, pur rotaţională, care va corespunde câmpului $\bar{v}_0$. ea va fi tangenţială frontierei ($rot_n \, v_0 = \Omega$).

Or, în domeniul oricăruia din acele puncte-repere putem con-

sidera că vectorul v_0 se adaogă şi se scade pentru molecule simetrice faţă de axa de rotaţie ce trece prin numitul punct, modificând în consecinţă vectorul $\bar{v}$ al mişcării nerotaţionale, care, cu aproximaţia unui infinit mic, presupus (*arbitrar*) neglijabil faţă de v_0, ar fi acelaşi pentru orice asemenea pereche de puncte infinit de apropiate.

Am avea atunci pentru forţa vie a unităţilor de masă la o astfel de pereche de molecule

$$(\bar{v}+\bar{v}_0)^2+(\bar{v}-\bar{v}_0)^2=2v^2+2v^2{}_0>2v^2,$$

masele ce intră în consideraţie ocupând volume egale, căci $\rho=const.$ Energia cinetică rezultată pentru ansamblu ar fi deci mai mare, datorită prezenţei componentei de rotaţionalitate.

H) **Energia cinetică a unei mase fluide indefinite în mişcare potenţială.**

Să vedem ce formă ia expresia energiei cinetice (7), dacă fluidul se întinde la ∞, fiind acolo în repaus, iar în interior limitat de una sau mai multe suprafeţe închise σ. Dacă ne închipuim o suprafaţă închisă mare Σ, care să cuprindă totalitatea σ a frontierelor, energia fluidului dintre σ şi Σ va fi:

$$T=\frac{\rho}{2}\oint^{\Sigma}\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial n}d\Sigma+\frac{\rho}{2}\oint^{\sigma}\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial n}d\sigma. \qquad (8)$$

Cum din cauza ecuaţiei de continuitate a fluidelor incompresibile (fluxul total de viteză intrând sau eşind fiind nul) avem:

$$\oint^{\Sigma}\frac{\partial\Phi}{\partial n}d\Sigma+\oint^{\sigma}\frac{\partial\Phi}{\partial n}d\sigma=0,$$

putem scrie (8) astfel:

$$T=\frac{\rho}{2}\oint^{\Sigma}(\Phi-C)\frac{\partial\Phi}{\partial n}d\Sigma+\frac{\rho}{2}\oint^{\sigma}(\Phi-C)\frac{\partial\Phi}{\partial n}d\sigma, \qquad (9)$$

unde C poate fi orice constantă, deci şi aceea către care tinde Φ la distanţă infinită de σ.

Ne putem închipui acum întregul domeniu fluid compus din tuburi de curent, cari merg fie dela puncte ale frontierelor interioare σ la alte puncte ale acestora, fie dela σ la Σ, îndepărtat la ∞ (dela ∞ cu $\Phi=C$ nu poate merge nici un tub iarăşi la ∞, unde de asemenea $\Phi=C$).

Valoarea integralei:

$$\oint^{\Sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial n} d\Sigma, \tag{10}$$

care în fond exprimă un debit ce trece şi prin frontiera finită σ, trebue să fie finită, ori care ar fi suprafaţa Σ, finită sau infinită.

Dacă luăm însă pe Σ foarte mare şi în toate sensurile infinit depărtat de σ, prima integrală din (9), în care găsim aceleaşi elemente $\frac{\partial \Phi}{\partial n} d\Sigma$ (de sumă finită) ca şi în (10), înmulţite însă cu un factor $\Phi - C$ ce tinde către zero, va tinde şi ea către zero, rămânând:

$$T = -\frac{\rho}{2} \oint^{\sigma} (\Phi - C) \frac{\partial \Phi}{\partial n} d\sigma. \tag{11}$$

Dacă acum debitul prin frontiera interioară este nul:

$$\oint^{\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial n} d\sigma = 0.$$

expresia se reduce la

$$T = -\frac{\rho}{2} \oint^{\sigma} \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} d\sigma = -\frac{\rho}{2} \oint^{\sigma} \Phi \, grad \, \Phi \, d\bar{\sigma}, \tag{12}$$

identic cu (7), unde aveam o frontieră σ exterioară.

3. Domenii liniar multiplu conexe.

e) **Noţiuni topologice.** Pentru claritate este util a completa noţiunile topologice întrebuinţate până acum.

Într'un domeniu *conex*, infinitatea de drumuri mutual transpozabile, ce se pot duce dela un punct A la altul B, intră în categoria curbelor *homeomorfe*, denumite astfel, dacă între punctele lor se poate stabili o corespondenţă continuă biunivocă. O curbă de ex. deschisă este homeomorfă cu un segment de dreaptă, iar o curbă închisă este homeomorfă cu o circonferinţă. Această definiţie se întinde şi la orice domeniu de mai multe dimensiuni.

Două drumuri diferite, mutual transpozabile, trasate între două puncte A şi B, formează prin definiţie un contur *reductibil*. Două asemenea contururi, dacă şi ele sunt mutual transpozabile, pot fi evident legate între ele printr'o suprafaţă continuă, aflată complet în domeniu şi în întregime mărginită de acele contururi sau curbe închise, cari deci se pot transpune una pe cealaltă după această suprafaţă. Am definit drept contur *ireductibil*, un

contur ce nu se poate reduce la un punct fără a eşi din domeniu. Un asemenea contur însă poate fi *simplu sau multiplu ireductibil.* In primul caz conturul este homeomorf cu o circumferinţă, în cel de-al doilea cu o circumferinţă parcursă de mai multe ori.

Se numeşte *tăefură* sau *diafragmă* o suprafaţă dusă prin domeniu şi avându-şi limitele pe frontiera domeniului. O tăetură este cu necesitate conexă, neputând fi compusă din două sau mai multe părţi.

Pe când într'un domeniu liniar *simplu conex*, prin definiţie toate drumurile între două puncte oarecare ale lui sunt mutual transpozabile, adică orice curbă închisă din domeniu este reductibilă, într'un domeniu liniar *dublu conex*, între două puncte *A* şi *B* se pot duce două şi numai două drumuri *ACB* şi *ADB* distincte sau independente, ce nu se pot transpune unul în altul. Oricare alt drum este mutual transpozabil (deci nu dinstinct sau independent) cu unul din cele două drumuri menţionate sau cu o combinaţie a lor, în care de altfel fiecare din ele este permis a se repeta. Cu alte cuvinte domeniul este astfel conformat, încât nu se poate duce în el decât o *singură curbă închisă, simplu ireductibilă, distinctă*, toate celelalte curbe închise fiind, ori mutual transpozabile cu aceasta (parcurgând-o eventual de mai multe ori) ori *reductibile.* Ca exemplu în trei dimensiuni avem torul, iar în două dimensiuni suprafaţa unei coroane, formată din două cercuri concentrice, sau suprafaţa din afara coroanei, care se întinde la ∞, sau orice domeniu homeograf cu unul din acestea (Fig. 21).

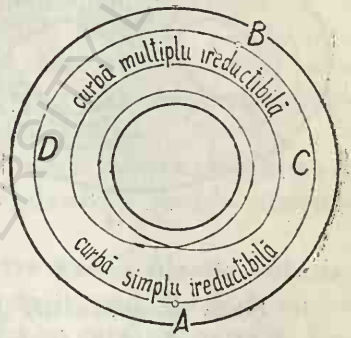


Fig. 22.

Un domeniu este liniar de *n ori conex*, atunci când în el se pot duce *n* şi numai *n* drumuri mutual netranspozabile sau (ceeace revine la acelaşi lucru) atunci când în el se pot duce $n-1$ şi nu mai multe curbe închise, simplu ireductibile şi distincte (netranspozabile mutal). Fig. 23 reprezintă un domeniu superficial, de conexitate liniară triplă, deci cu două curbe închise simplu ireductibile, de ex. cele mici trasate punctat. O curbă, care ocoleşte ambele curbe-frontiere interioare, nu este distinctă, ca fiind mutual transpozabilă cu cele două curbe punctate menţionate, care prin transformare continuă se pot atinge într'un punct comun şi transpune în curba unică ce le ocolea.

b) Tăeturi. Să presupunem că am avea un domeniu de n ori conex, deci cu $n-1$ curbe închise distincte sau independente, simplu ireductibile. Va fi atunci posibil a duce o tăetură, care să taie într'un singur punct pe una din aceste curbe închise, fără a tăia nici una din celelalte $n-2$. O astfel de tăetură, nu strică conexitatea domeniului, deoarece curba închisă tăiată rămâne ca drum de legătură dintr'o parte la alta a tăeturii. Conexitatea domeniului s'a scoborît totuși prin aceasta cu un grad, căci orice curbă închisă din domeniul astfel modificat este transpozabilă numai pe una sau mai multe din cele $n-2$ curbe închise, neîntâlnite de tăetură.

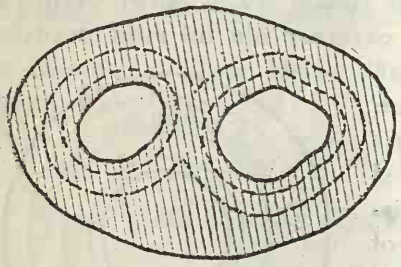


Fig. 23

O a doua tăetură, dusă în același mod în domeniul astfel modificat, va reduce evident cu încă o unitate gradul de conexitate, astfel că domeniul prin $n-1$ tăeturi potrivite devine simplu conex.

Dacă domeniului, devenit astfel simplu conex, i se aplică o nouă tăetură, el va fi despărțit în două părți separate. Intradevăr, dacă n'ar fi astfel, s'ar putea duce un drum prin domeniu dela un punct așezat de-o parte a ultimei tăeturi la un punct vecin, așezat de cealaltă parte a tăeturii, determinând astfel, în domeniul precedent, o curbă închisă ireductibilă, lucru imposibil într'un domeniu presupus simplu conex.

Așa dar, într'un domeniu de n ori conex se pot duce, fără a se distruge conexitatea domeniului, $n-1$ tăeturi și nu mai multe. Această proprietate poate servi drept criteriu pentru definirea gradului de conexitate al unui domeniu, în locul numărului egal de curbe închise simplu ireductibile, distincte.

c) **Mișcare nerotațională cu constante ciclice după contururi ireductibile dinstincte.** Într'un spațiu plin cu fluid în mișcare potențială sau nerotațională, circulația după două curbe închise oricare, mutual transpozabile, $ABCA$ și $A'B'C'A'$, au aceeași valoare. Intradevăr, cele două curbe închise se pot pune în legătură printr'o suprafață continuă, în întregime așezată în domeniu, iar teorema lui *Stokes* ne va da atunci pe frontiera totală a acelei suprafețe:

$$I_{ABCA} + I_{A'C'B'A'} = 0$$

sau

$$I_{ABCA} = I_{AB'C'A}.$$

Dacă o curbă închisă $ABCA$ se poate transpune pe ansamblul a două sau mai multe curbe închise $A'B'C'A'$, $A''B''C''A''$ etc., toate aceste curbe închise se pot pune în legătură printr'o suprafaţă continuă (generată în timpul transpunerei), aşezată întreagă în domeniu şi care să fie mărginită sau conturată complet de curbele în chestiune. Vom avea astfel:

$$I_{ABCA} + I_{A'C'B'A'} + I_{A''C''B''A''} + \ldots\ldots\ldots = 0$$

sau

$$I_{ABCA} = I_{A'B'C'A'} + I_{A''B''C''A''} + \ldots\ldots\ldots,$$

cu alte cuvinte circulaţia după o curbă închisă arbitrară, este egală cu suma circulaţiilor după diferitele curbe închise ale ansamblului în care se poate transpune prima curbă.

Fie acum un domeniu de $n+1$ ori conex, în care prin urmare se pot duce n curbe distincte (independente), simplu ireductibile: $c_1, c_2 \ldots\ldots c_n$.

Circulaţiile după aceste curbe închise fie $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots\ldots \Gamma_n$, cu semnul ce depinde de sensul integrării dealungul fiecărei curbe parcurse. Să luăm ca sens pozitiv acela în care s'a socotit fiecare Γ. Se poate indica acum valoarea circulaţiunei în orice altă curbă închisă arbitrară. Intradevăr această curbă, plecând dela un punct A şi înapoindu-se tot la A, trebue să fie transpozabilă pe o combinaţie a curbelor $c_1, c_2, \ldots\ldots c_n$, de ex. parcurgându-se c_1 de p_1 ori, c_2 de p_2 ori, etc., unde p va fi luat pozitiv sau negativ, după cum parcursul se face în sensul pozitiv sau negativ al fiecărei curbe închise.

Circulaţia căutată va fi, aşa dar,

$$\Gamma = I_{A\ldots A} = p_1\Gamma_1 + p_2\Gamma_2 + p_3\Gamma_3 \ldots p_n\Gamma_n. \qquad (13)$$

Cum două drumuri între A şi B din domeniu (drumuri ce eventual ar putea coincide) formează împreună o curbă închisă, rezultă că integralele curbilinii respective I_{AB} şi I'_{AB} nu pot diferi între ele decât prin expresii de forma (13). Intradevar $I_{AB} + I'_{BA} = I_{A\ldots A}$, de unde $I_{AB} = I'_{AB} + I_{A\ldots A}$. Dacă prin Φ se înseamnă ca şi la pag. 106—7 integrala curbilinie de la un punct fix O, luat ca origină arbitrară, până la un punct variabil P (care poate reprezenta fie pe A fie pe B):

$$\Phi = \int_O^P v_x\,dx + v_y\,dy + v_z\,dz \qquad (14)$$

şi nu se indică precis care este drumul integrării, Φ nu este determinat de cât cu aproximaţia unei mărimi de forma (13).

Dacă însă se duc n tăeturi spre a se face ca domeniul să devină simplu conex, integrarea (14) făcându-se în domeniul astfel modificat (adică fără a străbate niciuna din tăeturi), Φ va fi o funcţiune uniformă ca şi în cazurile studiate până acum. Această funcţiune va fi deasemenea continuă în domeniul modificat, însă valorile ei din două puncte învecinate A şi B (fig. 24), aşezate de ambele părţi ale unei tăeturi, şi atinse succesiv în parcurgerea unei curbe, pentru care se ia integrala de linie, vor diferi cu $\pm\Gamma$.

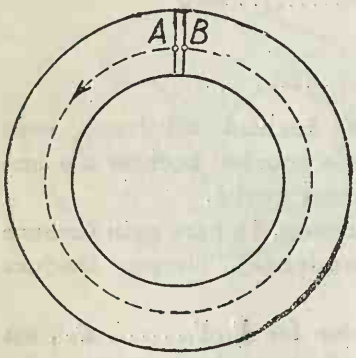


Fig. 24

După cum am mai spus, funcţiunea Φ într'un punct A comportă o constantă arbitrară, valoarea iniţială Φ_0 sau I_0 (faţă de o origine arbitrară) fiind stabilită odată pentru totdeauna în cursul unui calcul.

In cazul când integrarea se face după o *curbă închisă* în domeniul nemodificat prin tăeturi, circulaţia $I_{A\ldots A}$ va avea forma (13); plecând aşadar dela $\Phi_A = I_{0A}$ iniţial, Φ va creşte după integrare cu o cantitatea $I_{A\ldots A}$, în care fiecare străpungere a unei tăeturi, efectuată la descrierea curbei închise ireductibile corespuzătoare în sensul ei pozitiv, este socotită cu Γ respectiv, iar în sensul invers cu $-\Gamma$. De exemplu în cazul unei coroane circulare cu o tăetură, integrarea s'ar face dela A aşezat de o parte a tăeturei la B aşezat de cealaltă parte, mergând în sensul săgetei, şi pe urmă s'ar străbate tăetura dela B la A (pentru a avea o curbă închisă). Se vede că esenţialul în creşterea circulaţiuni cu Γ constă în descrierea unei curbe *complete* (dela A, prin B, la A) iar nu în simpla străpungere a tăeturei, a cărei poziţie este de altfel arbitrară. Deoarece însă descrierea unei curbe închise simplu ireductibile atrage după sine şi o străpungere a tăeturei, aceste două noţiuni devin echivalente pentru *curbele închise*. Precizând drumul parcurs dela A la B, se va putea oricând, pentru evaluarea integralei de linie I_{AB}, transpune acel drum într'o combinaţie de curbe închise ireductibile, distincte, care vor da loc la o integrală $I_{A\ldots A}$ de forma (13), plus un rest de integrală I_{AB} pe un drum care nu străpunge nici o tăetură.

Dacă deplasăm pe P cu o cantitate infinitezimală, paralel cu fiecare axă coordonată, găsim și aici

$$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad v_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

astfel că Φ satisface definiția unei funcțiuni de viteză, fiind însă o funcțiune *multiformă* și anume *ciclică*, fără posibilitate de a face să corespundă fiecărui punct al domeniului nemodificat o singură valoare determinată a lui Φ, în așa fel ca să formeze un ansamblu continuu. Intradevăr, dacă P descrie o curbă închisă ireductibilă, Φ în general nu revine la valoarea lui inițială, ci va diferi de această cu o cantitate de forma (13). Cantitățile Γ_1, Γ_2, ... Γ_n, cu care crește, atunci când P descrie câte una din diferitele curbe închise distincte ale domeniului, se numesc *constantele ciclice* ale lui Φ.

Teorema lui *Thomson*, stabilită în Cap. V pentru cazurile în care ea se aplică, arată că în acele cazuri aceste constante sunt independente de timp.

Ca exemplu putem lua cazul rotației potențiale a unui lichid în jurul axei z cu o vitesă de rotație a diverselor molecule $\omega = \frac{k}{r^2}$, funcție de distanța r la axă. Expresia funcției de vitesă este

$$\Phi = k \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} + const = k\theta + const,$$

deci și

$$I = k\theta + const, \qquad (14.1)$$

θ fiind de ex. cuprins între 0 și 2π.

Domeniul în această problemă este dublu conex, deoarece axa z, în care calculul dă pentru vitesă o valoare infinită, trebue exclusă din domeniu, pentru a se putea aplica teorema lui *Stokes*; rezultă că două curbe între două puncte A și B oarecari ale domeniului nu se pot transpune una într'alta, dacă ele sunt luate de o parte și de alta a axei z, ca de ex. ACB și ABD, care împreună formează o curbă ireductibilă. Putem lua ca tăetură semiplanul xz cu partea pozitivă a axei x, transformând astfel domeniul în simplu conex. Circulația după orice curbă închisă $ACBDA$, care străpunge odată această

tăetură şi care poate fi de pildă o circumferinţă, este (vitesa liniară $\frac{k}{r}$ are direcţia elementului $ds = rd\theta$)

$$\int_0^{2\pi} \frac{k}{r} rd\theta = 2\pi k,$$

ceeace se putea găsi imediat, luând integrala (14.1) pe un contur simplu în jurul originei.

Circulaţia însă după o curbă închisă, care nu străpunge tăetura, adică după o curbă reductibilă, este nulă. In domeniul modificat prin tăetura făcută, Φ poate fi luat ca o funcţie uniformă, de ex. $k\theta$, însă pe când valoarea lui imediat pe faţa superioară a tăeturii est nulă, imediat pe faţa inferioară (după parcursul $\theta = 2\pi$) va fi $2k\pi$.

Lucrurile se petrec ca şi cum în axă ar fi o mişcare rotaţională, al cărei flux de $\Omega = 2\omega$ ar fi $2k\pi$, singurul flux pe care îl constatăm, oricare ar fi conturul înconjurător, deoarece restul mişcării este potenţială.

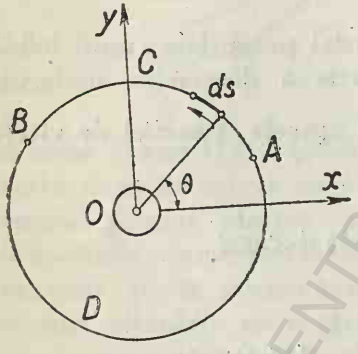


Fig. 25

Ori, cum în natură nimic nu se poate concentra într'o linie sau un punct, trebue să admitem că mişcarea rotaţională în chestiune este concentrată într'un tub de o rază foarte mică r_0. Presupunând rotaţionalul uniform repartizat pe aria secţiunei πr_0^2, am avea $\Omega = 2\omega = 2\frac{k}{r_0^2}$, ceeace arată că, cu cât vom admite această secţiune mai mică, cu atât rotaţionalul, *uniform repartizat*, va fi mai mare (neputând totuşi atinge valoarea ∞) pentru ca să avem în toate cazurile

$$\pi r_0^2 \times \frac{2k}{r_0^2} = 2k\pi.$$

Vom vedea că, în practică, aşa se reprezintă nucleul unui vârtej, înconjurat de o mişcare de rotaţie, care nu este însă rotaţională ci potenţială. Nucleul se poate considera ca uu cilindru solid în rotaţie uniformă cu vitesa unghiulară $\frac{k}{r_0^2}$.

d) **Metodă de studiu bazată pe tăeturi.** Modul de reprezentare ce urmează este de asemenea util în tratarea domeniilor multiplu conexe.

Pe baza existenței, admise aici, a unui potențial de viteză și pe baza definițiunii a doua (aceea bazată pe tăeturi), dată unui domeniu de $n-1$ ori conex, observăm că, într'un domeniu simplu conex, o suprafață echipotențială (de egal Φ) oarecare, ori va fi închisă în domeniu, ori va tăia suprafața limitativă a acestuia, în ambele cazuri despărțind domeniul în două părți deosebite. Dacă ne închipuim că s'a tras întregul sistem al acestor suprafețe diferind cu un salt infinitesimal $d\Phi$ între ele, orice drum închis, cuprins în domeniu, care taie odată o suprafață echipotențială, trecând dintr'o parte a ei într'alta, trebue să o mai taie și o a doua oară la reîntoarcerea lui în partea de unde a plecat, tăind-o deci în sens invers; astfel la fiecare ds al drumului, cuprins între două suprafețe echipotențiale succesive, diferind cu $d\Phi$, corespunde un al doilea ds similar, dând un element de circulație $= -d\Phi$, care va anula pe primul.

Aceasta explică clar de ce circulația dealungul curbei închise este nulă.

Dacă însă domeniul este *multiplu conex*, o suprafață echipotențială poate forma o tăetură fără a despărți domeniul în două părți deosebite.

Dacă ducem toate suprafețele *distincte* de acest fel, care se pot duce fără a se distruge conexitatea, numărul lor prin definiție nu va putea fi mai mare decât n, căci orice altă suprafață echipotențială se va putea transpune pe una din cele menționate, cu care ar fi homeomorfă. Dacă tragem acum un contur din o parte a unei astfel de tăeturi spre cealaltă parte a ei până la închidere, fără a străpunge nici una din tăeturile rămase, orice altă suprafață echipotențială, tranpozabilă cu prima, va fi străpunsă odată sau un număr impar de ori de conturul trasat, pe când restul suprafețelor, transpozabile cu oricare alta din tăeturi, va fi străpunsă de acel contur, ori niciodată, ori un număr par de ori. Rezultă că circulația după conturul închis, astfel construit, nu se va anula ci va fi o funcție ciclică.

e) **Enunțul condițiilor de pe frontieră.** Trecând acum la fluidele incompresibile vedem că, independent de faptul că Φ ar fi ciclic sau nu, derivatele $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ de ordin mai înalt sunt funcțiuni

uniforme, astfel că Φ satisface totdeauna ecuaţia de continuitate

$$\Delta\Phi = 0 \qquad (15)$$

sau forma echivalentă

$$\oint^{\sigma} \frac{\partial\Phi}{\partial n} d\sigma = \oint^{\sigma} grad\, \Phi\, d\vec{\sigma} = 0\,, \qquad (16)$$

integrala întinzându-se asupra suprafeţei totale a unei părţi arbitrare a domeniului.

Prin teorema §1, *Fa*) ce preeede s'a stabilit că, în întreg domeniul în care avem (15), dacă Φ este constant pe frontieră va fi constant în întreg domeniul. Această teoremă este valabilă şi pentru domeniile multiplu conexe, deoarece Φ, dacă este constant pe întreaga frontieră, trebue să fie cu necesitate univoc.

Enunţurile teoremelor însă pentru celelalte cazuri *b*) etc. ale aceluiaşi paragraf nu sunt valabile, decât dacă circulaţia după orice curbă închisă a domeniului este nulă, adică la un domeniu simplu conex. Dacă conexitatea este multiplă, enunţul trebue modificat astfel:

Mişcarea nerotaţională a unui fluid incompresibil într'un domeniu de n ori conex este determinată, dacă se dau atât componentele normale ale vitesei în toate punctele frontierei, cât şi valoarea circulaţiei pentru fiecare din cele n curbe închise ireductibile distincte ale domeniului.

Intradevăr, dacă Φ_1, Φ_2 sunt funcţiile de vitesă (ciclice) a două mişcări supuse condiţiilor de mai sus, funcţia

$$\Phi = \Phi_1 - \Phi_2,$$

din care constantele ciclice au dispărut, va fi o funcţie uniformă care, pentru fiecare punct al domeniului va satisface relaţia (15) şi pentru fiecare punct al frontierei va satisface relaţia $\frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0$.

Rezultă după raţionamentul din menţionatul paragraf că Φ uniform va fi constant, astfel că mişcările determinate de Φ_1 şi Φ_2 vor fi identice.

f) **Extinderea, datorită lordului Kelvin, a teoremei lui Gauss şi a formulelor lui Green prin reducerea la spaţiu simplu conex.** In tratarea diferitelor forme caracteristice ale teoremei lui *Gauss* s'a presupus că f şi f_1 sunt funcţiuni arbitrare dar uniforme. Formularea acelei teoreme trebue schimbată, dacă una din funcţiuni este ciclică, precum poate fi cazul unui domeniu multiplu conex, asupra căruia se întinde integrarea.

Să presupunem de ex. că f este ciclic; integralele cari conțin pe f vor fi nedeterminate ca și f, și pentru a face să dispară nedeterminarea vom introduce tăeturile ce transformă domeniul în simplu conex, unde f poate atunci să fie considerat continuu și uniform; formula respectivă a lui *Green* va rămâne în felul acesta valabilă, cu condiția ca ambele fețe ale fiecărei tăeturi să fie privite ca părți ale frontierei, fiind socotite în integrala de suprafață. Fie $d\sigma'$ un element al unei tăeturi și Γ' constanta ciclică corespunzătoare, iar $\frac{\partial f_1}{\partial n}$ derivata lui f_1 în direcția normalei exterioare a lui $d\sigma'$.

Cum în părțile integralei de suprafață, care provine din cele două fețe ale lui σ', $\frac{\partial f_1}{\partial n}$ este același ca valoare absolută, trebuind însă a fi luat cu semne contrarii din cauza sensului contrar al normalelor exterioare, elementele corespunzătoare se vor anula două câte două, pe când valoarea lui f de pe fața de plecare (în sensul pozitiv al circulației pe conturul închis respectiv) va crește până la sosire cu Γ'. Obținem în cele de pe urmă pentru elementul de integrală, provenit din $d\sigma'$, valoarea

$$\Gamma' \frac{\partial f_1}{\partial n} d\sigma'.$$

Forma primă (5.3) a lui *Green* devine atunci

$$\int^{\tau} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial f_1}{\partial z} \right) d\tau + \int^{\tau} f \Delta f_1 \, d\tau$$

$$= \oint^{\sigma} f \frac{\partial f_1}{\partial n} d\sigma + \Gamma' \int^{\sigma'} \frac{\partial f_1}{\partial n} d\sigma' + \Gamma'' \int^{\sigma''} \frac{\partial f_1}{\partial n} d\sigma'' + \dots, \quad (17)$$

unde în membrul al doile $\sigma', \sigma'' \dots$ reprezintă suprafețele tăeturilor.

Multiplicatorul fiecărui Γ în cazul când f_1 reprezintă o funcție de viteză Φ_1 (și atunci $\Delta\Phi_1 = 0$) este evident debitul prin tăetura respetivă în mișcarea definită de potențialul sau funcția de viteză $f_1 = \Phi_1$.

Valorile lui f din integralele a doua și a treia se determină după metoda indicată mai sus (adică transformând spațiul în simplu conex).

Dacă şi f_1 este ciclic cu constantele ciclice Γ_1', Γ_1''..., forma a doua (5.3) a lui *Green* devine prin acelaşi procedeu

$$\int^{\tau}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f_1}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial f_1}{\partial z}\right)d\tau+\int^{\tau} f_1\Delta f\,d\tau$$

$$=\oint^{\sigma} f_1\frac{\partial f}{\partial n}d\sigma+\Gamma_1'\oint^{\sigma'}\frac{\partial\Phi}{\partial n}d\sigma'+\Gamma_1''\oint^{\sigma''}\frac{\partial\Phi}{\partial n}d\sigma''+\ldots \qquad (18)$$

Ultimele două ecuaţiuni, împreună, constituesc extinderea dată de *Lordul Kelvin* teoremei lui *Gauss* şi formulei lui *Green*.

4. Exemple de mişcări potenţiale în trei dimensiuni în cazul fluidelor incompresibile.

In formule vom întrebuinţa în general funcţiunea de vitesă Φ (în locul potenţialului de viteză $\varphi=-\Phi$, introdus în special spre a se arăta analogiile cu potenţialul de forţă). Când nu va fi raţiune deosebită pentru a recurge la funcţiunea φ, vom vorbi indiferent de *funcţie* sau *potenţial de viteză*, înţelegând mai în totdeauna prin ambele denumiri funcţia Φ de viteză, practic adoptată în noile tratate de hidrodinamică.

Cum funcţiunea de vitesă a unei mişcări nerotaţionale sau potenţiale de fluid incompresibil ascultă de legea lui *Laplace* în tot spaţiul, cu excepţia punctelor cu surse, este interesant de a cerceta de pe acum câteva soluţii ale acestei ecuaţii

$$\Delta\Phi=0,$$

studiind felul mişcărilor sau curenţilor pe cari îi pot reprezenta funcţiunile respective Φ. Metodele generale pentru aflarea de asemenea soluţiuni vor fi tratate amănunţit în capitolul următor.

Aplicaţia Nr. 27. Să se studieze curentul reprezintat prin

$$\Phi=ax+by+cz,$$

în care a, b, c sunt constante sau funcţiuni numai de timp.

Răspuns. Vom avea

$$v_x=\frac{\partial\Phi}{\partial x}=a\,,\qquad v_y=\frac{\partial\Phi}{\partial y}=b\,,\qquad v_z=\frac{\partial\Phi}{\partial z}=c,$$

verificându-se că

$$\Delta\Phi\equiv\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0.$$

Mişcarea fluidului este o translaţie. Dacă a, b, c sunt constante, mişcarea este permanentă. Dacă a, b, c sunt funcţiuni de timp, avem o mişcare nepermanentă sau variabilă.

Liniile de curent sunt date de relațiile

$$dx : dy : dz = a : b : c,$$

adică

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \quad \text{sau} \quad y = \frac{b}{a} x + const$$

în proecție pe planul xy și

$$\frac{dz}{dx} = \frac{c}{a} \quad \text{sau} \quad z = \frac{c}{a} x + const$$

în proecție pe planul xz. Liniile de curent sunt deci rectilinii.

O astfel de mișcare translatoare variată ia naștere de ex. atunci, când un vas plin cu lichid și complet închis este deplasat paralel cu el însuși, adică fără a se roti, deplasarea nefiind supusă nici unei alte restricțiuni. În acest exemplu se vede clar diferența dintre *liniile de curent*, cari aci sunt rectilinii, și *traectoriile* moleculelor cari pot fi orice linii curbe, paralele între ele, descrise de diferitele puncte (presupuse solidare cu vasul) ocupate de moleculele în repaus relativ, mișcarea de translație putând fi arbitrară.

Aplicația Nr. 28. Să se studieze mișcarea

$$\Phi = \frac{1}{2}(ax^2 + by^2 + cz^2).$$

Răspuns: Cum $\Delta\Phi = a + b + c$, soluțiile sunt date de condiția $a + b + c = 0$. Astfel:

a) Dacă $b = a$ și $c = 0$, adică $\Phi = \frac{a}{2}(x^2 - y^2)$, avem o mișcare plană (sau în două dimensiuni), caracterizată prin vitezele:

$$v_x = ax \qquad v_y = -ay \qquad v_z = 0.$$

Liniile de curent au ca ecuații:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_y}{v_x} = -\frac{y}{x}$$

sau

$$\log xy = const \quad \text{adică} \quad xy = const.$$

Avem o familie de hiperbole echilatere cu axele x, y drept asimptote (fig. 25). O asemenea mișcare cu un plan de simetrie sau separație yOz se produce la întâlnirea sau isbirea unui perete plan indefinit zOx de către un curent plan (planul director al acestuia fiind paralel cu planul xOy), despicat în două printr'un perete foarte subțire după planul yOz, care, în urma formării curentului, ar putea fi suprimat.

Dacă acel al doilea perete yOz se menține, avem de fapt 2 curenți simetrici separați, în unghiurile diedre respective.

Dacă în loc de peretele plan zOx am avea un cilindru, tangent după muchia Oz la planul zOx și isbit în aceleași condițiuni, funcțiunea potențială

a curentului astfel obţinut, descompusă în serie şi limitată numai la termenul de gradul al doilea, va avea în domeniul muchiei Oz aceiaşi formă ca în cazul când cilindrul ar fi înlocuit prin planul tangent.

Mişcarea fiind plană se poate studia numai în planul xOy.

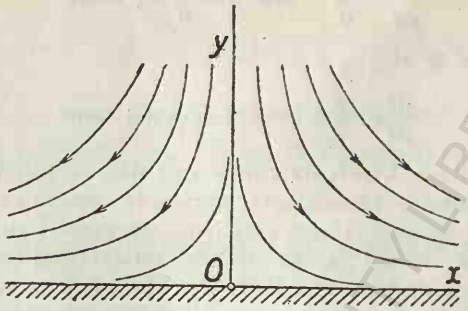


Fig. 25

b) O altă variantă pentru satisfacerea condiţiei $a+b+c=0$ este de a pune $b=a$ şi $c=-2a$, rezultând:

$$\Phi=\frac{a}{2}\,(x^2+y^2+2z^2),$$

iar ca ecuaţie pentru liniile de curent, $dx : dy : dz = x : y : z$.

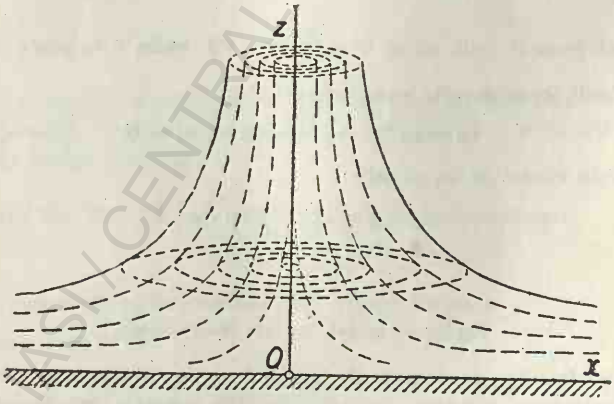


Fig. 26

Proecţiile acestor linii pe planul xy au drept ecuaţii:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{x}{y} \quad \text{sau} \quad x=cy.$$

Iar pe planul xz:

$$\frac{dx}{dz}=-\frac{x}{2z} \quad \text{sau} \quad x^2z=const.,$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

adică o familie de hiperbole de gradul al treilea, având axele x și z ca asimptote.

Mișcarea aceasta se poate produce la întâlnirea unui perete plan, așezat în planul xy, de către un curent simetric în jurul unei axe z (fig. 26), presupusă solidă și care, după producerea curentului, se poate suprima. Și aci a poate fi o constantă sau o funcție de timp; cum însă a nu intră în ecuația liniilor de curent, acestea sunt în toate cazurile invariabile și coincid cu traectoriile, mișcarea fiind semi-permanentă în cazul când a este variabil. Influența variației timpului intervine numai în mărimea vitezelor printr'un factor, funcție de timp.

Aplicația Nr. 29. A se studia curentul unei *surse punctiforme* (pozitivă sau negativă).

Răspuns. Să considerăm funcția

$$\Phi = \frac{b}{r} \quad \text{cu} \quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Cum $\Phi = const$ sunt sfere concentrice, având centrul în origină, $\overline{v} = grad\,\Phi$ este, precum știm, normal pe aceste suprafețe și avem în acest caz numai vitese radiale

$$v = v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = -\frac{b}{r^2}.$$

iar liniile de curent (totodată și traiectorii) emană din centru.

Condiția de incompresibilitate se poate verifica, constatându-se, fie că ecuația lui *Laplace* $\Delta\Phi = 0$ este satisfăcută, fie că pentru o suprafață închisă oarecare avem

$$\oint^{\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial n}\, d\sigma \equiv \oint^{\sigma} grad\,\Phi\, d\overline{\sigma} = 0.$$

Ecația lui *Laplace* se poate verifica ușor prin calcul direct (aplicația 24), fiind valabilă în tot spațiul (în afară de punctul sursei unde, deși $\Delta\Phi$ păstrează forma egalității cu 0, derivatele sunt ∞). Mai simplu este însă de a face a doua verificare, constatând că Q, dat de $v_r = grad\,\Phi$ prin orice suprafață sferică de rază r, este constant, căci atunci integrala în chestiune pentru σ, constituit din două suprafețe sferice concentrice arbitrare în spațiul lichid, precum și pentru orice suprafață închisă infinitezimală, este nulă.

Intradevăr mai întâi

$$Q = 4\pi r^2 v_r = -4\pi b.$$

După teorema lui *Gauss* vom avea atunci și $\int^{\sigma} \Delta\varphi\, d\sigma = 0$, iar cum aceasta se aplică și pentru cazul când sferele sunt infinit vecine, iar datorită simetriei și pentru orice element infinitesimal, decupat din această coaje sferică printr'un con de unghiu solid infinitesimal cu vârful în centru, rezultă în orice punct $\Delta\varphi = 0$.

Dacă b este pozitiv, curentul se îndreaptă în spre interior (*punct de aspirație, put* sau *sursă punctiformă negativă*). Dacă b este negativ, scurgerea se face înspre exterior *(sursă punctiformă pozitivă)*.

Vitezele sunt invers proporționale cu pătratul distanței la origină,

aceasta constituind un punct singular, deoarece acolo (Q fiind finit) viteza devine ∞. Deaceia în apropierea originei concepţia unei surse punctiforme este o ficţiune şi teoria nu se aplică decât de la oarecare distanţă dela origină. Ne putem închipui însă de ex. jumătatea curentului în chestiune, ca fiind datorită aproximativ mişcărei

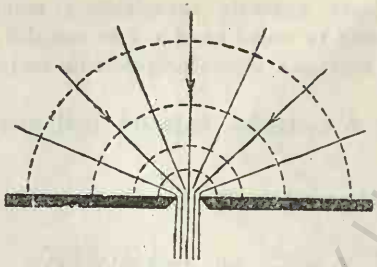


Fig. 27

convergente sau divergente a apei printr'un mic orificiu practicat într'un perete-plan, mişcare reprezentată (cu excluderea vecinătăţii imediate a orificiului) prin funţia $\Phi = \frac{b}{r}$ (fig. 27).

In cazul unui orificiu foarte mic, dar în orice caz finit, vitesele în interior, ceva, mai departe de orificiu, sunt radiale, satisfăcând deci şi condiţia la frontieră (de a fi tangente peretelui).

Orificiul trebue însă limitat şi aci printr'o semisferă foarte mică, spre a exclude punctul singular cu $v = \infty$.

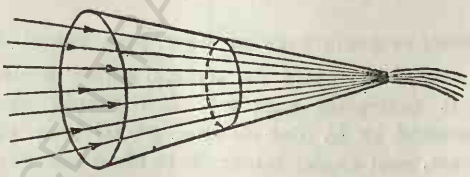


Fig. 28

In acelaşi mod se poate reprezenta curentul ce se scurge printr'un ajutaj conic, unde condiţiile la limită sunt deasemenea satisfăcute de forma curentului în chestiune (fig. 28).

Aplicaţia Nr. 30. La deformarea unui curent paralel uniform, a se constata echivalenţa prezenţei unui corp cuazi-cilindric indefinit, având prora rotunjită şi axa în direcţia curentului, cu prezenţa unei surse punctiforme.

Răspuns. Considerarea surselor pozitive şi negative, concentrate (punctiforme) sau distribuite pe o linie, o suprafaţă sau un volum şi care produc evident mişcări potenţiale, prezintă în Hidro-dinamică un deosebit interes, atât practic cât şi teoretic, cu analogii frapante în domeniul Electrostaticei şi al Transmisiunei căldurei. Intre altele, prin ipoteza unor surse pozitive şi negative de debit total

mul distribuite pe o axă se poate reprezenta curentul stabilit în jurul unui corp în formă de rotație. (Vezi Cap. IV metoda lui *Rankine*).

Să considerăm mai întâi acțiunea unui asemenea corp cuazi-cilindric, având partea din față rotunjită, atunci când înaintează în direcția axei contra moleculelor, inițial în repaus, ale unui fluid înconjurător.

Partea rotundă din față împinge moleculele în toate părțile, exact ca și cum

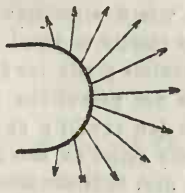


Fig. 29

ar exista în centrul calotei o sursă pozitivă, care ar înainta solidar cu corpul (fig. 29). Și într-adevăr, prezența unei anumite surse în mișcare ar produce în fie ce moment același spectru de linii de curent în fluidul din afara aceleași suprafețe, ca și un corp cuazi-cilindric cu partea din față rotunjită, pe care deci sursa îl poate înlocui în această privință. Mișcarea este evident *variabilă*. Forma precisă de meridiană, corespunzătoare unei surse punctiforme, se va stabili în Cap. IV (aplicații).

Dacă privim acum regimul *staționar*, care are loc în cazul când întreg ansamblul ar fi animat de o viteză egală și contrară aceleia a corpului, îndreptată

Fig. 30

deci după axa lui, pe care o vom lua ca axă z, vom avea un curent care, departe de corp va fi paralel și uniform ($\Phi = az$), iar în apropiere și în jurul acestuia va da un spectru ca în Fig. 30, care corespunde scurgerii acelui curent contra corpului sau sursei fictive, socotită fixă. Curentul înconjurând corpul sau sursa fictivă își curbează firele cu atât mai pronunțat cu cât ele sunt mai aproape de corp. Rezultă că, în lipsa corpului, suprapunerea scurgerii unei surse fixe cu curentul uniform sau paralel ce s'ar scurge contra ei va da același spectru, fluidul emanat din sursă rămânând confinat în interiorul suprafeței corpului fictiv, de anumită formă cu partea cuazi-cilindrică indefinită dinapoi. Dacă am plasa în axă o sursă negativă, care să absoarbă tot fluidul emis de sursa pozitivă din față, va

rămne, â datorită acestor două surse de debite egale și de semn contrar, o acțiune limitată de deformație a curentului paralel, cum este de fapt și efectul prezenței unui corp fix de formă corespunzătoare, înplântat în fluid. Astfel de ex., dacă sursa punctiformă negativă se găsește foarte aproape de cea pozitivă, această pereche de surse (*dubleu*) echivalează cu prezența unui corp sferic, cu centrul în dubleu (vezi Cap. IV).

In modul acesta, după cum vom arăta mai departe, se poate calcula relativ ușor, cu ajutorul unor funcții de viteză simetrice în jurul unei axe, curentul în jurul unui corp, având formă de rotație în jurul aceleiași axe. In loc de o pereche de surse punctiforme, una înainte și alta înapoi, în interiorul frontierei corespunzătoare corpului echivalent, se pot presupune mai multe surse sau o distribuție de surse continuă sau discontinuă (cu condiția ca suma algebrică a debitelor surselor să fie nulă), și se poate studia astfel un mare număr de corpuri în formă de rotație, mișcate într'un fluid. Așa dar, în Hidrodinamică studiul surselor este util la rezolvarea multor probleme practice, de ex. la studiul formei de dat aeronavelor.

Aplicația Nr. 31. A se găsi funcția de viteză a unui *ansamblu de surse simple* repartizate volumic, superficial sau liniar.

Răspuns. O sursă punctiformă de un debit de volum finit Q (fiind vorba de fluide incompresibile, vom spune simplu *debit*, subînțelegând *debit de volum*), luând ca origină punctul fix din care emană, are ca viteză la extremitatea razei vectoare $\overline{r}$ (viteză considerată ca pozitivă în sensul vectorului $\overline{r}$), precum am văzut:

$$v = \frac{Q}{4\pi r^2} \tag{19}$$

și deci ca funcție de viteză

$$\Phi = -\frac{Q}{4\pi r}. \tag{20}$$

Se vede că constanta b de adinioară este reprezentantă aici prin $-\frac{Q}{4\pi}$.

Dacă $Q < 0$, avem o sursă negativă sau un punct de absorbție. Fluxul total al vitesei prin o sferă de rază r, adică debitul de volum, este $4\pi r^2 v = Q$ (independent de r).

Funcția Φ, în esență $\frac{1}{r}$, ascultă peste tot de ecuația lui *Laplace* (vezi aplicația 29), afară de punctul sursei care este un punct singular (cu $\Phi = \infty$, $\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \infty$ și totuși $\Delta\Phi = 0$) și deci n'ar trebui considerat; dealtfel în mod impropriu am presupus că Q isvorește dintr'un punct, în loc de a-l socoti *repartizat* într'un volum finit.

Este totuși matematic explicabil ca o viteză $\to \infty$ într'un punct, înmulțită cu suprafața unei sfere elementare $\to$ zero, să dea un debit finit Q.

Putem ușor concepe, mai în conformitate cu realitatea, o repartiție continuă de surse în spațiu, dacă atribuim spațiului $d\tau$ un debit $q d\tau$, q însemnând intensitatea debitului sursei (adică debitul ce isvorăște din unitatea de volum), concepție

apropiată de realitate (contrar aceleia a unei surse punctiforme), și pentru care punctele singulare (cu $\Phi = \infty$ și $v = \infty$) dispar, deoarece când suprafața unei sfere tinde la zero, și debitul surselor cuprinse în ea tinde la zero. Funcția de vitesă a unui ansamblu de surse va fi atunci

$$\Phi = -\frac{1}{4\pi}\int^{\tau}\frac{q\,d\tau}{r}, \qquad (21)$$

satisfăcând și ea ecuația lui *Laplace* în tot spațiul, afară de punctele ocupate de surse, care însă nu sunt singulare, dar care în locul acestei ecuațiuni satisfac ecuația lui *Poisson*

$$\Delta\Phi = q. \qquad (22)'$$

Intradevăr, știm că $div\ \overline{v}$, și deci aci $\Delta\Phi$, reprezintă fluxul lui $\overline{v}$ ce iese din unitatea de volum; aceasta nu coincide cu dilatația în unitatea de timp (nulă în cazul fluidelor incompresibile), decât în lipsă de surse interioare. In caz când asemenea surse există, debitul lor pe unitatea de volum fiind q, atunci pentru fluidele incompresibile, pentru care dilatația de volum este nulă, avem $div\ \overline{v} = q$, aci $div\ \overline{v} \equiv \Delta\Phi = q$.

Vitesa în punctele ocupate de surse nu mai este aci ∞ și variază continuu, astfel că divergența ei, compusă din derivate de vitese:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

este finită, ca sumă de cantități finite, și totodată diferită de 0, fiind q (în cazul sursei punctiforme ea este, în punctul ocupat de sursă, sumă de cantități infinite, cari însă se anulează reciproc, dând formal $div\ \overline{v} \equiv \Delta\Phi = 0$).

Ecuația (22) este mai generală, conținând evident în ea și pe aceia a lui *Laplace*, întrucât în spațiul liber de surse avem $q = 0$.

Curentul definit de (21) este nerotațional, având ca vitesă

$$\overline{v} = -\,grad\int^{\tau}\frac{q\,d\tau}{4\pi r}.$$

Ecuația generală a lui *Poisson* are o singură integrală Φ, care împreună cu derivatele ei de prim ordin este finită, univocă și continuă (fără a prezenta niciun salt), anulându-se la infinitul de prim ordin. Această integrală este potențialul *Newtonian*, dat de expresia (21).

In afară de câmpurile de surse distribuite în spațiu, putem considera surse repartizate pe suprafețe sau pe linii. Funcția de viteză, în cazul unei repartițiuni superficiale de surse, este

$$\Phi = -\frac{1}{4\pi}\int^{\sigma}\frac{\rho\,d\sigma}{r}, \qquad (23)$$

unde ρ reprezintă intensitatea superficială a debitului (debit specific pe unitatea de suprafață). Această funcție Φ are în tot spațiul, afară de suprafețele ocupate de surse, toate proprietățile potențialului *Newtonian*, derivata ei primă fiind pe acele suprafețe continuă, adică fără salt la străbaterea acestora.

Funcția de viteză a unei repartiții liniare este analog

$$\Phi = -\frac{1}{4\pi}\int^{S}\frac{\varepsilon ds}{r}, \tag{24}$$

în care ε este intensitatea liniară de debit sau debitul specific liniar (pe unitatea de linie).

Aplicația Nr. 32. *Dubleu.* Combinația a două surse punctiforme $-Q, +Q$ în punctele $\overline{r'}[x',y',z']$ și $\overline{r'}+\overline{dr'}$ la distanța $|\overline{dr'}| = ds'$ una de alta, Q crescând pe măsură ce ds' tinde către zero, astfel ca produsul Qds să rămână constant și egal cu M, se numește *dubleu*, iar M *momentul* sau *intensitatea dubleului*. Dreapta dusă în direcția dela $-Q$ la $+Q$ și pe care se găsește $\overline{dr'} = \overline{ds'}$ $[dx', dy', dz']$ se numește *axa dubleului*. Dacă Q nu ar crește invers cu ds', ci ar rămâne constant, câmpul în jurul dubleului ar fi nul. A se găsi funcția de viteză a unui dubleu.

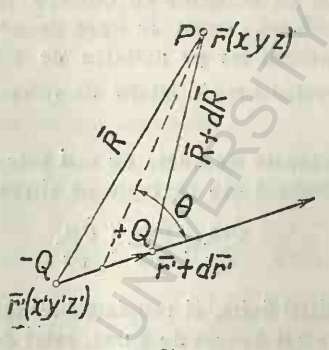


Fig. 31

Răspuns. Pentru a găsi funcția de viteză într'un punct (x, y, z) (Fig. 31) datorită dubleului, observăm că, $f(x', y', z', x, y, z)$ fiind funcția de viteză a unei surse simple cu debitul Q, așezată în (x', y', z') origina lui $\overline{ds'}$ (unde de fapt aci avem $-Q$), creșterea acestei funcțiuni, atunci când se trece la extremitatea lui $\overline{ds'}$, va reprezenta *funcțiunea de vitesă rezultantă* Φ a dubleului. Ori, această creștere (simplificând în al doilea membru scrierea pentru f) este

$$f(x'+dx',\ y'+dy',\ z'+dz') - f(x', y', z') = \frac{\partial f}{\partial x'}dx' + \frac{\partial f}{\partial y'}dy' + \frac{\partial f}{\partial z'}dz' = \frac{\partial (f(x'y'z')}{\partial s'}ds'$$

și cum funcțiunea în chestiune este

$$f = -\frac{Q}{4\pi R},$$

unde

$$R = [(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{\frac{1}{2}} \quad \text{adică} \quad \overline{R} = \overline{r} - \overline{r'}$$

cu

$$\frac{\partial R}{\partial x'} = -\frac{\partial R}{\partial x} = -\frac{x-x'}{R} \text{ etc.},$$

iar dacă $x'=y'=z'=0$

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{x}{R} \text{ etc.},$$

găsim pentru funcția de vitesă a dubleului

$$\Phi = \frac{M}{4\pi}\frac{1}{R^2}\frac{\partial R}{\partial s'} = -\frac{M}{4\pi}\frac{1}{R^2}\cos\theta, \qquad (25)$$

căci

$$\frac{\partial R}{\partial s'} = \frac{\partial R}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial s'} + \frac{\partial R}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial s'} + \frac{\partial R}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial s'} = -\frac{x-x'}{R}\frac{\partial x'}{\partial s'} - \frac{y-y'}{R}\frac{\partial y'}{\partial s'} - \frac{z-z'}{R}\frac{\partial z'}{\partial s'}$$

$$= -\cos(\overline{R}, \overline{ds'}) = -\cos\theta,$$

unde θ este unghiul format de vectorul R, care duce dela dubleu la punctul curent, cu axa dubleului. Dealtfel grafic se vede imediat că

$$\frac{dR}{ds'} = -\cos\theta.$$

Se vede că, în comparație cu expresia lui Φ pentru sursa simplă, găsim înlocuit pe Q prin $\frac{M\cos\theta}{R}$.

Într'un plan meridian, dus prin axa dubleului, liniile echipotențiale au ca ecuație (în coordonate polare) $\frac{\cos\theta}{R^2} = const$, iar liniile de curent, care le sunt ortogonale, sunt date de $\frac{\sin^2\theta}{R} = const$.

Dacă luăm originea în (x', y', z') și întrebuințăm coordonatele polare R și θ, ecuația din urmă, pusă sub formă diferențială (deci liberă de constanta de integrare) se deduce din prima ecuație prin condiția ortogonalității. In acest scop coeficientul unghiular al tangentei față de raza vectoare $\overline{R}$ și anume $R\frac{d\theta}{dR}$, în orice punct din prima familie de curbe (a cărei ecuație se va pune deasemenea sub formă diferențială, deci tot cu eliminarea constantei respective), trebue inversat și luat cu semn schimbat pentru a reprezenta coeficentul unghiular similar al curbei ortogonale din familia doua.

Deasemenea și dubleurile, teoretic punctiforme (fiind totuși puncte duble care implică orientare), pot fi repartizate, interesând numai repartiția *superficială* sau *liniară* și în general cu axa lor normală pe suprafața sau linia respectivă. In comparație cu sursa simplă va trebui să înlocuim intensitățile de debit superficial sau liniar e și ε din formulele (23 și 24) prin intensitățile respective de

moment de dubleu, superficial sau liniar, m sau μ, înmulţite cu $\frac{\cos\theta}{R}$ respectiv, conform celor arătate la dubleul punctiform, de ex. pentru o suprafaţă închisă σ

$$\Phi = -\frac{1}{4\pi}\oint^{\sigma}\frac{m}{R^2}\cos\theta\, d\sigma = \frac{1}{4\pi}\oint^{\sigma} m\frac{\partial\left(\frac{1}{R}\right)}{\partial n}d\sigma, \qquad (25.1)$$

sensul pozitiv al dubleului fiind după $\overline{n}$ exterior.

Aplicaţia Nr. 33. *Mişcări potenţiale aciclice date de repartiţiuni superficiale de surse.*

A se arăta că orice mişcare continuă nerotaţională aciclică a unui fluid incompresibil poate fi privită ca efectul unor surse simple şi duble, repartizate pe frontiera σ a fluidului (după cum un câmp electric, respectiv magnetic, se poate obţine prin o repartiţie de mase electrice sau magnetice), plecând dela formula (5.5) dedusă din teorema lui *Gauss*

$$\oint^{\sigma}\Phi\frac{\partial\Phi_1}{\partial n}d\sigma = \oint^{\sigma}\Phi_1\frac{\partial\Phi}{\partial n}d\sigma, \qquad (26)$$

unde Φ şi Φ_1 sunt două funcţiuni uniforme arbitrare de x, y, z, pentru care avem $\Delta\Phi = 0$ şi $\Delta\Phi_1 = 0$ în întreg spaţiul ocupat de fluid şi integrarea se face pe întreaga frontieră. Formula presupune Φ şi Φ_1 finite în interiorul lui σ.

Răspuns. Aci $\Phi(x,y,z)$ va fi o funcţie de vitesă, iar $\Phi_1 = \frac{1}{r}$ va putea reprezenta un potenţial de sursă fictivă punctiformă, unde r este distanţa punctului curent $P(x,y,z)$, la un punct fix $P'(x'y'z')$, care, la aplicarea teoremei lui *Gauss*, din care formula de mai sus derivă, poate fi fie în interiorul volumului τ, fie pe frontiera σ a acestuia, fie în exterior.

a) Să luăm mai întâi un punct fix P', al cărui Φ ne interesează, în interiorul fluidului, punctul curent (x, y, z) depe frontiera acestuia primind o anumită valoare Φ şi $\Phi_1 = \frac{1}{r}$, unde $\overline{r}$ este distanţa sa la punctul P'. Cum în acest caz Φ_1 devine în P' infinit şi formula lui *Gauss* se aplică numai atunci când Φ şi Φ_1, împreună cu derivatele de primul şi al doilea ordin sunt univoce şi finite, trebue exclus acest punct din domeniul de aplicaţie a formulei (26), ceiace se realizează ducând o mică sferă Σ cu centrul în P' şi considerând suprafaţa ei ca o frontieră interioară. Formula se va scrie atunci

$$\oint^{\Sigma}\Phi\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}d\Sigma + \oint^{\sigma}\Phi\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}d\sigma = \oint^{\Sigma}\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial n}d\Sigma + \oint^{\sigma}\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial n}d\sigma.$$

Pe suprafaţa sferică Σ avem

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} = -\frac{1}{r^2}.$$

Dacă înlocuim

$$d\Sigma = r^2\, d\omega$$

și facem $r \to 0$, prima integrală (pentru $r = 0$) devine $-4\pi\Phi_{P'}$.

Se poate ușor constata că a treia integrală, relativă la sferă, $\frac{1}{r}\oint^{\Sigma}\frac{\partial\Phi}{\partial n}\,d\Sigma$ este nulă, din cauza incompresibilității admise.

Așa dar

$$\Phi_{P'} = -\frac{1}{4\pi}\oint^{\sigma}\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial n}\,d\sigma + \frac{1}{4\pi}\oint^{\sigma}\Phi\,\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\,d\sigma, \qquad (27)$$

unde conform (23) putem pune $\frac{\partial\Phi}{\partial n} = e$ (desime sau intensitate superficială de surse simple), iar conform (25.1) $\Phi = m$ (desime sau intensitate superficială de moment de dubleu), întrucât dn este ceeace am însemnat cu ds' în cazul dubleului (axa acestuia) și prin urmare

$$\frac{1}{4\pi}\,\Phi\,\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} = -\frac{\Phi}{4\pi r^2}\frac{\partial r}{\partial n} = -\frac{\Phi}{4\pi r^2}\cos\theta.$$

Această formulă dă pe Φ în interior, atunci când pe frontieră sunt date valorile lui $\frac{\partial\Phi}{\partial n}$ și ale lui Φ, pe cari le asimilăm respectiv cu densitățile de debit și de moment e și m. Intradevăr, comparând cu (23), vedem că primul termen al membrului al doilea (27) poate reprezenta funcția de vitesă, provenită din surse simple repartizate cu desimea superficială de debit $e = \frac{\partial\Phi}{\partial n}$; în același sens formulele (25) și (25.1) (unde derivata este luată față de ds', aici dn) arată că ultimul fermen din (27) poate reprezenta funcția de viteză provenind din dubleuri repartizate cu o intensitate superficială de moment $m = \Phi$ și cu axa orientată după normala exterioară.

După cum se va vedea ceva mai jos, aceasta este numai unul din infinit de numeroasele moduri de repartițiuni superficiale de surse simple sau de dubleuri, cari toate dau aceleași valori pentru Φ în interiorul domeniului.

Dacă fluidul incompresibil se întinde la infinit, fiind acolo în repaus, integralele (27) se pot considera, la o alegere potrivită a constantei arbitrare din Φ, ca fiind provenite numai din frontierele interioare. Pentru a arăta aceasta să luăm ca frontieră o sferă infinit de mare în jurul lui P' ca centru; partea corespunzătoare a acestei sfere din prima integrală din (27) dispare, căci $\oint^{\sigma}\frac{\partial\Phi}{\partial n}\,d\sigma = 0$ (incompr.) pe când aceea din ultima integrală (în care vom avea $dn = dr$) este egală cu $-C$, C fiind valoarea constantei, către care Φ tinde la ∞. Pentru ca propoziția enunțată să fie exactă, vom alege constanta arbitrară, care implicit se subînțelege la orice expresie de funcție de vitesă sau potențial, astfel ca C să fie nul.

b) Dacă P' se găsește în afară de frontieră, Φ este finit în întreg domeniul considerat inițial și formula (26) dă, trecând și membrul al 2-lea în primul:

$$-\frac{1}{4\pi}\oint^{\sigma}\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial n}\,d\sigma+\frac{1}{4\pi}\oint^{\sigma}\Phi\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\,d\sigma=0. \tag{28}$$

Și aici, dacă fluidul se întinde la infinit, fiind acolo în repaus, termenii care se referă la frontiera dela infinit pot fi lăsați la o parte.

2) Repartiția surselor, exprimată prin (27) poate fi înlocuită prin o repartiție pe frontieră exclusiv de surse simple sau exclusiv de dubleuri, grație lui (28).

Fie Φ funcțiunea de vitesă a unui fluid într'un anumit domeniu și Φ' funcțiunea de vitesă a unei mișcări aciclice posibile arbitrare, în restul de domeniu nemărginit, cu condiția ca Φ' și Φ să se anuleze la infinit. Dacă P' se găsește în interiorul primului domeniu și deci în afara celui de al doilea, vom avea

$$\Phi_{P'}=-\frac{1}{4\pi}\oint^{\sigma}\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial n}\,d\sigma+\frac{1}{4\pi}\oint^{\sigma}\Phi\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\,d\sigma \tag{27.1}$$

$$0=-\frac{1}{4\pi}\oint^{\sigma}\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi'}{\partial n'}\,d\sigma+\frac{1}{4\pi}\oint^{\sigma}\Phi'\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n'}\,d\sigma, \tag{28.1}$$

unde dn și dn' sunt elementele normalei pe $d\sigma$, îndreptată înspre exteriorul fiecăreia din domeniii, ceeace face ca

$$\frac{\partial}{\partial n'}=-\frac{\partial}{\partial n}.$$

Prin adunare obținem:

$$\Phi_{P'}=-\frac{1}{4\pi}\int^{\sigma}\frac{1}{r}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial n}+\frac{\partial\Phi'}{\partial n'}\right]d\sigma+\frac{1}{4\pi}\int(\Phi-\Phi')\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\,d\sigma. \tag{29}$$

Să presupunem mai întâi că avem pe frontieră

$$\Phi'=\Phi,$$

în care caz componentele tangențiale ale vitesei de ambele părți ale frontierelor sunt continue, pe când componentele normale discontinue.

Ne putem reprezenta lucrurile (conform interpretării expuse în Cap. V), ca și cum domeniul infinit ocupat de fluid ar fi separat în două părți printr'o membrană infinit de subțire, care ar înlocui frontiera și care ar exercita presiunea de impulsie ce ar putea produce mișcarea, pornind din repaus.

In ipoteza admisă $\Phi=\Phi'$, ultimul termen din (29) dispare și avem

$$\Phi_{P'}=-\frac{1}{4\pi}\int^{S}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}+\frac{\partial\Phi'}{\partial n'}\right)ds,$$

ceeace după (23) înseamnă că mișcarea poate proveni din surse simple repartizate pe frontieră cu debitul pe unitate de suprafață

$$\left[\frac{\partial\Phi}{\partial n}+\frac{\partial\Phi}{\partial n'}\right].$$

Să facem o altă ipoteză, anume că pe frontieră avem

$$-\frac{\partial\Phi'}{\partial n'}\equiv\frac{\partial\Phi'}{\partial n}=\frac{\partial\Phi}{\partial n},$$

ceeace ne dă componente normale continue (în acest caz ne putem închipui mișcarea ca fiind produsă prin imprimarea vitesei $\frac{\partial\Phi}{\partial n}$ prescrisă membranei închipuită, ca mai sus, în locul frontierei).

In această ipoteză dispare din (29) primul termen și rămâne:

$$\Phi_{P'}=\frac{1}{4\pi}\oint^{\sigma}(\Phi-\Phi')\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}d\sigma. \qquad (30)$$

Aceasta arată că mișcarea de ambele fețe ale membranei se poate concepe ca fiind datorită unei repartiții superficiale de dubleuri, cu *momentul superficial specific (desime de moment pe unitatea de suprafață)* pe σ

$$m=(\Phi-\Phi').$$

(cu axa pozitivă a dubleului înspre exteriorul fontierei domeniului ce conține pe P').

Se poate demonstra că această reprezentare a mișcărei, fie exclusiv prin surse simple, fie exclusiv prin surse duble, este univocă, pe când aceea dată cu ocazia interpretării formulei (27) intră în formula mai generală (29), care este nedeterminată.

Aplicația Nr. 34. *Mișcări potențiale ciclice.* A se trata aceeași chestiune ca în aplicația Nr. 33 în cazul mișcărilor *ciclice*.

Răspuns. Se poate vedea ușor, că o mișcare nerotațională ciclică a unui fluid incompresibil poate fi produsă de o repartițiune superficială de *dubleuri* pe frontieră, împreună cu o repartițiune superficială *uniformă* de *dubleuri* pe fiecare din tăeturile, ce transformă spațiul ocupat de fluid într'un spațiu simplu conex. Intradevăr, în acest caz formula (26) trebue să primească și termenii referitori la ambele fețe ale tăeturilor introduse, care completează acum frontiera.

In acest caz, pe calea pe care am găsit (30), vom găsi în locul acelei formule pe următoarea:

$$\Phi_{P'}=\frac{1}{4\pi}\oint^{\sigma}(\Phi-\Phi')\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}d\sigma+\frac{\Gamma_1}{4\pi}\int^{\sigma_1}\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}d\sigma+\frac{\Gamma_2}{4\pi}\int^{\sigma_2}\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}d\sigma+\ldots$$

Și aici Φ este funcțiunea de vitesă univocă, obținută în domeniul modificat prin tăeturi, iar Φ' este funcțiunea de vitesă a mișcări aciclice, produsă în spațiul exterior, dacă s'ar imprima fiecărui element $d\sigma$ al membranei închipuite (care ar

înlocui frontiera iniţială) componenta normală a vitezei $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ prescrisă (vezi cap. V).

In termenii relativi la suprafeţele tăeturilor, expresiile $\Phi - \Phi'$ sunt înlocuite prin Γ_1, Γ_2, etc.

Se vede că, pentru a atribui o mişcare nerotaţională ciclică unei repartiţiuni superficiale, metoda nu reuşeşte cu surse exclusiv simple, fiindcă la suprafeţele tăeturilor avem întodeauna aceleaşi vitese $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ şi potenţiale diferite, iar nu contrariul (vezi Cap. V).

Există şi o altă metodă de a reprezenta mişcări potenţiale ciclice sau aciclice, dar care aparţine capitolului mişcărilor rotaţionale.

N/B. In ceeace precede s'a lăsat deoparte chestiunea pur teoretică a demonstraţiei *existenţei* unei funcţiuni, care satisface condiţiile ce i se impun, în interiorul unui domeniu simplu conex sau la frontieră.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITARA

CAP. IV.

METODE PENTRU GĂSIREA DE SOLUȚIUNI ALE ECUAȚIEI LUI LAPLACE, ADICĂ DE MIȘCĂRI POTENȚIALE DE FLUIDE INCOMPRESIBILE ÎN TREI DIMENSIUNI.

1. Complement asupra transformării coordonatelor cartesiene în sisteme curbilinii.

a) **Coordonate curbilinii ortogonale.** Teoria surselor, în care intervine funcțiunea $\frac{1}{r}$, procură un instrument prețios în studiul multor probleme de Hidrodinamică. Aceste probleme se pot trata deseori mai ușor în *coordonate polare* (*sferice*) tocmai fiindcă printre acestea figurează și distanța r la punctul unei surse punctiforme sau elementare, alese ca origine. Deasemenea și coordonatele *cilindrice*, printre care figurează și distanța ρ, depărtarea dela o axă, luată de ex. ca axă z, aduc simplificări în anumite probleme, în cari intervine această depărtare, cum sunt bunăoară mișcările simetrice în raport cu acea axă.

In special condițiile la frontieră, pe cari trebue să le satisfacă ecuațiile cu derivate parțiale, se exprimă mai simplu într'un sistem de coordonate, ales potrivit problemei tratate.

Cunoscând, așa dar, printre altele, expresiile operațiunilor vectoriale în coordonate cartesiene, este util pentru aplicații să avem acele expresii transformate și în alte feluri de coordonate, de ex. *sferice* (*polare*) sau *cilindrice*. Ambele aceste sisteme intră în categoria *coordonatelor curbilinii ortogonale*, definite de trei familii de suprafețe ce se tae ortogonal, după cum se tae și cele trei familii de planuri paralele, cari definesc coordonatele cartesiene.

Fie u, v, w, coordonatele curbilinii, legate cu coordonatele cartesiene (componente în același timp ale razei vectoare $\bar{r}$ după direcțiile axelor x, y, z) prin relațiile:

$$x=x(u,v,w), \qquad y=y(u,v,w), \qquad z=z(u,v,w).$$

Cosinusurile directoare ale normalei $\bar{n}_u$ pe o suprafață

$$u(x,y,z)=const,$$

într'un punct oarecare (x,y,z), punând

$$h_1=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2},$$

sunt:

$$n_{ux}=\frac{1}{h_1}\frac{\partial u}{\partial x} \qquad n_{uy}=\frac{1}{h_1}\frac{\partial u}{\partial y} \qquad n_{uz}=\frac{1}{h_1}\frac{\partial u}{\partial z} \tag{1}$$

și analog, acelea ale normalelor $\bar{n}_v$ și $\bar{n}_w$ pe o suprafață $v(x,y,z)=const$, respectiv $w(x,y,z)=const$:

$$\frac{1}{h_2}\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{1}{h_2}\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{1}{h_2}\frac{\partial v}{\partial z}$$

și

$$\frac{1}{h_3}\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{1}{h_3}\frac{\partial w}{\partial y}, \quad \frac{1}{h_3}\frac{\partial w}{\partial z}.$$

Or, dacă pe două suprafețe $u=const$ infinit de apropiate, diferind deci între ele cu du, luăm câte un punct la distanța $d\bar{r}$ $[dx, dz, dy]$ unul de altul, vom avea după (1):

$$du\equiv\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz=h_1\bar{n}_u d\bar{r},$$

expresie proporțională cu distanța $\bar{n}_u d\bar{r}$, după normală, dintre cele două suprafețe, pe care o vom numi ds_u, punând

$$ds_u=\bar{n}_u d\bar{r}.$$

Această distanță va fi, așa dar, respectiv:

$$ds_u=\frac{du}{h_1}=e_1 du$$

$$ds_v=\frac{dv}{h_2}=e_2 dv \tag{2}$$

$$ds_w=\frac{dw}{h_3} \quad e_3 dw,$$

unde

$$e_1=\frac{1}{h_1},\quad e_2=\frac{1}{h_2},\quad e_3=\frac{1}{h_3} \tag{2.1}$$

sunt funcțiuni de x, y, z, sau de u, v, w.

O expresie echivalentă a cosinusurilor directoare ale celor 3 normale este

$$n_{ux}=\frac{1}{e_1}\frac{\partial x}{\partial u},\quad n_{uy}=\frac{1}{e_1}\frac{\partial y}{\partial u},\quad n_{uz}=\frac{1}{e_1}\frac{\partial z}{\partial u}\ \text{etc.} \tag{3}$$

căci derivata parțială de ex. $\frac{\partial x}{\partial u}$, presupune că rămânem pe aceleași suprafețe $v=const$ și $w=const$, adică ne deplasăm pe direcția intersecției ds_u cu cantitatea

$$e_1=\sqrt{\left(\frac{dx}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2}.$$

și cum această lungime e_1 o avem pe normala ds_u pentru $du=1$, pentru du vom avea $ds_u=e_1\,du$, astfel că prin comparație cu (2) rezultă că e din (3) este același cu $e_1=\frac{1}{h_1}$ din (2.1), ceeace justifică întrebuințarea notației (3).

Din (1) și (3) obținem

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{1}{h_1^2}\frac{\partial u}{\partial x}=e_1^2\frac{\partial u}{\partial x}\ \text{etc.}$$

Suprafețele menționate fiind prin ipoteză ortogonale, vectorii $\overline{ds_u}$, $\overline{ds_v}$, $\overline{ds_w}$, respectiv normali pe ele, vor forma un triedru tridreptunghic, pe care îl vom presupune orientat în același fel ca și triedrul $Oxyz$ (deobiceiu sistemul *drept*) și care poate servi ca reper mobil, adică că triedru de referință, având în fiecare moment ca vârf punctul curent (x, y, z) sau (u, v, w).

Ridicând (2) la pătrat și adunând, vom avea pentru *lungimea* elementului liniar

$$\overline{ds}=\overline{dr}\,[ds_u,\ ds_v,\ ds_w],$$

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2=ds^2_u+ds^2_v+ds^2_w=e_1^2\,du^2+e_2^2\,dv^2+e_3^2\,dw^2. \tag{3.1}$$

Un paralelipiped cu fețe curbe, format de suprafețele $u=const$, $u+du=constant$, $v=const$, $v+dv=const$, $w=const$, $w+dw=const$ prezintă următoarele *arii* la fețele triedrului cu vârful în (u, v, w):

$$d\sigma_u = e_2 e_3 \, dv \, dw \quad \text{pe suprafaţa} \quad u = const$$
$$d\sigma_v = e_3 e_1 \, dw \, du \quad \text{„ „} \quad v = const \qquad (3.2)$$
$$d\sigma_w = e_1 e_2 \, du \, dv \quad \text{„ „} \quad w = const.$$

In fine, volumul paralelipipedului în chestiune este

$$d\tau = e_1 e_2 e_3 \, du \, dv \, dw. \qquad (3.3)$$

b) **Coordonate sferice sau polare.** Dacă axa Oz este asimilată cu axa polilor, iar planul xy cu planul ecuatorial, vom avea drept coordonate curbilinii: valoarea absolută r a razei vectoare $\bar{r}$, unghiul θ al acesteia cu axa polară şi unghiul azimutal φ (pe ecuator) cu axa Ox. Aceste coordonate curbilinii se numesc *sferice* sau *polare*.

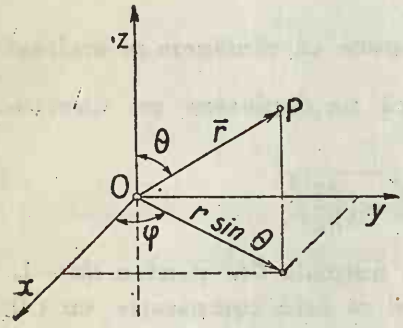


Fig. 32

Aşa dar, cu

$$u = r$$
$$v = \theta$$
$$w = \varphi.$$

avem între coordonatele cartesiene şi cele polare următoarele relaţii:

$$x = r \sin\theta \cos\varphi$$
$$y = r \sin\theta \sin\varphi \qquad (4)$$
$$z = r \cos\theta,$$

$r = const$ reprezentând sfere cu origina ca centru,
$\theta = const$ „ conuri cu axa Oz,
$\varphi = const$ „ planuri trecând prin Oz.

Uitându-ne pe figură, apar imediat pentru o pereche din aceste suprafeţe, infinit apropiate, ale aceleaşi familii, relaţiile

$$ds_r = dr \quad \text{şi deci} \quad e_1 = 1$$
$$ds_\theta = r d\theta \quad \text{„ „} \quad e_2 = r \qquad (5)$$
$$ds_\varphi = r \sin\theta \, d\varphi \quad \text{„ „} \quad e_3 = r \sin\theta,$$

de unde tragem elementul de linie (la pătrat):

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\varphi^2, \qquad (5.1)$$

elementele de suprafaţă:

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$d\sigma_r = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$
$$d\sigma_\theta = r \sin\theta \, d\varphi \, dr \qquad (5.2)$$
$$d\sigma_\varphi = r \, dr \, d\theta$$

și elementul de volum:

$$d\tau = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi. \qquad (5.3)$$

c) **Coordonate cilindrice.** Aceste coordonate curbilinii fiind, conform figurei 33:

$$u = \rho$$
$$v = \varphi \qquad (6)$$
$$w = z,$$

avem:

$$x = \rho \cos\varphi$$
$$y = \rho \sin\varphi$$
$$z = z,$$

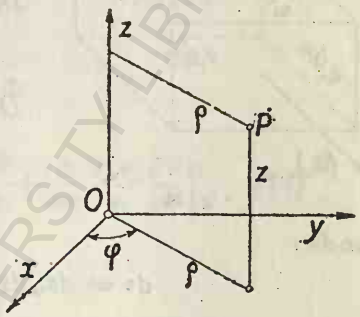


Fig. 33

$\rho = const$ reprezentând cilindri cu axa Oz,
$\varphi = const$ „ planuri prin axa Oz,
$z = const$ „ planuri perpendiculare pe axa Oz.

Privind pe figură, deducem imediat:

$$\left.\begin{aligned} ds_r &= d\rho & e_1 &= 1 \\ ds_\varphi &= \rho d\varphi \quad \text{și deci} & e_2 &= \rho \\ ds_z &= dz & e_3 &= 1 \end{aligned}\right\}, \qquad (7)$$

de unde:

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2 \qquad (7.1)$$

$$\left.\begin{aligned} d\sigma_\rho &= \rho \, d\varphi \, dz \\ d\sigma_\varphi &= dz \, d\rho \\ d\sigma_z &= \rho \, d\rho \, d\varphi \end{aligned}\right\} \qquad (7.2)$$

$$d\tau = \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz. \qquad (7.3)$$

Coordonatele cilindrice se întrebuințează cu avantaj la curenții simetrici în jurul axei Oz, limitați prin o suprafață de rotație în jurul acesteia și care se întind la ∞ în ambele sensuri ale numitei axe.

BCU IAȘI / CENTRUL UNIVERSITY LIBRARY

Cum în fiecare plan $\varphi = const$ mişcarea se prezintă la fel, derivatele parţiale în raport cu φ ale funcţiunilor: vitesă, presiune, densitate sunt nule.

d) **Operaţiuni de calcul şi de analiză vectorială în coordonate curbilinii.**

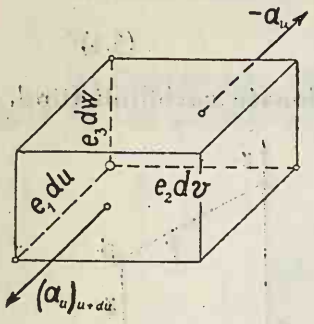


Fig. 34

Produs scalar:

$$\bar{a}\,\bar{b} = a_u b_u + a_v b_v + a_w b_w \qquad (8)$$

Produs vectorial:

$$[\bar{\imath}\,\bar{b}]_u = a_v b_w - a_w b_v \text{ etc.} \qquad (8.1)$$

Divergenţă:

$$div\,\bar{a} = \frac{\Sigma \bar{a}\, d\bar{\sigma}}{d\tau},$$

unde:

$$d\tau = ds_u\, ds_v\, ds_w = e_1 e_2 e_3\, du\, dv\, dw$$

$$\Sigma \bar{a}\, d\bar{\sigma} = (a_u e_2 e_3 dv dw)_{u+du} - (a_u e_2 e_3 dv\, dw)_u + \ldots$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial u} e_2 e_3 a_u + \frac{\partial}{\partial v} e_3 e_1 a_v + \frac{\partial}{\partial w} e_1 e_2 a_w\right) du\, dv\, dw$$

şi deci:

$$div\,\bar{a} = \frac{1}{e_1 e_2 e_3}\left\{\frac{\partial}{\partial u} e_2 e_3 a_u + \frac{\partial}{\partial v} e_3 e_1 a_v + \frac{\partial}{\partial w} e_1 e_2 a_w\right\}. \qquad (9)$$

In cazul coordonatelor *sferice*, înlocuind valorile respective găsim:

$$div\,\bar{a} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial (\sin\theta\, a_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}. \qquad (9.1)$$

Dacă $\bar{a} = \bar{v}$ este vitesa unei mişcări potenţiale cu funcţiunea de vitesă Φ, vom avea următoarele componente:

$$v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \qquad v_\theta = \frac{\partial \Phi}{r \partial \theta}, \qquad v_\varphi = \frac{\partial \Phi}{r \sin\theta\, \partial \varphi}. \qquad (9.1.1)$$

In cazul coordonatelor *cilindrice*:

$$div\,\bar{a} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial (\rho a_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z}, \qquad (9.2)$$

iar componentele de vitesă respective:

$$v_\rho = \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}, \qquad v_\varphi = \frac{\partial \Phi}{\rho \partial \varphi}, \qquad v_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \quad (9.2.1)$$

Gradient. Cum

$$grad_s \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial s},$$

vom avea:

$$grad_u \Phi = \frac{d\Phi}{e_1 du}, \quad grad_v \Phi = \frac{\partial \Phi}{e_2 dv}, \quad grad_w \Phi = \frac{\partial \Phi}{e_3 dw}, \quad (10)$$

Laplacian:

$$\Delta \Phi = div\ grad\ \Phi$$

şi deci:

$$\Delta \Phi = \frac{1}{e_1 e_2 e_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \frac{e_2 e_3}{e_1} \frac{\partial \Phi}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{e_3 e_1}{e_2} \frac{\partial \Phi}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial w} \frac{e_1 e_2}{e_3} \frac{\partial \Phi}{\partial w} \right\}. \quad (11)$$

În coordonate *sferice* vom avea:

$$\Delta \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right)}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}, \quad (11.1)$$

ceea ce rezultă şi din (9.1.1), şi unde primul termen din membrul al doilea se mai poate scrie:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r\Phi)}{\partial r^2}.$$

În coordonate *cilindrice* vom avea:

$$\Delta \Phi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}. \quad (11.2)$$

ceea ce rezultă şi din (9.2) cu (9.2.1).

Rotaţional. Proiecţia rotaţionalului unui vector pe o direcţie $\bar{n}$ este egală cu fluxul său prin elementul de suprafaţă $d\sigma_n$, sau circulaţia pe conturul lui $d\sigma_n$, împărţită prin $d\sigma_n$, conform teoremei lui *Stokes*:

$$rot_u \bar{a} = \frac{\Sigma (\bar{a} d\bar{s})}{d\sigma_n}.$$

Vom avea pe faţeta perpendiculară pe a_u

$$\Sigma \bar{a} d\bar{s} = (e_2 a_v)_w dv + (e_3 a_w)_{v+dv} dw - (e_2 a_v)_{w+dw} dv - (e_3 a_w)_v dw$$

şi cum

$$d\sigma_u = e_2 e_3 dv\, dw,$$

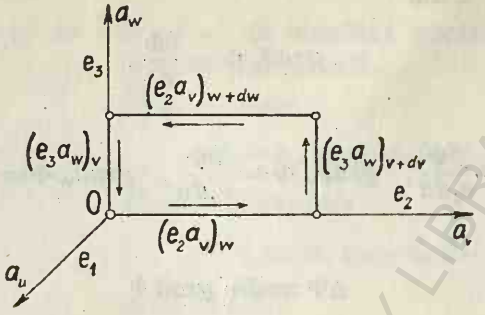


Fig. 35

rezultă:

$$rot_u \bar{a} = \frac{1}{e_2 e_3}\left[\frac{\partial(e_3 a_w)}{\partial v} - \frac{\partial(e_2 a_v)}{\partial w}\right] \tag{12}$$

$$rot_v \bar{a} = \frac{1}{e_3 e_1}\left[\frac{\partial(e_1 a_u)}{\partial w} - \frac{\partial(e_3 a_w)}{\partial u}\right] \tag{13}$$

$$rot_w \bar{a} = \frac{1}{e_1 e_2}\left[\frac{\partial(e_3 a_v)}{\partial u} - \frac{\partial(e_1 a_u)}{\partial v}\right] \tag{14}$$

Aplicaţia Nr. 35. *A se găsi soluţia ecuaţiei lui Laplace* $\Delta\Phi = 0$ *în cazul simetriei în jurul originei: sursă punctiformă izolată.*

Răspuns. In cazul simetriei în jurul originei, în care caz coordonatele polare sau sferice sunt indicate, funcţiunea Φ, dacă există, nu poate depinde decât de distanţa r a punctului curent la origină.

In cazul acesta ecuaţia lui *Laplace* se reduce la:

$$r^2 \Delta\Phi = \frac{\partial\left(r^2 \frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)}{\partial r} = 0,$$

de unde soluţia:

$$\Phi = \frac{b}{r} + a,$$

cu două constante de integrare, din care a se poate lăsa la oparte, deoarce Φ intervine numai prin derivatele sale în raport cu coordonatele. In cazul simetriei presupuse, curentul nu poate fi, aşa dar, decât acela al unei surse punctiforme, aşezată în origină.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Debitul acestei surse este

$$Q = -4\pi b,$$

iar dacă $Q = -4\pi$, atunci $b = 1$ și vom avea forma cea mai simplă:

$$\Phi = \frac{1}{r}$$

a potențialului newtonian (pentru debitul $Q = -4\pi$ sau pentru sarcina electrică $= 1$, plasată în origină).

Aplicația Nr. 36. *A se găsi soluția în cazul când, în domeniul nerotațional sau potențial al unei funcții de vitesă $\Phi = U$, există și spații lacunare, ce nu satisfac ecuația lui Laplace: Repartiție volumică de surse* (compară Aplicația Nr. 26).

Răspuns. Să aplicăm formula (I) a lui *Green* la două câmpuri scalare U și V, din care V este o funcție potențială *armanică* ($\Delta V = 0$) iar U funcția de vitesă (deci deasemenea potențială), care într'un spațiu limitat, cuprins în volumul τ mărginit de suprafața σ, nu este armonică, ci ascultă de ecuația lui *Poisson*

$$\Delta U = q(x, y, z).$$

Vom avea:

$$\oint^{\sigma} \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) d\sigma = - \int^{\tau} V' \Delta U d\tau,$$

cu condiția ca în τ funcțiunile să fie finite și continue, deasemenea și primele lor derivate.

In cazul când luăm $V = \frac{1}{r}$ (potențialul newtonian), unde r este socotit față de un punct fix P, cum pentru $r = 0$ funcția V devine ∞, în aplicarea formulei de mai sus trebue să excludem punctul singular P, înconjurându-l cu o sferă mică de rază a, a cărei integrală de suprafață trebue adăogată în primul membru.

Numind Σ și $\mathfrak{T}$ suprafața și volumul acelei sfere mici și ținând seama că la suprafața sferei avem $dn = -dr$ (căci normala exterioară volumului $\tau - \mathfrak{T}$ este în sensul micșorării lui $r = a$), vom putea scrie formula de mai sus pentru volumul conex $(\tau - \mathfrak{T})$ limitat de suprafețele σ și Σ:

$$\oint^{\sigma} \left(U \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} \right) d\sigma - \oint^{\Sigma} \left(U \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial r} - \frac{1}{a} \frac{\partial U}{\partial r} \right) a^2 d\omega = - \int^{\tau - \mathfrak{T}} \frac{\Delta U}{r} d\tau,$$

unde $d\omega$ este unghiul solid sub care se vede din P elementul $d\Sigma$ al sferei.

Efectuând calculele obținem:

$$\oint^{\sigma} \left(U \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} \right) d\sigma + \oint^{\Sigma} U d\omega + a \oint^{\Sigma} \frac{\partial U}{\partial r} d\omega = - \int^{\tau - \mathfrak{T}} \frac{\Delta U}{r} d\tau.$$

Sfera tinzând către 0 vom avea, cu $a=0$ și $\tau=0$:

$$\oint^{\sigma}\left(U\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}-\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n}\right)d\sigma=-\int^{\tau}\frac{\Delta U}{r}d\tau-4\pi U_p.$$

Dacă acum presupunem că suprafața σ este și ea o sferă, care se întinde la ∞ în jurul punctului P, iar spre ∞ Φ scade ca $\frac{1}{r}$, integrala primă, ale cărei elemente sunt în acest caz echivalente (din punct de vedere infinitesimal) cu

$$\frac{1}{r^3}d\sigma=\frac{1}{r}d\omega,$$

dispare la ∞ din cauza factorului comun $\frac{1}{r}$ de pe lângă cantitatea finită 4π. Rezultă valoarea funcțiunei U_P în punctul P, față de care se socotește r și care, poate fi ori unde în spațiul finit:

$$U_p=-\int^{\tau}\frac{\Delta U}{4\pi r}d\tau. \qquad (14)$$

Cum prin ipoteză, într'un spațiu limitat, cuprins în τ, avem $\Delta U=q(x,y,z)$, în restul volummului τ până la ∞ având $\Delta U=0$, putem scrie:

$$U_p=-\int^{\tau\to\infty}\frac{q}{4\pi r}d\tau, \qquad (15)$$

ceeace arată că funcțiunea de vitesă $\Phi=U$ reprezintă tocmai curentul produs de o repartiție de surse volumică cu debitul specific $q(x,y,z)$ în fiecare punct (vezi (21) pag. 143). Acest câmp constitue, așa dar, o soluție pentru o funcție (sau potențial) de vitesă Φ, care într'un anumit spațiu de fluid incompresibil satisface ecuația lui *Poisson* $\Delta\Phi=q(x,y,z)$, în restul spațiului până la ∞ satisfăcând pe aceea a lui *Laplace* $\Delta\Phi=0$, adică fiind armonică.

Rezultă că la un curent de fluid incompresibil, nerotațional sau potențial, adică care comportă un potențial sau o funcție de vitesă Φ, această funcțiune ru satisface totdeauna în întreg spațiul ecuația lui *Laplace*. Cazul de excepție se prezintă atunci când există *surse*, în spațiul ocupat de acestea funcțiunea Φ satisfăcând ecuația lui *Poisson*, și numai în restul spațiului fiind armonică.

Trebuie, deci, să ne ferim de eroarea ca, atunci când există surse să considerăm drept sinonime denumirile de *funcțiune potențială* (noțiune mai generală relativă la semnificarea derivatelor parțiale în raport cu coordonatele) și *funcțiune armonică* (noțiune mai restrânsă, care implică satisfacerea ecuației lui *Laplace*).

Bineînțeles, în cazul când fluidul incompresibil nu are surse sau, mai bine zis, în spațiul unde acestea lipsesc, cele două noțiuni se suprapun exact.

N. B. Un paradox matematic ar putea părea faptul că, în cazul unei surse de un debit total Q, volumic repartizat într'un spațiu sferic τ, deci cu un debit

specific $q = \frac{Q}{\tau_1}$, divergența vitesei din centrul sferei, care este $\Delta\Phi = q$, dacă presupunem că sfera se condensează din ce în ce mai mult spre centru ($r \to 0$), crește la ∞. Ori, la limită pare a se obține o *sursă punctiformă* cu $\Phi = -\frac{Q}{4\pi r}$, pentru care avem $\Delta\Phi = 0$ ori care ar fi valoarea lui r în tot spațiul înconjurător, *inclusiv* punctul $r=0$. după cum se constată scriind expresia analitică a lui $\Delta\frac{1}{r}$. Explicația ce se poate da contrazicerei aparente este următoarea: centrul în chestiune. în cazul sursei punctiforme este un punct singular nu numai pentru viteză, care devine aici infinită, dar și pentru $div\, \bar{v} = \Delta\Phi$, căci a lua derivatele (de ordinul al doilea) unor cantități infinite (componentele vitesei sunt exprimate prin derivate de ordinul întâi), în care caz găsim $\Delta\frac{1}{r} = \infty - \infty$, nu are sens. Se poate spune că în ansamblul valorilor $div\, \bar{v} = \Delta\Phi = q$ din domeniul unui punct, privit în timpul când $r \to 0$, nu intră și valoarea corespunzătoare limitei $r=0$, acest punct fiind un punct singular *izolat*. Este un caz interesant de discontinuitate între $div\, \bar{v}$ pentru $r \to 0$ și $div\, \bar{v}$ pentru $r=0$, și nu trebue uitat că, în aplicarea teoremei lui *Gauss* și deci a lui *Green*, s'a presupus că Φ și primele lui derivate sunt continue și finite.

Aplicația Nr. 37 *A se găsi soluția în cazul când există suprafețe de discontinuitate pentru*

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n}.$$

Răspuns: În formula lui *Green* se presupune că Φ și primele sale derivate sunt continue. Dacă, Φ fiind continuu, există o suprafață de discontinuitate Σ pentru $\frac{\partial\Phi}{\partial n}$, limitată sau întinsă la ∞, aceasta va trebui exclusă în aplicarea formulei, volumul τ limitându-se până la o frontieră, care include pe Σ, și devenind astfel perifractic, adică cu conexiune superficială dublă. Această frontieră se poate apropia până la coincidență cu ambele fețe ale lui Σ, astfel că la fiecare $d\Sigma$ corespunde o pereche de elemente de suprafață ale frontierei, pe ambele fețe ale lui Σ, egale cu $d\Sigma$, și pe care le vom însemna cu $+$ și $-$.

Normalele $\bar{n}$ *exterioare* vo'umului conex τ, corespunzătoare unei asemenea perechi de elemente, sunt evident de sens contrar (fig. 36), astfel că integrala relativă la frontieră, în care am putea socoti pe $d\Sigma$ o singură dată, înmulțit în schimb cu suma a doi factori,

$$-\int^{\Sigma} \Phi\left(\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n-} + \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n+}\right) d\Sigma$$

la limită, adică atunci când ambele jumătăți ale frontierei vin în coincidența cu Σ, este nulă, din cauză că suma acelor factori este nulă.

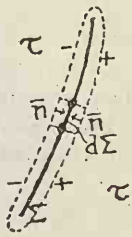


Fig. 36

In schimb, integrala depe aceeași frontieră:

$$\int^{\Sigma} \frac{1}{r}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n_+} + \frac{\partial \Phi}{\partial n_-}\right) \partial \Sigma,$$

din cauza saltului pe care l'am presupus lui $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ când pe frontieră se tinde de pe o față a lui Σ la cealaltă, nu este nul, cei doi termeni din paranteză neavând aceași valoare absolută. Dacă pe suprafața de discontinuitate Σ avem o funcție spațială $e(x, y, z)$, definită prin relația

$$-\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n_+} + \frac{\partial \Phi}{\partial n_-}\right) = e(x, y, z),$$

vom scrie în cele din urmă soluția pentru Φ de adinioară (introducând și noua integrală):

$$\Phi_P = -\frac{1}{4\pi}\int^{\tau \to \infty} \frac{q}{r}\, d\tau - \frac{1}{4\pi}\int^{\Sigma} \frac{e}{r}\, d\Sigma,$$

e putând representa densitatea superficială a unei *repartiții de surse simple* pe suprafața Σ.

Regăsim astfel formula funcțiunii de vitesa a unei mișcări potențiale aciclice, produsă de o repartiție de surse simple, în legătură acum și cu o repartiție volumică, datorită ipotezelor făcute.

Problema este analoagă cu aplicația 33, unde Σ era o suprafață închisă (frontieră) iar de o parte (interior) și de alta a ei (exterior) am presupus că existau două funcțiuni potențiale, care la frontieră aveau valori comune, însă derivate diferite în direcția normalei, adică exact ca și aci, căci saltul derivatei prin o suprafață închisă se poate interpreta ca o schimbare a funcțiunii, deși pe însăși suprafața valorile Φ sunt comune. Lipsa de surse *volumic repartizate* în acea problemă era în acord cu faptul, că cele două funcțiuni din interior și exterior erau presupuse ambele *armonice*.

Aplicația Nr. 38. *A se găsi soluția în cazul când există suprafețe de discontinuitate pentru Φ.*

Răspuns. Dacă din contra avem o suprafață Σ de discontinuitate, nu pentru derivată, ci pentru însăși funcția Φ, atunci valorile celor două integrale noi de suprafață, introduse prin perifragma de excludere a lui Σ, se schimbă, și anume, de data aceasta, singură integrala

$$-\int^{\Sigma} (\Phi_+ - \Phi_-) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, d\Sigma$$

aduce o contribuție, nefiind nulă din cauza saltului lui Φ (am presupus $\Phi_+ \neq \Phi_-$), pe când cealaltă integrală este evident nulă.

Punând $\Phi_- - \Phi_+ = m(x, y, z)$, vom putea scrie soluția căutată

$$\Phi_P = -\frac{1}{4\pi}\int^{\tau \to \infty} \frac{q}{r}\, d\tau + \frac{1}{4\pi}\int^{\Sigma} m \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, d\Sigma,$$

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

unde m poate reprezinta densitatea de moment a unei *repartițiuni superficiale de dubleuri*. Dacă Σ este o suprafață închisă, regăsim cazul din aplicația 33, în care însă o repartiție volumică complementară q de surse simple lipsea, în acord cu faptul, dela început presupus, că funcția Φ era acolo *armonică*, atât în interiorul lui Σ cât și în exterior.

Aplicația Nr. 39. *A se găsi o soluție particulară a ecuației din teoria undelor*

$$\Delta U + k^2 U = 0,$$

care să depindă numai de r, adică să fie independentă de θ *și* φ.

Răspuns. Soluția se obține repede prin înlocuirea provizorie $rU = W$. Intradevăr vom avea în coordonate polare

$$\frac{1}{r}\frac{d^2(rU)}{dr^2} + k^2 U = 0$$

sau, după menționata înlocuire:

$$\frac{d^2 W}{dr^2} + k^2 W = 0,$$

rezultând pentru U soluția particulară

$$U = \frac{W}{r} = \frac{e^{\pm ikr}}{r}.$$

Introducând această valoare în formula I a lui *Green*, care conține pe lângă U o funcțiune arbitrară V, obținem

$$\oint^{\sigma} \left(\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial U}{\partial n}\right) d\sigma = \int^{\tau} U\Delta V - V\Delta U,$$

iar ținând seama că $\Delta U = -k^2 U$ și excludând punctul singular P cu $r = 0$ prin o perifragmă sferică Σ de rază a:

$$\oint^{\sigma} \left(\frac{e^{\pm ikr}}{r}\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial \frac{e^{\pm ikr}}{r}}{\partial n}\right) d\sigma - \oint^{\Sigma} \left(\frac{e^{\pm ikr}}{r}\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial \frac{e^{\pm ikr}}{r}}{\partial r}\right) a^2 d\omega$$

$$= \int^{\tau} \frac{e^{\pm ikr}}{r} (\Delta V + k^2 V) d\tau.$$

Presupunând că V scade spre ∞ ca $\frac{1}{r^2}$ și făcând să tindă pe de o parte a către 0, iar pe de alta parte σ către ∞, prima integrală de suprafață (cu observația că $e^{\pm ikr} = \cos \pm i \sin kr$ este finit) se anulează, iar sub semnul integralei a doua, relativă la Σ, rămâne numai termenul al doilea $\lim_{r \to a} - \frac{V(\pm ikr - 1)\, e^{\pm ikr}}{r^2} a^2 d\omega = V d\omega$, care prin integrare dă $-4\pi V_p$. Ajungem astfel la relația

$$-4\pi V_p = \int^{\tau} \frac{e^{\pm irk}}{r} (\Delta V + k^2 V)\, d\tau.$$

Dacă avem acum o ecuaţie de forma

$$\Delta V + k^2 V = q,$$

unde q este o funcţie de x,y,z, avem o soluţie a acestei ecuaţiuni în expresia

$$V_p = -\frac{1}{4\pi} \int^{\tau} \frac{e^{\pm ikr}}{r} q\, d\tau.$$

2. Metodă prin funcţiuni sferice.

Există diferite metode pentru găsirea de soluţiuni ale ecuaţiei lui *Laplace*

$$\Delta\Phi \equiv \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0\,, \qquad (15)$$

adică de funcţiuni armonice în trei dimensiuni. Cea mai importantă din aceste metode este acea a *funcţiunilor sferice*, mai ales în problemele în care condiţiunile la frontieră sunt date pe suprafeţe sferice sau aproape sferice.

Pentru determinarea unei funcţiuni armonice Φ într'un anumit spaţiu, în care derivatele de gradul I-iu şi al 2-lea trebuie să fie continue, pe lângă ecuaţia lui *Laplace*, ce prin definiţie trebuie satisfăcută, se mai cere satisfacerea anumitor *condiţiuni la limită* pe frontiera spaţiului. Cele mai importante din aceste condiţiunei sunt următoarele:

1. Prescrierea valorilor lui Φ în fiecare punct al frontierei (problema lui *Dirichlet*, importantă în studiul sarcinilor electrice în repaus, precum şi în acela al curenţilor potenţiali de fluide).

2. Prescrierea valorilor $\frac{\partial\Phi}{\partial n}$ (n normală exterioară) în fiecare punct al frontierei (problema lui *Neumann*, importantă în Hidrodinamică).

3. Prescrierea valorilor $k\Phi + h\frac{\partial\Phi}{\partial n}$ în fiecare punct al frontierei, unde k şi h sunt anumite numere date în fiecare din aceste puncte (problemă generală, care cuprinde şi pe celelalte două, drept cazuri particulare, şi care este esenţială în transmisiunea căldurii).

3. Complement asupra funcţiunilor sferice.

a) **Definiţii şi proprietăţi generale.** Vom studia aceste funcţiuni şi din punct de vedere general, pentru a face să reiasă mai bine utilitatea lor în problemele Hidrodinamicei.

Din cauza omogeneităţii operatorului Δ în raport cu x, y, z, orice parte a funcţiunei armonice Φ, care este de un anumit grad algebric ν în y, x, z, trebuie să satisfacă separat ecuaţia lui *Laplace*, adică să fie şi ea armonică, constituind deci o *soluţie omogenă* a ecuaţiei lui *Laplace*.

O asemenea soluţie omogenă se numeşte *funcţiune sferică de spaţiu* sau simplu *armonică sferică* de gradul ν, număr ce nu trebuie neapărat să fie întreg. O funcţiune omogenă de x, y, z este de forma

$$\Phi_\nu = \sum_{\alpha+\beta+\gamma=\nu} a_{\alpha\beta\gamma} x^\alpha y^\beta z^\gamma$$

şi satisface evident egalitatea lui *Euler* pentru funcţiunile omogene:

$$\frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x} x + \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial y} y + \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial z} z = \nu \Phi_\nu, \tag{16}$$

egalitate care, dacă luăm axa x în direcţia r, devine:

$$r \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial r} = \nu \Phi_\nu. \tag{16.1}$$

O armonică sferică (funcţie sferică de spaţiu), polinom sau desvoltabilă în serie, se poate totdeauna pune sub forma

$$\Phi_\nu = r^\nu S_\nu, \tag{17}$$

pentru aceasta fiind deajuns, ca în acest polinom sau serie să se exprime x, y, z în coordonate polare.

In această formă (17) S_ν este funcţie numai de *direcţia* în care este aşezat punctul (x, y, z), cu alte cuvinte funcţie numai de punctul

$$\frac{\overline{r}}{r}\left[\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right],$$

în care raza vectoare $\overline{r}$ înţeapă sfera de rază 1. De aceea S_ν *se numeşte funcţie sferică de suprafaţă* sau *funcţia lui Laplace de*

ordinul ν, constituind multiplicatorul puterei corespunzătoare a lui r din expresia unei funcțiuni sferice de spațiu.

Cazul cel mai important este acela când ν este un număr întreg n și în același timp funcția S_n rămâne finită pe întreaga sferă unitară (de rază $= 1$).

b) **Funcția** $\frac{1}{r}$. Cea mai simplă funcțiune sferică cu n întreg este aceea de gradul -1, pe care o vom putea scrie:

$$\Phi_{-1} = \frac{b}{r}$$

și care reprezintă, precum știm, funcția de vitesă a unei surse punctiforme, așezată la origină și având ca debit $Q = -4\pi b$, astfel că b poate reprezenta debitul pe o scară oarecare $\left(-\frac{1}{4\pi}\right)$.

Cum derivatele parțiale ale oricărei funcțiuni armonice Φ în raport cu x, y, z satisfac ecuația lui *Laplace* (deoarece avem $\Delta \frac{\partial \Phi}{\partial x} \equiv \frac{\partial}{\partial x} \Delta\Phi = 0$ etc.), le putem lua și pe ele ca soluții ale ecuației $\Delta\Phi = 0$, precum, drept corolar, și pe derivata lui $\frac{b}{r}$ în o direcție oarecare $\bar{s}_1$ $[s_{1x}, s_{1y}, s_{1z}]$.

In loc de această derivată putem lua *diferențiala* lui $\frac{b}{r}$, ceeace revine a deplasa câmpul potențial inițial, prin o deplasare ds_1 a sursei punctiforme dela origină, și a-l suprapune cu câmpul unei a două surse $-\frac{b}{r}$, egală și de semn schimbat cu prima, plasată în origină în locul primei, ceeace conduce la câmpul unui *dublu* (în limbajul fizic general: *dipol*). Acesta, plasat practicește în origină și orientat după s_1, comportă în derivată o funcție de vitesă de gradul -2:

$$\Phi_{-2} = \frac{\partial \Phi_{-1}}{\partial s_1} ds_1 = b \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s_1} ds_1 = b \left(s_{1x} \frac{\partial}{\partial x} + s_{1y} \frac{\partial}{\partial y} + s_{1z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{1}{r} ds_1$$

$$= b \bar{s}_1 \, grad \frac{1}{r} ds_1,$$

sau, punând $b ds_1 = b_1$ (momentul dubleului, pe aceeași scară ca mai sus):

$$\Phi_{-2}=b_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s_1},$$

expresie, pe care la pag. 145 am pus-o sub forma (cu $M=Qds_1=4\pi b\,ds_1=-4\pi b_1$)

$$\frac{M}{4\pi r^2}\frac{\partial r}{\partial s_1}=-\frac{M\cos\theta}{4\pi r^2}.$$

Acest procedeu se poate repeta, obţinându-se astfel *armonice sferice* de tipul general (*multipol* de ordinul $n+1$, aşezat tot în origină):

$$\Phi_{-(n+1)}=b_n\frac{\partial^n\frac{1}{r}}{ds_1\,ds_2\ldots ds_n}, \qquad (18)$$

unde operatorul $\frac{\partial}{\partial s_n}$ are înţelesul:

$$\frac{\partial}{\partial s_n}=s_{nx}\frac{\partial}{\partial x}+s_{ny}\frac{\partial}{\partial y}+s_{nz}\frac{\partial}{\partial z},$$

s_{nx}, s_{ny}, s_{nz} fiind cosinusurile directoare ale direcţiei arbitrare ds_n, adică ale vectorului $\overline{ds_n}$, denumit şi *axă*, iar

$$b_n=b\,ds_1\ldots ds_n=-\frac{Q}{4\pi}ds_1\,ds_2\ldots ds_n,$$

socotind că Q la fiecare operaţie este înlocuit printr'un infinit mare de un ordin imediat superior, pentru ca b_n să rămână finit. Notăm ca $-4\pi b_n$ exprimă momentul $Qds_1\,ds_2\ldots ds_n$ al *multipolului* de ordinul $n+1$, după cum $-4\pi b_1$ exprimă momentul dubleului sau dipolului.

Şi întradevăr, prin analogie $\Phi_{-(n+1)}$ poate fi privit drept funcţie de vitesă a unei întocmiri de *surse simple* (în electricitate *mase*) pozitive şi negative în jurul originei, într'un spaţiu foarte mic în raport cu r. Pentru a construi acest sistem, să presupunem că sistemul de ordinul $k+1$, obţinut după k operaţiuni, este deplasat translator, odată în direcţia $\overline{s_k}$ cu cantitatea $\frac{ds_k}{2}$ şi odată în direcţia $-\overline{s_k}$ cu aceeaşi cantitate, la această a doua deplasare schimbându-se simultan şi semnele surselor deplasate.

Această operaţie, simultan şi cu amplificarea debitului prin

factorul $\frac{1}{ds_n}$, realizează trecerea la sistemul de ordinul $k+2$, care se poate considera ca un *multipol* de ordinul $k+1$.

Este ușor de văzut că și procedeul descris la început pentru formarea dubleului (luarea diferențialei) este echivalent cu această operație, prin care dela sursa simplă Q, plasată în origină, după amplificarea lui Q la $\frac{Q}{ds_1} = Q_1$, se trece la dubleul cu $-Q_1, +Q_1$, surse simple depărtate de origină de o parte și de alta a ei cu câte $\frac{ds_1}{2}$ pe *axa dubleului*, care este $= \overline{ds_1}$. Debitul primitiv $Q = Q_1 ds_1$ ia acum numele de moment al dubleului, după cum s'a văzut.

La a doua aplicare a procedeului obținem un sistem de 4 surse cu $-Q_2, +Q_2$ și $+Q_2, -Q_2$ $\left(\text{unde } Q_2 = \frac{Q_1}{ds_2}\right)$ așezate la vârfurile unei paralelogram, având centrul în origină. A treia operație dă 8 surse la vârfurile unui paralelipiped și a. m. d., numărul surselor pozitive fiind totdeauna egal cu al surselor negative și deci suma lor nulă, astfel că, dacă debitul nu s'ar amplifica mereu după regula de mai sus, pentru ca momentul de orice ordin (reprezintând debitul imediat anterior) să fie finit, câmpul exterior spațiului restrâns din jurul originei, ocupat de surse, ar fi nul și lipsit de interes. Vectorii $\overline{ds_1}, \overline{ds_2}, \overline{ds_3}$... constituesc *axele multipolului*.

Funcțiunile lui *Laplace* (sferice de suprafață), care corespund armonicelor sferice (de spațiu) (18), rezultă din formula $\Phi_\nu = r^\nu S_\nu$, fiind de tipul

$$S_{-(n+1)} = b_n r^{n+1} \frac{\partial^n \frac{1}{r}}{\partial s_1 \partial s_2 \ldots \partial s_n}, \qquad (19)$$

și reprezintă în expresia armonicelor sferice de spațiu multiplicatorul unei puteri negative a lui r, ca

$$\Phi_{-(n+1)} = S_{-(n+1)} r^{-(n+1)}.$$

O asemenea armonică sferică (de spațiu) o vom numi *de prima categorie*[1]). Sistemul de surse obținut prin procedeul de mai

1) Cele cu indice și exponent al lui r pozitiv aparținând *categoriei a doua*-

sus, prezintă evident *în spaţiul ocupat de el* discontinuităţi; astfel, când pe axa unei dubleu se trece dela dreapta dubleului la stânga lui sau viceversa, $\cos\vartheta$, unde ϑ este unghiul format cu această axă de raza vectoare a punctului curent $\bar{r}\,[x, y, z]$, se schimbă dela $+1$ la -1, schimbarea semnului fiind consecinţa schimbării poziţiei punctului pe axă, din faţa lui $+Q_1$ în faţa lui $-Q_1$ şi vice versa.

c) **Proprietăţile funcţiunei r^μ. Funcţiuni sferice de spaţiu asociate.** Funcţiunea armonică $\frac{1}{r}$ intră în tipul funcţiunilor omogene de forma particulară:

$$r^\mu,$$

unde μ (ca şi ν, rezervat ca notaţie pentru gradul funcţiei generale Φ_ν) poate fi întreg sau nu. Se poate arăta că toate celelalte funcţiuni omogene de tipul r^μ, adică cu $\mu \neq -1$, nu sunt armonice. Intradevăr avem $\left(\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \text{ etc}\right)$:

$$\frac{\partial r^\mu}{\partial x} = \mu r^{\mu-1}\frac{\partial r}{\partial x} = \mu r^{\mu-2}\, x \quad \text{etc},$$

astfel că

$$\Delta r^\mu = \frac{\partial}{\partial x}(\mu r^{\mu-2}x) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu r^{\mu-2}y) + \frac{\partial}{\partial z}(\mu r^{\mu-2}z)$$

$$= 3\mu r^{\mu-2} + \mu(\mu-2)\, r^{\mu-4}(x^2+y^2+z^2) = \mu(\mu+1)\, r^{\mu-2}, \qquad (20)$$

care evident nu este nul decât pentru $\mu = -1$.

Pentru un produs de două funcţiuni Φ şi χ avem, precum uşor se poate constata:

$$\Delta(\Phi\chi) = \Phi\Delta\chi + \chi\Delta\Phi + 2\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\chi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial\chi}{\partial y} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial\chi}{\partial z}\right),$$

astfel că, dacă unei funcţiuni sferice de spaţiu generale Φ_ν îi alipim ca factor funcţiunea sferică de spaţiu, de forma particulară r^μ, adică punem:

$$\Phi = \Phi_\nu \quad \text{şi} \quad \chi = r^\mu,$$

obţinem, ţinând seamă că Φ_ν satisface prin ipoteză relaţiile $\Delta\Phi_\nu = 0$ şi (16):

$$\Delta(\Phi_\nu r^\mu) = \Phi_\nu \Delta r^\mu + 2\mu r^{\mu-2}\left(\frac{\partial\Phi_\nu}{\partial x}x + \frac{\partial\Phi_\nu}{\partial y}y + \frac{\partial\Phi_\nu}{\partial z}z\right)$$

$$= \mu(\mu+1) r^{\mu-2}\Phi_\nu + 2\mu\nu r^{\mu-2}\Phi_\nu = \mu(\mu+2\nu+1) r^{\mu-2}\Phi_\nu. \quad (21)$$

Rezultă că, deşi r^μ cu $\mu \neq -1$ nu este, după cum s'a arătat mai sus, funcţiune sferică de spaţiu (fiind omogenă însă nu şi armonică), dacă înmulţeşte însă o funcţie sferică de spaţiu Φ_ν de un anumit grad de omogenitate, care să anuleze factorul numeric al lui Φ_ν din (21), şi anume de gradul

$$\nu = -\frac{\mu+1}{2},$$

dă naştere la o nouă funcţiune sferică de spaţiu, având gradul $\nu+\mu = \frac{\mu-1}{2}$ şi pe care o vom numi *asociata* lui Φ_ν, anume

$$r^\mu \Phi_\nu = r^\mu \Phi_{-\frac{\mu+1}{2}}.$$

Invers, fiind dată armonica sferică (de spaţiu) Φ_ν, dacă o înmulţim cu r^μ, unde exponentul μ trebuie ales astfel ca factorul numeric al lui Φ_ν din (21) să se anuleze, şi anume:

$$\mu = -(2\nu+1),$$

se obţine armonica sferică asociată de gradul $-(\nu+1)$

$$r^\mu \Phi_\nu = r^{-(2\nu+1)}\Phi_\nu.$$

Aşa dar, spre a se avea funcţiunea sferică de spaţiu *asociată*, de gradul $-(\nu+1)$, a funcţiunei Φ_ν, trebuie dublat gradul ν al acestei funcţiuni, adăugat 1 şi schimbat semnul, obţinându-se astfel exponentul puterei lui r, cu care trebue înmulţit Φ_ν.

Cum prin aplicarea aceluiaşi tratament nouei funcţiuni recăpătăm pe Φ_ν, denumirea de *funcţii asociate* este justificată.

Pentru Φ_{-1} găsim drept funcţie asociată $r\Phi_{-1} = \Phi_0$, care este independentă de r, adică nu este de spaţiu, ceeace formează o excepţie.

Dacă gradul uneia din cele două funcţiuni, de ex. ν, este pozitiv, gradul $-(\nu+1)$ al funcţiei asociate va fi evident negativ.

Dacă însă ν este negativ, gradul funcţiunii asociate $|\nu|-1$ va fi pozitiv numai dacă $|\nu|>1$, în cazul $|\nu|<1$ fiind tot negativ,

ceeace însă nu se întâmplă evident niciodată dacă $|\nu|$ este un număr întreg n.

In acest din urmă caz, adică al indicelui întreg, funcţiunile de indice negativ le-am numit de *prima categorie*, cele cu indice pozitiv, de *a doua categorie*.

Cum funcţiunea $\Phi_\nu = r^\nu S_\nu$ are ca funcţiune sferică de suprafaţă pe S_ν, rezultă că şi funcţiunea ei asociată $\Phi_{-(\nu+1)}$

$$\Phi_{-(\nu+1)} \equiv r^{-(2\nu+1)}\, \Phi_\nu \equiv r^{-(\nu+1)}\, S_\nu, \qquad (22)$$

va avea aceeaşi funcţiune sferică de suprafaţă, şi cum mai putem scrie

$$\Phi_{-(\nu+1)} \equiv r^{-(\nu+1)}\, S_{-(\nu+1)}. \qquad (22.1)$$

rezultă

$$S_\nu \equiv S_{-(\nu+1)}.$$

Aşa dar, viceversa, unei funcţiuni sferice de suprafaţă S_ν îi corespund două şi numai două armonice sferice: una Φ_ν de gradul ν şi alta $\Phi_{-(\nu+1)}$ de gradul $-(\nu+1)$. Pentru S_{-1} avem funcţia sferică de spaţiu Φ_{-1} şi asociata ei $r\Phi_{-1} = \Phi_0$. Vom avea aşa dar:

$$\Phi_0 = r^0 S_0 = S_0 = S_{-1}$$

şi se poate spune că funcţia sferică de spaţiu Φ_{-1} are, drept asociată, funcţia sa *sferică de suprafaţă*.

Pentru orice număr întreg $\nu = n$ vom schimba numai notaţia, scriind

$$S_n = S_{-(n+1)},$$

iar după (22) şi (22.1):

$$\Phi_{-(n+1)} = r^{-(2n+1)}\, \Phi_n = r^{-(n+1)}\, S_n = r^{-(n+1)}\, S_{-(n+1)} \qquad (23)$$

şi după (17), sau împărţind (23) cu $r^{-(2n+1)}$,

$$r^{2n+1}\, \Phi_{-(n+1)} = \Phi_n = r^n\, S_n = r^n\, S_{-(n+1}. \qquad (23.1)$$

Aplicând metoda inversiunei asupra sistemului de surse multipol, care au drept funcţie de vitesă (18), aparţinând primei categorii, se poate arăta că armonica sferică Φ_n de un grad n pozitiv (deci de a 2-a categorie) poate fi considerată ca o funcţie de vitesă, datorită unui sistem de $2n$ surse simple, situate la infinit.

BCU IAŞI / CENTRALA UNIVERSITY LIBRARY

După cum s'a văzut mai sus, orice derivată parțială de ordinul n a armonicei sferice $\frac{1}{r}$ este și ea o armonică sferică $\Phi_{-(n+1)}$ de gradul $-(n+1)$, astfel că funcția ei asociată

$$\Phi_n = r^{2n+1}\,\Phi_{-(n+1)} = r^n\,S_n\,,$$

care este de asemenea o armonică sferică, va fi de gradul n.

Făcând câteva (n) derivări succesive lui $\frac{1}{r}$, constatăm că derivatele în chestiune sunt de forma:

$$\frac{P_n(x\,y\,z)}{r^{2n+1}}\,, \qquad (24)$$

unde numărătorul $P_n(x, y, z)$ este un polinom omogen de gradul n în x, y, z, derivata aceasta fiind deci de gradul $-(n+1)$.

Această derivată, care se poate nota $\Phi_{-(n+1)}$, dacă este înmulțită cu r^{2n+1}, conduce, după regula stabilită mai sus, la armonica sferică asociată de a doua categorie, care în speță este polinomul P_n.

d) **Armonice sferice în formă de polinoame întregi.** O astfel de armonică (mai sus cu (24) s'a arătat un mod de a obține anumite polinoame funcțiuni sferice) este (P_n având acum un sens cu totul general, cuprinzând și polinomul particular P_n de mai sus), de forma:

$$P_n = \sum_{\alpha+\beta+\gamma=n} a_{\alpha\beta\gamma}\,x^\alpha\,y^\beta\,z^\gamma\,.$$

Luând derivata de ordin n,

$$\frac{\partial^n P_n}{\partial x^\alpha\,\partial y^\beta\,\partial z^\gamma}$$

și făcând în ea $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, obținem evident coeficientul $a_{\alpha\beta\gamma}$, înmulțit cu un factor numeric.

Polinomul general P_n, care prin ipoteză satisface ecuațiile:

$$\Delta P_n \equiv \frac{\partial^2 P_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P_n}{\partial z^2} = 0 \quad (\textit{funcție armonică})$$

și

$$P_n(kx, ky, kz) \equiv k^n\,P(x, y, z) \qquad (\textit{funcție omogenă}),$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

nu își poate avea toți coeficienții, în număr de $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$, *liniar independenți* între ei, după cum vom demonstra.

Mai întâi să arătăm că numărul termenilor unui polinom întreg rațional omogen de gradul n, cu termeni completi în x, y, z, este cel indicat mai sus. Putem aplica formula combinațiilor cu repetiție a 3 obiecte (x, y, z) luate câte n, dar, cum 3 este mic, putem raționa mai simplu astfel:

Exponentul α poate fi oricare din numerile șirului

$$0\ 1\ 2\ 3\ \ldots\ n$$

și la fiecare α poate corespunde pentru β oricare din numerile aceluiași șir, însă numai până la maximum $n-\alpha$. In ceeace privește pe γ, el rezultă:

$$\gamma = n - \alpha - \beta.$$

Așa dar lui $\alpha = 0$ îi corespund $n+1$ exponenți β diferiți, lui $\alpha = 1$ îi corespund n exponenți $\beta \ldots$, lui $\alpha = n$ îi corespunde, un singur β și anume $\beta = 0$. Suma numerilor $n+1, n, n-1 \ldots, 1$ știm că este $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

In al doilea rând ΔP_n fiind un polinom omogen de gradul $n-2$, va conține după aceeași regulă $\frac{(n-1)n}{2}$ termeni sau coeficienți.

Pentru a avea însă identic

$$\Delta P_n \equiv 0,$$

trebuie ca toți coeficienții lui ΔP_n (care provin evident din acei ai lui lui P_n) să fie nuli, ceeace stabilește $\frac{(n-1)n}{2}$ legături liniare între cei $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ coeficienți ai lui P, care va avea astfel numai

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{(n-1)n}{2} = 2n+1$$

coeficienți arbitrari, deci liniar independenți, ceilalți putându-se obține din aceștia prin legături liniare după cum urmează. Scriind ecuația lui *Laplace* în forma:

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\frac{\partial^2 P_n}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 P_n}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 P_n}{\partial z^2}$$

şi derivând-o de $\alpha-2$ ori în raport cu x, de β ori în raport cu y, şi de γ ori în raport cu z, obţinem

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} P_n}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma} = -\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} P_n}{\partial x^{\alpha-2} \partial y^{\beta+2} \partial y^\gamma} - \frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} P_n}{\partial x^{\alpha-2} \partial y^\beta \partial z^{\gamma+2}}, \quad (24.0)$$

din care, făcând ca mai sus $x=0$, $y=0$, $z=0$, rezultă pentru un termen oarecare din membrul întâiu:

$$\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,a_{\alpha\beta\gamma} = -(\alpha-2)!\,(\beta+2)!\,\gamma!\,a_{\alpha-2,\beta+2,\gamma} - (\alpha-2)!\,\beta!\,(\gamma+2)!\,a_{\alpha-2,\beta,\gamma+2},$$

sau

$$\alpha(\alpha-1)a_{\alpha\beta\gamma} = -\beta(\beta-1)a_{\alpha-2,\beta+2,\gamma} - \gamma(\gamma+1)a_{\alpha-2,\beta,\gamma+2}. \quad (24.1)$$

In membrul al doilea indicele α, relativ lui x, se găseşte micşorat cu 2. Repetând aceeaşi operaţie pentru fiecare din termenii membrului al 2-lea, adică derivând $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2}{\partial z^2}$, le vom micşora acest indice succesiv cu câte două unităţi, până când vor rămâne numai indicii *1* şi *0*, ajugându-se astfel la şirurile de coeficienţi ireductibili

$$\left.\begin{array}{l} a_{0,n,0}\ ,\ a_{0,(n-1),1}\ ,\ \ldots\ a_{0,0,n} \\ a_{1,n-1,0}\ ,\ a_{1,n-2,1}\ ,\ \ldots\ a_{1,0,n-1} \end{array}\right\}, \quad (24.2)$$

cari sunt exact în număr de $(n+1)+n = 2n+1$. Cu ajutorul acestor coeficienţi ireductibili se pot exprima toţi ceilalţi coeficienţi prin relaţiuni liniare de tipul (24.1).

Ca exemple de polinoame armonice avem:

pentru $n=0$, $P_0=A$ cu coeficienţi liniar independenţi $2n+1=1$

„ $n=1$, $P_1=Ax+By+Cz$ „ „ „ „ $2n+1=3$.

„ $n=2$, $P_2=A(x^2-y^2)+B(x^2-z^2)+Cyz+Dzx+Exy$ „ $2n+1=5$.

Polinomul armonic omogen de gradul n, cel mai general, se poate scrie în consecinţă:

$$P_n = \lambda_{n,1} P_{n,1} + \lambda_{n,2} P_{n,2} + \ldots \lambda_{n,2n+1} P_{n,2n+1}, \quad (25)$$

$P_{n,k}$ fiind anumite polinoane armonice omogene de gradul n, iar $\lambda_{n,k}$ constante arbitrare.

Odată aceste polinoame liniar independente formate, dacă se face o schimbare de axe, ele vor rămâne tot omogene şi armonice, adică *sferice de spaţiu*, deoarece expresia

$$\Delta\Phi = div\ grad\ \Phi = const,$$

reprezintând o anumită familie de suprafețe, este independentă de sistemul de referință.

S'a văzut mai sus că există o metodă pentru a găsi o clasă particulară de polinoame. Derivatele parțiale de ordinul n, în număr tot de $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ ca și numărul coeficienților unui polinom omogen de gradul n (de asemenea = numărul de combinațiuni cu repetiție a trei litere, luate câte n), înmulțite cu r^{2n+1}, devin armonice sferice în formă de polinoame întregi raționale P_n de gradul n în x, y, z.

Printr'un raționament analog cu cel ce precede găsim, că toate aceste derivate de gradul n se pot exprima cu ajutorul a numai $2n+1$ din ele, de ex. acelea din următoarele două șiruri, corespunzătoare cu șirurile (24.2):

$$\left.\begin{array}{lll} \dfrac{\partial^n \frac{1}{r}}{\partial y^n}, & \dfrac{\partial^n \frac{1}{r}}{\partial y^{n+1}\partial z}, \cdots & \dfrac{\partial^n \frac{1}{r}}{\partial z^n} \\ \dfrac{\partial^n \frac{1}{r}}{\partial x\,\partial y^{n-1}}, & \dfrac{\partial^n \frac{1}{r}}{\partial x \partial y^{n-2}\partial z}, \cdots & \dfrac{\partial^n \frac{1}{r}}{\partial x \partial z^{n-1}}. \end{array}\right\} \qquad (26)$$

Funcțiunile (26), înmulțite cu r^{2n+1}, dau tocmai $2n+1$ polinoame (întregi raționale) armonice sferice de gradul n independente, din care se pot deduce toate celelalte funcțiuni de forma P_n după modelul (25).

e) **Funcțiuni sferice de suprafață (Laplace).** Să trecem acum la coordonate polare sau sferice cu ajutorul relațiilor

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta.$$

Vom avea

$$\Phi_\nu(x, y, z) = \Phi_\nu(r\sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta) = r^\nu S_\nu(\theta, \varphi),$$

S_ν fiind definit ca *funcțiune sferică de suprafață sau funcția lui Laplace.* In cazul când Φ_ν este un polinom P_n, avem la fel

$$P_n(x, y, z) = r^n S_n(\theta, \varphi).$$

Ca și pentru P_n vom avea pentru $S_n(\theta, \varphi)$ forma cea mai generală:

$$S_n(\theta, \varphi) = \lambda_{n,1} S_{n,1}(\theta, \varphi) + \lambda_{n,2} S_{n,2}(\theta, \varphi) + \ldots \lambda_{n,2n+1}(\theta, \varphi),$$

în care funcţiunile $S_{n,k}$ în număr de $2n+1$ sunt liniar independente una de alta.

In complementul de la începutul prezentului capitol s'a transformat expresia lui $\Delta\Phi = div\,\bar{v}$ în coordonate polare şi pe cale directă şi prin calculul divergentei vitesei. Vom repeta aci această din urmă metodă, folosind teorema lui *Gauss*, care exprimă că

$$\Delta\Phi = div\,\bar{v} = div\,grad\,\Phi$$

este egal cu fluxul lui $\bar{v} = grad\,\Phi$, eşit din unitatea de volum :

$$\frac{1}{d\tau}\int^{\sigma} grad\,\Phi\,d\bar{\sigma} \equiv \frac{1}{d\tau}\int^{\sigma}\frac{\partial\Phi}{\partial n}\,d\sigma,$$

luând ca $d\tau$ volumul elementar (paralelipiped drept) $rd\theta.r\sin\theta d\varphi.d\tau$.

Astfel, fluxul prin două faţete sferice ($r=const$) perpendiculare pe $\bar{r}$ dă o diferenţă (avem $dn = dr$)

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\,r\,d\theta.r\sin\theta\,d\varphi\right)dr;$$

pentru perechea de faţete conice ($\theta = const$), perpendiculare pe meridian, avem o diferenţă (aci $dn = rd\theta$):

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial\Phi}{r\partial\theta}\cdot r\sin\theta\,d\varphi\,.\,dr\right)d\theta,$$

iar pentru perechea de faţete plane ($\varphi = const$) perpendiculare pe cercul paralel,

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial\Phi}{r\sin\theta\,d\varphi}\;r\,d\theta\,dr\right)d\varphi.$$

Prin adunare avem, ţinând seama de expresia lui $d\tau$

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right)\right]$$

$$= \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}, \qquad (27)$$

primii doi termeni împreună, din ultimul membru, fiind echivalenţi cu $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)$, obţinut după eliminarea lui $\sin\theta$ (care este independent de r) din primul termen al mebrului al 2-lea.

Putem introduce în locul lui θ variabila

$$\xi = \cos\theta,$$

având

$$x = r\sqrt{1-\xi^2}\cos\varphi, \quad y = r\sqrt{1-\xi^2}\sin\varphi, \quad z = r\xi,$$

cu ξ variind între -1 și $+1$, iar $d\xi = -\sin\theta\, d\theta$.

Obținem atunci

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(1-\xi^2)\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right] + \frac{1}{r^2(1-\xi^2)}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}. \quad (27.1)$$

Ecuația lui *Laplace* urmând a fi satisfăcută prin definiție de orice funcție sferică de spațiu, fie polinom

$$P_n(x,y,z) = r^n S_n(\theta,\varphi) = r^n S_n(\xi,\varphi),$$

fie în cazul general de forma

$$\Phi_\nu = r^\nu S_\nu(\xi\,\varphi),$$

vom avea pentru ultima formă după (27):

$$\nu(\nu+1)S_\nu + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial S_\nu}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 S_\nu}{\partial\varphi^2} = 0, \quad (28).$$

sau după (25.1)

$$\nu(\nu+1)S_\nu + \frac{\partial}{\partial\xi}\left[(1-\xi^2)\frac{\partial S_\nu}{\partial\xi}\right] + \frac{1}{1-\xi^2}\frac{\partial^2 S_\nu}{\partial\varphi^2} = 0, \quad (28.1)$$

ecuație, așa dar, ce definește funcțiunile sferice de suprafață (omogene de gradul ν în $\sin\theta\cos\varphi$, $\sin\theta\cos\varphi$, $\cos\theta$, respectiv în $\sqrt{1-\xi^2}\cos\varphi$, $\sqrt{1-\xi^2}\sin\varphi$, ξ).

Ecuația (28.1) în S_ν nu se schimbă dacă înlocuim pe ν prin $-(\nu+1)$, și, cum am arătat mai sus că $S_{-(\nu+1)} = S_\nu$, se vede că nu e vorba aci de două soluțiuni diferite ale ecuației în chestiune, ci de una singură. Soluțiunile unei ecuații diferențiale de ordinul al doilea sunt de două spețe, astfel că soluția generală a ecuații (28.1) se obține din combinarea liniară a funcțiunilor ce aparțin ambelor aceste spețe.

La orice soluție $S_{-(\nu+1)} = S_\nu$ a ecuații diferențiale (28.1) a funcțiunii sferice de suprafață corespund, drept soluțiuni ale ecuației lui *Laplace*, armonicele sferice (de spațiu) asociate:

$$\Phi_{-(\nu+1)} = kr^{-(\nu+1)}S_{-(\nu+1)}, \text{ și } \Phi'_\nu = kr^\nu S_\nu,$$

k fiind o constantă arbitrară.

Funcțiunile Φ_ν cu ν pozitiv corespund unor surse pozitive

sau negative, aşezate la ∞. Astfel de ex. $\Phi'_1 = z$ reprezintă un curent paralel în direcţia z, care vine dela ∞.

f) **Cazul particular al funcţiunilor sferice de suprafaţă, numite: funcţiuni sferice zonale.** Dacă funcţiunile sferice de suprafaţă depind numai de θ (curenţi simetrici în jurul axei z), ele se numesc *funcţiuni sferice zonale* şi, cum atunci $\frac{\partial S_\nu}{\partial \varphi} = 0$, ele vor satisface, ecuaţia:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dS_\nu}{d\theta}\right) + \nu(\nu+1)S_\nu = 0, \qquad (29)$$

respectiv

$$(1-\xi^2)\frac{d^2S_\nu}{d\xi^2} - 2\xi\frac{dS_\nu}{d\xi} + \nu(\nu+1)S_\nu = 0,$$

sau

$$(1-\xi^2)S''_\nu - 2\xi S'_\nu + \nu(\nu+1)S_\nu = 0.$$

Această ecuaţie diferenţială este de forma generală a ecuaţiei lui *Sturm-Liouville:*

$$[(1-\xi^2)\eta']' + \lambda\eta' = 0$$

pentru *valoarea caracteristică* (Eigenwert) $\lambda = \nu(\nu+1)$.

Dacă în această ecuaţie luăm $\lambda = n(n+1)$ cu $n = 0, 1, 2, 3 \ldots$ şi impunem condiţiile la limită: η regulat pentru $\xi = \pm 1$ (puncte singulare ale ecuaţiei diferenţiale), intervalul fundamental fiind $-1 \leq \xi \leq 1$, se poate demonstra că singura soluţiune (cu aproximaţia unui factor numeric) a acestei ecuaţii, care ia forma (punând S_n în loc de η)

$$(1-\xi^2)S''_n - 2\xi S'_n + n(n+1)S_n = 0 \qquad (29\,2)$$

este aşa numitul polinom al lui *Legendre* de gradul n în ξ, pe care îl vom însemna cu $\mathcal{P}_n$, şi care se degajă şi din forma (24) a acelei clase de polinoame omogene armonice P_n, liniar independente, obţinute prin derivările parţiale de ordinul n a armonicei sferice $\frac{1}{r}$.

Intradevăr, dacă reluăm derivările succesive ale acestei funcţiuni, însă numai în raport cu z, înlocuind de fiecare dată $\frac{\partial r}{\partial z}$ prin $\frac{z}{r}$ obţinem:

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} = -\frac{z}{r^3}, \quad \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} = \frac{3z^2 - r^2}{r^5} \quad \text{etc. etc.}$$

de forma generală

$$\frac{\partial^n \frac{1}{r}}{\partial z^n} = \frac{F_n(z,r)}{r^{2n+1}},$$

unde $F_n(z,r)$ este unul din polinoamele omogene de gradul n, $P_n(x,y,z)$, pe cari în formula (24) le-am constatat a fi armonice; în $F_n(z,r)$ în afară de z figurează implicit variabilele x, y, z sub forma $x^2+y^2+z^2 = r^2$.

Așa dar, vom avea

$$F_n(z,r) \equiv r^n F_n\left(\frac{z}{r}, 1\right) \equiv r^n F_n(\cos\theta, 1) \equiv r^n F_n(\xi,1),$$

astfel că

$$\frac{\partial^n \frac{1}{r}}{\partial z^n} = \frac{F_n(\xi,1)}{r^{n+1}}, \qquad (30)$$

unde $F_n(\cos\theta,1) \equiv F_n(\xi,1)$ este un polinom (neomogen) de gradul n în $\cos\theta \equiv \xi$, funcțiune sferică de suprafață, zonală, care este deci o soluție a ecuației diferențiale (29,2) în S și care, înmulțită cu r^{2n+1}, ne va da un polinom $F_n(z,r)$ de forma polinoamelor $P_n(x,y,z)$ (24), cu aproximația, bine înțeles, a unui factor numeric.

Aceeași derivată de ordinul n, luată în raport cu r, este

$$\frac{\partial^n \frac{1}{r}}{\partial r^n} = (-1)^n\, n!\, \frac{1}{r^{n+1}}$$

și dacă am voi să păstrăm analogie în formă, am putea scrie analog și derivata n^a în raport cu z, reproducând de fapt (30) cu un alt factor numeric:

$$\frac{\partial^n \frac{1}{r}}{\partial z^n} = \frac{F_n(\cos\theta,1)}{r^{n+1}} = (-1)^n\, n!\, \frac{\mathcal{P}_n(\xi)}{r^{n+1}}. \qquad (30.1)$$

Se vede că pentru $\cos\theta \equiv \xi = 1$, când $z = r$, avem totdeuna $\mathcal{P}_n(1) = 1$.

Rămâne de văzut că acest $\mathcal{P}_n(\xi)$, care este, cu aproximația unui factor numeric, soluția ecuației (29,2), este identic cu polinomul lui *Legendre* de gradul n în ξ, ce se va găsi pe o cale diferită, însă analoagă.

Deocamdată se poate spune că $\mathcal{P}_n(\xi)$ este multiplicatorul derivatei de ordin n a lui $\frac{1}{r}$ în raport cu r, pentru a găsi pe aceea de același ordin în raport cu z:

$$\frac{\partial^n \frac{1}{r}}{\partial z^n} = \mathcal{P}_n \frac{\partial^n \frac{1}{r}}{\partial r^n}.$$

Aceasta explică pentru ce, aceste polinoame de grade 1, 2, 3... au fost întâlnite de *Legendre* la o desvoltare în serie *Mac Laurin*, unde apar derivatele succesive ale lui $\frac{1}{r}$ în raport cu z.

Polinomul $\mathcal{P}_n$ de gradul n, ca funcțiune sferică zonală de gradul n în ξ, constitue singura soluție a ecuației (29.2) cu n întreg, regulată în întreg intervalul $-1 \leq \xi \leq 1$, inclusiv limitele intervalului (ansamblu *închis*).

Pentru $n=0$ avem funcțiunea primitivă $\frac{1}{r}$ și deci:

$$\mathcal{P}_0 = 1$$

(convenind a lua și aici $n!=1$ ca și pentru $n=1$).

Pentru $n=1$ avem:

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z} = (-1)^1 1! \frac{1}{r^2}\frac{z}{r} = (-1)^1 1! \frac{\xi}{r^2}$$

deci

$$\mathcal{P}_1 = \xi.$$

Pentru $n=2$ avem:

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z} = (-1)^2 2! \frac{1}{r^2} \cdot \frac{3\xi^2 - 1}{2}$$

deci

$$\mathcal{P}_2 = \frac{3\xi^2 - 1}{2} \quad \text{și a. m. d.}$$

g) **Polinoamele lui Legendre.** Ele au fost găsite, după cum am spus mai sus, la o desvoltare în serie, și anume aceea a inversului distanței dintre două puncte.

Fie $M(x,y,z)$ punctul curent și $M'\ (0,0,r')$ un punct depe axa z pozitivă, la distanța r' de origină. Distanța între cele două puncte este:

$$M'M = R = \sqrt{x^2+y^2+(z-r')^2}.$$

In Hidrodinamică, dacă în M' avem o sursă simplă de debit $Q=-4\pi$, funcția de vitesă în M va fi $\frac{1}{R}$, satisfăcând în orice caz ecuația lui *Laplace*.

In coordonate polare (sferice) avem:

$$R = \sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\theta}$$

și dacă punem

$$\frac{r'}{r} = \alpha$$

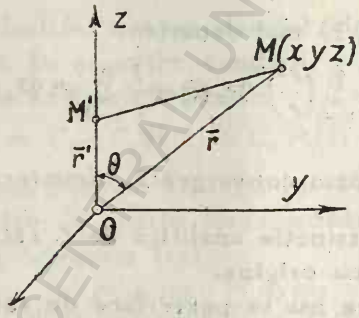


Fig. 37

funcția de vitesă va fi:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{(r^2-2r'\xi+r'^2)^{1/2}} = \frac{1}{r}(1-2\alpha\xi+\alpha^2)^{-1/2} = \frac{1}{r}[1-(2\xi-\alpha)\alpha]^{-1/2}$$

sau, desvoltând binomul:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}(2\xi-\alpha)^n\alpha^n\right]. \qquad (31)$$

Seria este convergentă dacă:

$$|(2\xi-\alpha)\alpha| < 1.$$

Ordinea de succesiune a termenilor poate fi schimbată arbitrar, putându-se ordona după puterile lui α, dacă seria (rezultată prin desvoltarea și a lui $(2\xi-\alpha)^n$) este absolut convergentă, adică dacă $\alpha(2|\xi|+\alpha)<1$.

In cazul acesta (termenul pentru $n=0$, adică lipsit de α, fiind $=1$), avem pentru funcția de vitesă a sursei simple, așezată pe axa z în M', cu debitul $Q=-4\pi$:

$$\Phi=\frac{1}{R}=\frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n G_n(\xi). \qquad (32)$$

Dacă întrebuințăm din contră coordonate cartesiene, desvoltând în raport cu puterile lui r' (ceea ce revine aci a lua derivatele în raport cu $-z$) în serie *Mac Laurin*, obținem:

$$\frac{1}{R}=\Phi(x,y,z-r')$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{r'^n}{n!}\left(\frac{\partial^n\Phi}{\partial z^n}\right)_{r'=0}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{r'^n}{n!}\frac{\partial^n\frac{1}{r}}{\partial z^n},$$

iar după scrierea (30.1) mai departe

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^n\mathcal{P}_n(\xi)=\frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\mathcal{P}_n(\xi). \qquad (32.1)$$

Seria este uniform convergentă, deoarece $\frac{1}{R}$ pentru r' suficient de mic este o funcție analitică de r, cât timp punctul M nu vine în coincidență cu origina.

Cum desvoltarea nu se poate face de cât într'un singur fel, vom avea, comparând cu (32)

$$G_n(\xi)=\mathcal{P}_n(\xi),$$

adică polinoamele lui *Legendre* sunt coeficienții puterilor lui α în cazul când luăm drept funcție generatoare pe $\frac{1}{R}$ și o desvoltăm după puterile lui α. Obținem astfel desvoltarea în α:

$$\frac{r}{R}=(1-2\alpha\xi+\alpha^2)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{P}_n(\xi)\alpha^n. \qquad (33)$$

Dacă privim pe α ca variabilă complexă, membrul întâiu va fi o funcție analitică de α, ale cărei puncte singulare sunt soluțiile ecuației $1-2\alpha\xi+\alpha^2=0$, adică

$$\xi \pm i\sqrt{1-\xi^2} = e^{\pm i\theta},$$

căci $\xi = \cos\theta$.

Desvoltarea este, aşa dar, valabilă în cazul când punctele singulare rămân în afară: $|\alpha|<1$ sau $r'<r$, având în acest caz

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^n \mathcal{P}_n(\cos\theta), \qquad (33.1)$$

adică (funcţie de categoria 1-a)

$$\Phi = \frac{1}{r} + \mathcal{P}_1\frac{r'}{r^2} + \mathcal{P}_2\frac{r'^2}{r^3} + \mathcal{P}_3\frac{r'^3}{r^4} + \dots$$

In cazul când $r'>r$ avem prin intervertirea lui r şi r':

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r'}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{r'}\right)^n \mathcal{P}_n(\cos\theta),$$

adică (funcţie de categoria 2-a)

$$\Phi = \frac{1}{r'} + \mathcal{P}_1\frac{r}{r'^2} + \mathcal{P}_2\frac{r^2}{r'^3} + \dots .$$

Aceasta este dealtfel un caz special al unei teoreme generale, care spune că, în anumite condiţii, o funcţie $f(\xi)$ se poate desvolta într'o serie de funcţii sferice

$$f(\xi) = C_0 + C_1\mathcal{P}_1(\xi) + C_2\mathcal{P}_2(\xi) + \dots,$$

analog cu desvoltarea *Fourier*. Ecuaţia lui *Laplace* este satisfăcută de funcţiunile sferice de spaţiu corespunzătoare, de ambele categorii, şi anume (de categoria 1-a)

$$\Phi = \frac{C_0\mathcal{P}_0(\xi)}{r} + \frac{C_1\mathcal{P}_1(\xi)}{r^2} + \dots .$$

şi funcţia asociată (de categoria 2-a)

$$\Phi' = C_0\,\mathcal{P}_0(\xi) + C_1'\mathcal{P}_1(\xi) + \dots$$

b) **Formulă de recurenţă pentru obţinerea succesiv a polinoamelor $\mathcal{P}_n$.** Din expresia lui $\frac{1}{R}$ obţinem o formulă de recurenţă a polinoamelor lui *Legendre* pentru trei valori consecutive ale lui n.

Avem

$$\log\frac{r}{R} = -\frac{1}{2}\log(1 - 2\alpha\xi + \alpha^2)$$

și, derivând în raport cu α,

$$\frac{R}{r}\frac{d\frac{r}{R}}{d\alpha} = \frac{\xi-\alpha}{1-2\alpha\xi+\alpha^2}$$

sau

$$(1-2\alpha\xi+\alpha^2)\frac{d\frac{r}{R}}{d\alpha}+(\alpha-\xi)\frac{r}{R} = 0$$

sau, după (32.1)

$$(1-2\alpha\xi+\alpha^2)\sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^{n-1}\mathcal{P}_n(\xi)+(\alpha-\xi)\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\mathcal{P}_n(\xi)=0.$$

Identificând coeficienții lui α^n, obținem

$$(n+1)\mathcal{P}_{n+1}(\xi)-(2n+1)\xi\mathcal{P}_n(\xi)+n\mathcal{P}_{n-1}(\xi)=0.$$

Cunoscând pe $\mathcal{P}_0$ și $\mathcal{P}_1$, se obțin astfel succesiv toate celelalte polinoame. Ori, am văzut că

$$\mathcal{P}_0(\xi) = 1$$
$$\mathcal{P}_1(\xi) = \xi.$$

Cu acestea obținem succesiv :

$$\left.\begin{aligned}
\mathcal{P}_2(\xi) &= \frac{1.3}{2!}\left(\xi^2-\frac{1}{3}\right)\\
\mathcal{P}_3(\xi) &= \frac{1.3.5}{3!}\left(\xi^3-\frac{3}{5}\xi\right)\\
\mathcal{P}_4(\xi) &= \frac{1.3.5.7}{4!}\left(\xi^4-\frac{6}{7}\xi^2+\frac{3}{3\,5}\right)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\mathcal{P}_n(\xi) &= \frac{1.3\ldots(2n-1)}{n!}(\xi^n-c_2\xi^{n+2}+c_4\xi^{n-4}-\ldots).
\end{aligned}\right\} \quad (34)$$

Coeficienții c_{2m} ai puterilor ξ^{n-2m} se determină mai simplu, introducând în ecuația diferențială a funcțiunilor zonale polinomul lui *Legendre* în forma desvoltată:

$$\mathcal{P}_n(\xi)=\sum_{m=0}^{[n/2]}(-1)^m c_{2m}\xi^{n-2m},$$

unde $\left[\frac{n}{2}\right]$ este numărul întreg conţinut în $\frac{n}{2}$, şi identificând coeficienţii.

Obţinem astfel:

$$n(n+1)\Sigma(-1)^m c_{2m}\xi^{n-2m} - 2\xi\Sigma(-1)^m(n-2m)c_{2m}\xi^{n-2m-1}$$
$$+(1-\xi^2)\Sigma(-1)^m(n-2m)(n-2m-1)c_{2m}\xi^{n-2m-2}=0$$

cu

$$m=1,2,\ldots\left[\frac{n}{2}\right]$$

sau

$$(-1)^m n(n+1)c_{2m} - (-1)^m 2(n-2m)c_{2m}$$
$$+(-1)^{m-1}(n-2m+2)(n-2m+1)c_{2m-2}$$
$$-(-1)^m(n-2m)(n-2m-1)c_{2m}=0$$

de unde

$$c_{2m}=\frac{(n-2m+2)(n-2m+1)}{2m(2n-2m+1)}c_{2m-2} \qquad \left(m=1,2\ldots\left[\frac{n}{2}\right]\right)$$

şi cu $c_0=1$.

In general vom avea, aşa dar:

$$\mathcal{P}_n(\xi)=\frac{1.3\ldots 2n-1}{n!}\left[\xi^n-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\xi^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4(2n-1)(2n-3)}\xi^{n-4}\ldots\right.$$
$$\left.+(-1)^m\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-2m+1)}{2.4\ldots 2m(2n-1)\ldots(2n-2m+1)}\xi^{n-2m}+\ldots\right]. \quad (35)$$

Şirul se rupe, devenind un polinom ce se termină cu puterea zero sau 1 a lui ξ, după cum n este par sau impar.

Având în vedere că $(1-\alpha)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n$, din (33) rezultă pentru $\xi=1$

$$\mathcal{P}_n(1)=1 \quad (35\,1)$$

şi tot astfel pentru $\xi=-1$, având în vedere că $(1+\alpha)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\alpha^n$:

$$\mathcal{P}_n(-1)=(-1)^n. \quad (35.2)$$

In fine, pentru $\xi=0$, cum după (31)

$$(1+\alpha^2)^{-1/2}=1+\sum_{n=}^{\infty}\frac{1\,3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}(-1)^n\alpha^{2n}, \quad (35.3)$$

BIBLIOTECA CENTRALĂ UNIVERSITARĂ BUCUREŞTI

dacă n este impar, ținând seamă că termenii cu puteri impare ale lui α nu figurează în această desvoltare, coeficienții respectivi ai lui α^n din desvoltarea (33) cu n impar vor fi nuli și deci

$$\mathcal{P}_n(0) = 0 \quad \text{pentru } n \text{ impar}, \tag{35.4}$$

ceeace de altfel se vede și din tabela (34).

Dacă din contra n este par, punând în (35.3) n în loc de $2n$ în coeficientul lui α^n, care după (33) este $\mathcal{P}_n$, găsim:

$$\mathcal{P}_n(0) = (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{1.3.5 \ldots (n-1)}{2.4 \ldots n} \tag{35.5}$$

In fine din (35) rezultă, după cum se poate verifica la primul termen în ξ^n:

$$\mathcal{P}_n(\xi) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\xi^n} \left[\xi^{2n} - \frac{n}{2!} \xi^{2n-2} + n \frac{(n-1)(n-2)}{3!} \xi^{2n-6} + \ldots \right]$$

$$= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (\xi^2 - 1)^n}{d\xi^n} . \tag{35.6}$$

Toate aceste formule se pot găsi și prin rezolvarea directă a ecuației funcțiunilor zonale cu $\nu = n$ întreg.

i) **Găsirea pe cale directă a soluției $\mathcal{P}_n$ (polinomul lui Legendre) și a funcții sferice zonală de a două speță, drept soluții ale ecuației diferențiale zonale.** La formula (35) putem ajunge și direct, căutând o soluție a ecuației funcțiunilor zonale (29), care, având termeni cu 2 dimensiuni în ξ, se pretează pentru integrarea prin serie. Incercând integrarea acestei ecuații diferențiale prin o serie întreagă $A + Bx + Cx^2 + \ldots$, găsim printr'un calcul elementar de identificare soluția (valabilă pentru $|\xi| < 1$)

$$S_\nu = A \left[1 - \frac{\nu(\nu+1)}{1.2} \xi^2 + \frac{(\nu-2)\nu(\nu+1)(\nu+3)}{1. \quad 2. \quad 3. \quad 4.} \xi^4 - \ldots \right]$$

$$+ B \left[\xi - \frac{(\nu-1)(\nu+2)}{1.2.3} \xi^3 + \frac{(\nu-3)(\nu-1)(\nu+2)(\nu+4)}{5'.} \xi^5 + \ldots \right. \tag{36}$$

cu A și B constante arbitrare.

Seriile, ce apar aci, aparțin seriei *hipergeometrice*, după notația lui *Gauss*:

$$F(\alpha,\beta,,\gamma,x)=1+\frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2$$

$$+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3.\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+\ldots,$$

care este absolut convergentă pentru x cuprins între 0 şi 1, însă pentru $x=1$ numai dacă $\nu>\alpha+\beta$. In cazul de faţă avem:

$$S_\nu=AF\left(-\frac{\nu}{2},\frac{1+\nu}{2},\frac{\nu}{2},\frac{\xi^2}{2}\right)+B\xi F\left(\frac{1-\nu}{2},\frac{2+\nu}{2},\frac{3}{2},\xi^2\right).$$

Dacă presupunem că ν este un număr întreg şi pozitiv n, în cazul lui n par, seria de lângă A se rupe, adică se reduce la un polinom de gradul n, pe când cealaltă trebue să dispară, adică să avem $B=0$; în cazul lui n impar paranteza de lângă B ne va da un asemenea polinom, la care s'ar reduce S_n, pe când A la rândul său trebue să fie nul. Aceste cazuri constituesc singurile soluţiuni de polinoame în ξ, soluţiuni ce se numesc de prima speţă cu n întreg şi cari rămân finite pe sfera unitară.

Ordonând pe oricare din paranteze în raport cu puterile descrescânde ale lui ξ şi introducând un factor numeric, astfel ales în cât coeficientul lui ξ^n să corespundă cu acela din desvoltarea în serie (33) a lui $\frac{r}{R}=(1-2\alpha\xi+\alpha^2)^{-1/2}$ în factorul lui α^n, se verifică că, independent de paritatea lui n, $S_n(\xi)$ se poate reprezenta prin seria (35) $=\mathcal{P}_n(\xi)$, anume prin polinomul lui *Legendre* de gradul n, care apare în desvoltarea:

$$(1-2\alpha\xi+\alpha^2)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{P}_n(\xi)\alpha^n$$

şi care pentru $n=0$ ia valoarea $\mathcal{P}_0=1$

Pentru n *par* aceasta corespunde cazului:

$$A=(-1)^{n/2}\frac{1.3\,5\ldots(n-1)}{2.4\ldots n},\quad B=0.$$

pe când pentru n *impar*, cazului:

$$A=0,\quad B=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{1\,3.5\ldots n}{2.4\ldots(-1)}.$$

Pentru a epuiza toate soluţiile ecuaţiei zonale (29,2) cu n întreg, conţinute în formula (36), este destul a mai presupune invers, că în cazul n *par* avem $A=0$ şi $B\neq0$, iar în cazul n *impar* avem $A\neq0$ şi $B=0$. Obţinem astfel soluţia zisă de a *doua speţă*,

soluția generală fiind, bine înțeles, o combinație liniară a soluțiilor de ambele spețe.

Soluția de a doua speță nu mai este evident polinom, ci serie întreagă. Cu valorile particulare pentru n *par*

$$B=(-1)^{n/2}\frac{2.4\ \ldots\ n}{1.3\ldots(n-1)} \quad \text{cu } A=0,$$

iar pentru n *impar*

$$A=(-1)^{\frac{n+1}{2}}\frac{n.4\ \ldots\ (n-1)}{2\ 5\ \ldots\ n} \quad \text{cu } B=0,$$

funcția sferică zonală de a doua speță, însemnată cu Q_n, se poate pune sub forma mai concentrată

$$Q_n(\xi)=\frac{1}{2}\mathcal{P}_n(\xi)\log\frac{1+\xi}{1-\xi}-Z_n$$

cu

$$Z_n=\frac{2n-1}{1-n}\mathcal{P}_{n-1}+\frac{2n-5}{3\,(n-1)}\mathcal{P}_{n-3}.$$

Avem astfel succesiv:

$$Q_0(\xi)=\frac{1}{2}\log\frac{1+\xi}{1-\xi},\ Q_2(\xi)=\frac{1}{4}(3\xi^2-1)\log\frac{1+\xi}{1-\xi}-\frac{3}{2}\xi,$$

$$Q_1(\xi)=\frac{1}{2}\log\frac{1+\xi}{1-\xi}-1,\ Q_3(\xi)=\frac{1}{4}(5\xi^3-3\xi)\log\frac{1+\xi}{1-\xi}-\frac{5}{2}\xi^2+\frac{2}{3}.$$

putându-se înlocui la nevoe

$$\frac{1+\xi}{1-\xi}=\cot^2\frac{\theta}{2}.$$

j) **Alte forme pentru polinomul lui Legendre** $\mathcal{P}_n$. S'a mai dat următoarea formă în θ în loc de ξ:

$$\mathcal{P}_n(\cos\theta)=1-\frac{n(n+1)}{1^2}\sin^2\frac{\theta}{2}+\frac{(n-1)\,n\,(n+1)\,(n+2)}{1^2.2^2}\sin^2\frac{\theta}{3}-\ldots \quad (37)$$

Aceasta se obține, dacă în formula (35) înlocuim pe $\xi=\cos\theta$ prin $1-2\sin^2\frac{\theta}{2}$.

O altă formă se obține prin desvoltarea în serie Fourier. Avem:

$$(1-2\alpha\cos\theta+\alpha^2)^{-1/2}=(1-\alpha e^{i\theta})^{-1/2}(1-\alpha e^{i\theta})^{-1/2}$$

$$=\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1.3\ \ldots\ 2n-1}{2.4\ \ldots\ 2n}\alpha^n e^{in\theta}\right]\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1.3\ \ldots\ 2n-1}{1.4\ \ldots\ 2n}\alpha^n e^{-in\theta}\right].$$

FOLIA CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Ambele serii pentru $|\alpha|<1$ sunt absolut convergente. Pentru coeficienții termenilor în α^n, adică pentru $\mathcal{P}_n(\xi)\equiv\mathcal{P}_n(\cos\theta)$, ținând seamă că, în afară de suma factorilor în α^n din cele două Σ, mai putem avea sume de produse de termeni în

$$\alpha^m\,\alpha^{n-m}\,e^{im\theta}\,e^{-i(n-m)\theta}$$

și în

$$\alpha^{n-m}\,\alpha^m\,e^{i(n-m)}\,e^{-im},$$

cari dau:

$$\alpha^n\left[e^{i(2m-n)}+e^{-i(2m-n)}\right]=2\alpha^n\cos(n-2m),$$

obținem:

$$\mathcal{P}_n(\cos\theta)=2\,\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\left[\cos n\theta+\frac{1.n}{1.(2n-1)}\cos(n-2)\theta\right.$$

$$\left.+\frac{1\,3.n\,(n-1)}{1.2.(2n-1)\,(2n-3)}\cos(n-4)\theta+\ldots\right]. \qquad (38)$$

Seria se rupe, terminându-se cu un termen fie constant, fie în $\cos\theta$, după cum n este par sau impar. Dacă $\theta=0$, deci $\xi=1$, ambii membri au valoarea lor maximă și cum $\mathcal{P}_n(o)=1$, rezultă că

$$\mathcal{P}_n(\xi)\leq 1.$$

O limită inferioară pentru membrul al doilea se obține înlocuind toate cosinusurile prin -1, în care caz obținem valoarea -1, deoarece trebue să ajungem la o valoare egală și de sens contrar ca în cazul, când toate consinusurile ar fi egale cu $+1$ (cazul $\theta=0$). Rezultă:

$$-1\leq\mathcal{P}_n(\xi)\leq 1$$

sau

$$|\mathcal{P}_n(\xi)|\leq 1.$$

k) **Soluția generală a funcțiunilor sferice de suprafață cu indice întreg.** Precum am arătat la paragraful *e*) nu există decât $2n+1$ asemenea polinoame liniar independente. In cele ce urmează ele vor fi determinate sub o formă particulară.

Exprimând pe $\cos\varphi$ și $\sin\varphi$ în formă exponențială, putem scrie pentru cordonatele x și y:

$$x=r\sin\theta\,\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}=r\sqrt{1-\xi}\;\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}$$

$$y=r\sin\theta\,\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2}=r\sqrt{1-\xi}\;\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}$$

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

și, ordonând polinomul $\mathcal{P}_n(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta) = S_n(\theta,\varphi)$ în raport cu puterile s ale lui $\epsilon^{i\varphi}$, vom putea scrie:

$$S_n = \sum_{s=-n}^{n} e^{is\varphi}\,\mathcal{P}_n^s, \qquad (39)$$

funcția $\mathcal{P}_n^s$ depinzând numai de $\xi = \cos\theta$. Exponentul lui $\sin\theta \equiv \sqrt{1-\xi^2}$ din $\mathcal{P}_n^s$ va fi de aceiași paritate cu suma exponenților lui x și y, adică cu s, astfel că, dacă s este par, $\mathcal{P}_n$ va fi un polinom în ξ, iar dacă s este impar, $\mathcal{P}_n^s$ va conține pe $\sqrt{1-\xi^2}$ ca factor.

Dacă această expresie a lui S_n este introdusă în (28,1), ecuația diferențială a funcțiunilor sferice de suprafață devine:

$$\Sigma\left\{n(n+1)e^{is\varphi}\mathcal{P}_n^s + \epsilon^{is\varphi}\frac{d}{d\xi}\left[(1-\xi^2)\frac{d\mathcal{P}_n^s}{d\xi}\right] - \frac{s^2}{1-\xi^2}\epsilon^{is\varphi}\mathcal{P}_n^s\right\} = 0.$$

Cum această ecuație trebue să fie verificată pentru orice valoare a lui φ, toți multiplicatorii unei expresii $\epsilon^{is\varphi}$ cu un anumit s trebue să fie nuli, adică să avem separat:

$$n(n+1)\,\mathcal{P}_n^s + \frac{d}{d\xi}\left[(1-\xi^2)\frac{d\mathcal{P}_n^s}{d\xi}\right] - \frac{s^2}{1-\xi^2}\,\mathcal{P}_n^s = 0, \quad (39.1)$$

astfel că orice $\mathcal{P}_n^s$ din (39) va satisface separat ecuația diferențială (39.1). Această ecuație diferențială liniară de ordinul al doilea, care se mai poate scrie:

$$\frac{d}{d\xi}\left[(1-\xi^2)\frac{d\mathcal{P}_n^s}{d\xi}\right] + \left[n(n+1) - \frac{s^2}{1-\xi^2}\right]\mathcal{P}_n^s = 0, \quad (39.2)$$

definește, așa dar, funcțiunile $\mathcal{P}_n^s$ de ξ, cari sunt în număr de $2n+1$ cu $s = -n, \ldots -2, -1, 0, 1, 2 \ldots n$, dintre cari însă, precum vom vedea, numai $n+1$, de exemplu cele cu $s = 0, 1, 2 \ldots n$ sunt distincte, pentru $s=0$ având evident funcțiunea sferică zonală $\mathcal{P}_n^0 = k\mathcal{P}_n$, unde k este un coeficient arbitrar.

Integrala generală a acestei ecuații este transcendentă, dar există o integrală particulară, care este un polinom în ξ sau un polinom în ξ înmulțit cu $\sqrt{1-\xi^2}$ și care trebue luat drept soluție, dacă vrem să avem o funcție regulată pe întreaga sferă unitară.

Avem astfel definite polinoamele $\mathcal{P}_n^s$.

Se observă că schimbând pe s în $-s$ ecuația (39,2) nu se schimbă și prin urmare:

$$\mathcal{P}_n^{-s} = k\,\mathcal{P}_n^s$$

devenind astfel de prisos a da indicelui s al lui $\mathcal{P}_n^s$ şi valorile negative. Bine înţeles, fiecare funcţie $\mathcal{P}_n^s$ este determinată numai cu aproximaţia unui coeficient arbitrar.

Dând lui s toate valorile dela $-n$ la $+n$, însă pentru $\mathcal{P}_n^s$ numai valorile $1,2 \ldots n$, pentru a avea astfel toate polinoamele $\mathcal{P}_n^s$ liniar independente, obţinem drept funcţiuni distincte $\mathcal{S}_n$ (39), cari satisfac ecuaţia diferenţială (28,1) a funcţiunilor sferice de suprafaţă, următoarele funcţiuni:

$$e^{-in\varphi}\mathcal{P}_n^n,\ e^{-i(n-1)\varphi}\mathcal{P}_n^{n-1} \ldots e^{-i\varphi}\mathcal{P}_n^1,\ \mathcal{P}_n,\ e^{i\varphi}\mathcal{P}_n^1,\ e^{i2\varphi}\mathcal{P}_n^2,\ \ldots e^{in\varphi}\mathcal{P}_n^n.$$

Aceste funcţii se mai pot înlocui (adunându-le şi scăzându-le între ele în aşa fel, ca să scăpăm de imaginare) prin:

$$\left.\begin{aligned} &\mathcal{P}_n,\ \mathcal{P}_n^1 \cos\varphi, \ldots \mathcal{P}_n^n \cos n\varphi \\ &\mathcal{P}_n^1 \sin\varphi, \ldots \mathcal{P}_n^n \sin n\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (40)$$

Pentru completa lor determinare trebuesc căutate soluţiile ecuaţiei liniare de ordinul al doilea 39,2), dând lui s diferitele valori pe cari le comportă. Pentru $s=0$ putem lua drept soluţie polinomul lui *Legendre* de gradul n, care, fără factorul $\frac{1}{2^n n!}$, are conform formulei (35,6) forma:

$$\frac{d^n(\xi^2-1)^n}{a\xi^n}.$$

Se poate verifica de altfel uşor, că, punând $(\xi^2-1)^n = u$ şi deci

$$\frac{du}{d\xi} = 2n\xi\,(\xi^2-1)^{n-1},(\xi^2-1)\frac{du}{d\xi} = 2n\xi u$$

şi derivând ultima relaţie de $n+1$ ori în raport cu ξ, obţinem relaţia:

$$(\xi^2-1)\frac{d^{n+2}u}{a\xi^{n+2}} + 2\xi\,(n+1)\frac{d^{n+1}u}{a\xi^{n+1}} + \frac{2n(n+1)}{1.2}\frac{d^n u}{a\xi^n} = 2n\xi\frac{d^{n+1}u}{d\xi^{n+1}}$$

$$+1n(n+1)\frac{d^n u}{a\xi^n},$$

care, dacă înlocuim în ea:

$$\frac{d^n u}{d\xi^n} \equiv \frac{d^n(\xi^2-1)^n}{d\xi^n} \equiv 2^n n!\,\mathcal{P}_n,$$

devine exact ecuaţia zonală :

$$(\xi^2-1)\frac{d^2\mathcal{P}^n}{d\xi^2}+2\xi\frac{d\mathcal{P}^n}{d\xi}-n(n+1)\mathcal{P}^n=0\,.$$

pe care deci $\mathcal{P}_n$, drept verificare în plus, o satisface.

$\mathcal{P}_n$, care constitue una din cele $2n+1$ funcţiuni sferice de suprafaţă (funcţiunile lui *Laplace*) distincte, ne este cunoscut.

Pentru determinarea celorlalte n funcţii $\mathcal{P}_n^s$, reamintim mai întâiu că un polinom armonic conservă această calitate la orice schimbare de axe.

Luând că pol un punct arbitrar P de pe sfera unitară, prin care facem să treacă axa z, avem pentru punctul curent M

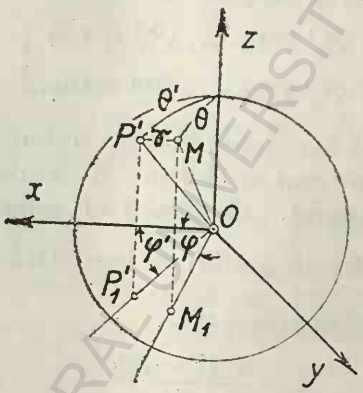


Fig 38

(şi pe toate punctele ale aceluiaşi paralel) funcţia respectivă $\mathcal{P}_n{}^0=\mathcal{P}_n(\cos\theta)$, polinomul lui *Legendre*, care este funcţie exclusivă a distanţei polare θ (complementul latitudinei) sau a lui ξ. Axa Oz este o axă de simetrie pentru $\mathcal{P}_n$.

Să luăm acum un nou sistem de coordonate polare cu polul în $P'(\theta'$ şi φ' fiind coordonate lui P' în primul sistem de coordonate, acela al polului P) (fig 38). Fie γ notaţia distanţei polare, care înlocueşte pe θ în noul sistem, şi să considerăm polinomului lui *Legendre* $\mathcal{P}_n(\cos\gamma)$ în raport cu axa de simetrie OP'. Acest polinom se va putea scrie în primul sistem de coordonate, folosind relaţia, relativ la triunghiul sferic $P'MP$,

$$\cos\gamma=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi'),$$

astfel :

$$\mathcal{P}_n{}^0[\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')],$$

unde coordonatele curente sunt θ și φ (iar θ', φ' doi parametri ce pot lua orice valori), în raport cu cari noua funcție nu este un polinom al lui *Legendre*, dar va continua a fi o funcție sferică de suprafață.

Să introducem acum exponențialele imaginare, scriind

$$P_n^0\left(\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\frac{e^{i\varphi-i\varphi'}+e^{-i\varphi+i\varphi'}}{2}\right),$$

unde P_n^0 continuă a fi o funcție sferică de suprafață în θ și φ fără a mai fi polinomul lui *Legendre*, căci axa de simetrie pentru această funcție nu mai este axa coordonată Oz corespunzătoare.

Să punem

$$\frac{\sin\theta' e^{i\varphi'}}{2} = i\eta \qquad \frac{\sin\theta' e^{-i\varphi'}}{2} = i\zeta, \tag{41}$$

ζ și η fiind arbitrare (ca și θ' și φ'). Punând, ca și mai sus, $\cos\theta = \xi$ și observând că $\sin^2\theta = -4\zeta\eta$, $\cos^2\theta = 1 + 4\zeta\eta$, vom scrie mai departe

$$P_n^0\left[\xi\sqrt{1+4\zeta\eta} + \sqrt{\xi^2-1}\,(\zeta e^{i\varphi} + \eta e^{-i\varphi})\right].$$

Această expresie este o funcție sferică în ξ și φ ori care ar fi valoarea parametrilor η și ζ. Așa dar, ecuația diferențială în S_n va fi satisfăcută prin acest polinom în ξ și φ independent de η și ζ, deci și pentru $\eta = 0$, fără ca neapărat să avem și $\zeta = 0$ [cum ar rezulta din schimbarea de parametri (41)].

Or, pentru valoarea parametrică $\eta = 0$, funcțiunea sferică în chestiune (simetrică în raport cu polul P' dar exprimată în coordonatele ξ și φ relative la polul P, deci nu ca polinom al lui *Legendre*), ia forma:

$$P_n^0\left[\xi + \zeta e^{i\varphi}\sqrt{\xi^2-1}\right].$$

Să desvoltăm această expresie după formula lui *Mac-Laurin* de forma $f(\xi+h)$, desvoltare limitată, căci P_n^0 este un polinom de gradul n în ξ sau în h, deci în ζ. Vom avea polinomul în $h = \zeta e^{i\varphi}\sqrt{\xi^2-1}$:

$$P_n^0\left[\xi + \zeta e^{i\varphi}\sqrt{\xi^2-1}\right] = P_n^0(\xi) + \zeta e^{i\varphi}\sqrt{\xi^2-1}\,\frac{dP_n^0(\xi)}{d\xi} + \ldots$$

$$+ \frac{\zeta^s e^{is\varphi}}{s!}(\xi^2-1)^{\frac{s}{2}}\,\frac{d^s P_n^0(\xi)}{d\xi^s} + \ldots + \frac{\zeta^n e^{in\varphi}}{n!}(\xi^2-1)^{\frac{n}{2}}\,\frac{\partial^n P_n^0(\xi)}{d\xi^n}.$$

Cum această expresie este o funcție sferică, oricare ar fi ζ, urmează ca și fiecare termen al desvoltării, în care multiplicatorul $\frac{\zeta^s}{s!}$ trebue privit ca o constantă, să fie sferică. Găsim astfel următoarele $n+1$ funcții sferice, inclusiv prima pe care o cunoaștem, ca atare:

$$P_n^0,\ \sqrt{\xi^2-1}\frac{dP_n^0}{d\xi}e^{i\varphi},\ \ldots,(\xi^2-1)^{\frac{s}{2}}\frac{d^sP_n^0}{d\xi^s}e^{is\varphi},\ \ldots,(\xi^2-1)^{\frac{n}{2}}\frac{dP_n^0}{d\xi^n}e^{in\varphi}.$$

Dar și la schimbarea lui φ în $-\varphi$ vom avea deasemenea funcțiuni sferice, deoarece ecuația diferențială generală în S_n nu se schimbă atunci când punem $-\varphi$ în loc de φ. Obținem astfel încă n funcțiuni sferice liniar independente, pe care le-am fi obținut și altfel, urmând aceeași cale ca mai sus, însă cu $\zeta=0$ și $\eta\neq 0$:

$$\sqrt{\xi^2-1}\frac{dP_n^0}{d\xi}e^{-i\varphi},\ \ldots,\ (\xi^2-1)^{s/2}\frac{d^sP_n^0}{d\xi^s}e^{-is\varphi},\ \ldots,(\xi^2-1)^{\frac{n}{2}}\frac{dP_n^0}{d\xi^n}e^{-in\varphi}.$$

Prin adunarea și scăderea lor două câte două, spre a elimina imaginarele, obținem următorul ansamblu de $2n+1$ funcțiuni sferice independente:

$$\left.\begin{aligned} &P_n^0,\ldots,(\xi^2-1)^{s/2}\frac{d^sP_n^0}{d\xi^s}\cos s\varphi,\ldots\\ &\ldots,(\xi^2-1)^{s/2}\frac{d^sP_n^0}{d\xi^s}\sin s\varphi,\ldots\end{aligned}\right\} \qquad (42)$$

In felul acesta se găsesc explicitate cele $2n+1$ funcțiuni sferice de suprafață (numite și funcțiuni *Legendre*) de ordinul n liniar independente (25), funcția P_n^s din ansamblul (25) fiind:

$$P_n^s=k(\xi^2-1)^{s/2}\frac{d^sP_n^0}{d\xi^s}=k(-1)^{s/2}(1-\xi^2)^{s/2}\frac{d^sP_n^0}{d\xi^s}.$$

Așa dar, toate polinoamele P_n^s sunt exprimate în funcție de $P_n^0\equiv P_n$, care are deci un caracter fundamental.

Dacă s este par, P_n^s este un polinom în ξ, iar dacă este impar, P_n^s este produsul unui polinom în ξ cu $\sqrt{1-\xi^2}$.

Dacă dăm lui k valoarea cea mai simplă 1, avem

$$P_n^s(\xi)=(1-\xi^2)^{s/2}\frac{d^sP_n^0}{d\xi^s}. \qquad (43)$$

BIBLIOTECA CENTRALĂ UNIVERSITARĂ

Dând lui s valorile $1,2,\ldots,n$, obținem cele n polinoame $\mathcal{P}_n^s$. Polinomul $\mathcal{P}_n^0 \equiv \mathcal{P}_n$ are toate rădăcinile sale cuprinse între -1 și $+1$. Polinomul $\mathcal{P}_n^s$ admite evident rădăcinile $\xi=1$ și $\xi=-1$, iar toate celelalte rădăcini ale sale sunt cuprinse între -1 și $+1$.

l) **Găsirea pe cale directă a soluțiilor de prima și de a doua speță ale ecuației diferențiale generale de indice n întreg.**

Dacă ne mărginim la soluțiile ecuației diferențiale generale în S_n cu n întreg, care sunt funcțiuni finite și uniforme de φ, putem să ne închipuim o asemenea funcție desvoltată în o serie de termeni ce depind de $\cos s\varphi$, respectiv de $\sin s\varphi$. Dacă această desvoltare este valabilă pentru întreaga sferă (φ dela 0 la 2π), putem admite după teorema lui *Fourier* că valorile lui s sunt numere întregi. Ecuația diferențială, care va fi satisfăcută de fiecare din acești termeni, va fi evident de forma (dubla derivare în raport cu φ a unui astfel de termen îl reproduce cu semn schimbat):

$$\frac{d}{d\xi}\left[(1-\xi^2)\frac{dS_n}{d\xi}\right]+\left[n(n+1)\frac{s^2}{1-\xi^2}\right]S_n=0. \qquad (44)$$

Dacă punem $S_n=(1-\xi^2)^{s/2}v$, ecuația (29.1) devine:

$$(1-\xi^2)\frac{d^2v}{d\xi^2}-2(s+1)\xi\frac{dv}{d\xi}+(n-s)(n+s+1)v=0,$$

sub care formă se pretează la integrare prin serie.

Se obține astfel, analog ca în cazul ecuației zonale, dacă lăsăm provizoriu de o parte factorul $\cos s\varphi$, respectiv $\sin s\varphi$, independent de ξ:

$$\left.\begin{aligned} S_n = A(1-\xi^2)^{s/2}\left[1-\frac{(n-s)(n+s+1)}{1.2}\xi^2\right.\right.\\ \left.+\frac{(n-s-2)(n-s)(n+s+1)(n+s+3)}{1.2.3.4.}\xi^4-\ldots\right]\\ +B(1-\xi^2)^{s/2}\left[\xi-\frac{(n-s-1)(n+s+2)}{1.2.3}\xi^3\right.\\ \left.\left.+\frac{(n-s-3)(n-s-1)(n+s+2)(n+s+4)}{1.2.3.4.5}\xi^5-\ldots\right]\right\} \qquad (45)\end{aligned}$$

În notația hipergeometrică aceasta se scrie:

$$S_n = (1-\xi^2)^{s/2}\left[AF\left(\frac{s-n}{2}, \frac{1+s}{2}+\frac{n}{2}, \frac{1}{2}, \xi^2\right) + BF\left(\frac{1+s-n}{2}, \frac{1+s+n}{2}, \frac{3}{2}, \xi^2\right)\right], \quad (46)$$

Aceste serii sunt convergente dacă $\xi^2<1$. Cum însă avem în toate cazurile

$$\gamma-\alpha-\beta=-s$$

și deci nu avem

$$\gamma>\alpha+\beta,$$

seriile, la limitele $\xi=\pm 1$, devin infinite ca $(1-\xi^2)^{-s}$, dacă nu se rup în polinoame. Prima din aceste serii se rupe dacă $n-s$ este un număr *par*, iar a doua dacă este *impar*. Prin ordonarea în puteri descrescânde, aceste două soluțiuni finite se pot exprima printr'o formulă comună:

$$P_n^s(\xi) = \frac{(2n)!}{2^n(n-s)!\,n!}(1-\xi^2)^{s/2}\left\{\xi^{n-s} - \frac{(n-s)(n-s-1)}{2.(2n-1)}\xi^{n-s-2} + \frac{(n-s)(n-s-1)(n-s-2)(n-s-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)}\xi^{n-s-4} - \ldots\right\} \quad (47)$$

Comparând cu (35), obținem:

$$P_n^s(\xi) = (1-\xi^2)^{s/2}\,\frac{d^s P_n(\xi)}{d\xi^s}, \quad (47.1)$$

iar dacă comparăm cu (35,6):

$$P_n^s(\xi) = \frac{1}{2^n.n!}(1-\xi^2)^{s/2}\,\frac{d^{n+s}(\xi^2-1)^n}{d\xi^n} = \frac{(-1)^n}{2^n.n!}(1-\xi^2)^{s/2}\,\frac{d^{n+s}(1-\xi^2)^n}{d\xi^n}. \quad (47.2)$$

Se poate de altfel ușor verifica că această expresie este o soluție a ecuației diferențiale (39,2).

O formulă în $\sin\frac{\theta}{2}$, analoagă cu (37), din care de altfel ea se poate deduce, este

$$P_n^s(\cos\theta) = \frac{(n+s)!}{2^s(n-s)!\,s!}\sin^s\theta\left\{1 - \frac{(n-s)(n+s+1)}{1.(s+1)}\sin^2\frac{\theta}{2} + \frac{(n-s-1)(n-s)(n+s+1)(n+s+2)}{1.2.(s+1)(s+2)}\sin^4\frac{\theta}{2} - \ldots\right\} \quad (48)$$

Cum am lăsat de o parte provizoriu factorii $\cos s\varphi$ și $\sin s\varphi$, soluția generală a ecuației în S, dedusă din combinarea liniară a celor $2n+1$ rădăcini, polinoame liniar independente, adică soluția generală de prima speță, este

$$S_n = A_0 P_n(\xi) + \sum_{s=1}^{n}(A_s\cos s\varphi + B_s\sin s\varphi)\,P_n^s(\xi). \quad (49)$$

Pentru motivele ce vom vedea, termenii armonici, cari conțin pe φ, se numesc funcțiuni *teserale*, cu excepția ultimilor doi cu $s=n$, cari se numesc *sectoriale*. Și primul termen poate intra în sumă, scrisă $\sum_0^n$, căci pentru $s=0$ avem $\cos s\varphi = 1$ și $B_0\sin n\varphi = 0$.

Soluția de a doua speță a ecuației (29), cu n număr întreg, poate fi adusă la forma analoagă:

$$S_n = \sum_{s=0}^{n}(A_s\cos n\varphi + B_s\sin s\varphi)\,Q_n^s(\xi),$$

unde:

$$Q_n^s(\xi) = (1-\xi^2)^{s/2}\frac{d^sQ_n(\xi)}{d\xi^s},$$

funcțiune numită teserală de *a doua speță*, care însă nu rămâne finită pe întreaga sferă unitară.

m) **Funcțiuni polinome sferice de suprafață zonale, sectoriale, teserale.**

1) Polinomul $P_n^0(\xi) \equiv P_n(\xi)$, egalat cu 0, dă rădăcini (*Null-stellen*) cuprinse, precum am spus, între -1 și $+1$. Fie ξ_1 una din ele. Toate punctele de pe sferă cu $\cos\theta = \xi_1$ dau un cerc mic cu polul în P, putându-se spune că o rădăcină ξ_1 reprezintă un cerc. Toate rădăcinile lui $P_n^0 \equiv P_n$, care este de gradul n, determină, așa dar, n cercuri mici ale sferei, împărțind-o în zone. Acesta este motivul pentru care funcțiunile P_n^0 (polinoamele lui *Legendre*) s'au numit *funcțiuni zonale*.

2) Funcțiunile sferice $\mathcal{P}_n^n(\xi)\cos n\varphi$ și $\mathcal{P}_n^n(\xi)\sin n\varphi$, egalate cu 0, cum $\mathcal{P}_n^n(\xi)$ comportă un factor constant (derivata de ordinul $2n$ a unui polinom de gradul $2n$), dau loc la următoarele relații:

$$C(1-\xi^2)^{\frac{n}{2}}\cos n\varphi = 0 \quad \text{și} \quad C'(1-\xi^2)^{\frac{n}{2}}\sin n\varphi = 0,$$

Valorie $\xi \equiv \cos\theta = \pm 1$ reprezintă polii, iar cele n valori ale lui φ cari anulează pe $\cos n\varphi$ sau pe $\sin n\varphi$, reprezintă n meridiane echidistante. Așa dar, zerurile celor două funcțiuni în chestiune reprezintă pe sfera unitară meridiane, împărțind-o în secțoare, și de aceea aceste funcțiuni au fost numite *secțoriale*.

3) Dând lui s valori cuprinse între 0 și n, cele $2n-2$ funcții corespunzătoare, egalate cu zero, dau $2n-2$ ecuații, ale căror zeruri reprezintă în același timp meridiane și paralele, împărțind suprafața sferei în patrulatere curbilinii. Aceste funcțiuni s'au numit, pentru acest motiv, *teserale* ($\tau\varepsilon'\sigma\varepsilon\rho\alpha$ = patru).

Așa dar, din funcțiile sferice de suprafață (funcțiile lui *Laplace*) cele $2n+1$ polinoame liniar independente de gradul n (funcțiunile lui *Legendre*) se pot considera, din punctul arătat de vedere, ca fiind compuse din o funcție *zonală*, 2 *secțoriale* și $2n-2$ *teserale*.

In rezumat, în cele ce preced s'au considerat mai întâiu polinoamele în x, y, z (de spațiu) *omogene* și *armonice* de gradul n, găsindu-se că există $2n+1$ asemenea polinoame liniar independente (dintre cari unul, cu aproximația unui factor constant este polinomul lui *Legendre* de gradul n), polinomul cel mai general fiind de forma:

$$P_n = \lambda_{n,1}P_{n,1} + \lambda_{n,2}P_{n,2} + \ldots \lambda_{n,2n+1}P_{n,2n+1}.$$

Un exemplu de asemenea polinoame a fost găsit în cele $2n+1$ derivate parțiale ale funcțiuni $\frac{1}{r}$ din tabloul (26), înmulțite respectiv cu r^{2n+1}.

Aceste polinoame, fiind exprimate în coordonate polare

$$P_n(x, y, z) = r^n S_n(\theta, \varphi),$$

s'a căutat soluția ecuației lui *Laplace* $\Delta P_n = 0$ și s'a făcut constatarea importantă, că această ecuație admite soluții de forma:

$$P_n = r^n f(\theta)\, g(\varphi), \qquad (50)$$

unde $f(\vartheta)$ este un polinom în $\sin\vartheta$ și $\cos\vartheta$, iar $g(\varphi)$ un polinom în $\sin\varphi$ și $\cos\varphi$, existând $2n+1$ asemenea soluțiuni distincte.

n) **Căutarea soluțiilor de forma $f(\vartheta)g(\varphi)$.**

Pe baza constatării de mai sus, se poate face acum studiul funcțiunilor sferice de suprafață, căutând soluțiuni ale ecuației $\Delta P_n = 0$ cu P_n de forma (50). In ecuația în $S_n(\vartheta,\varphi)$, substituind acestei funcțiuni sferice de suprafață expresia $f(\vartheta)g(\varphi)$, găsim:

$$n(n+1)f(\xi)g(\varphi) + g(\varphi)\frac{d}{d\xi}\left[(1-\xi^2)f'(\xi)\right] + \frac{1}{1-\xi^2}g''(\varphi)f(\xi) = 0.$$

Separația variabilelor dă:

$$-\frac{g''(\varphi)}{g(\varphi)} = n(n+1)(1-\xi^2) + \frac{1-\xi^2}{f(\xi)}\frac{d}{d\xi}\left[(1-\xi^2)f'(\xi)\right].$$

Cum ξ și φ sunt independente, relația aceasta nu poate exista, decât dacă ambii membri sunt constanți (egali cu aceași constantă arbitrară). Vom avea atunci pentru determinarea lui $g(\varphi)$ ecuația cu o constantă arbitrară k:

$$g''(\varphi) - kg(\varphi) = 0. \qquad (51)$$

Pe de altă parte $g(\varphi)$ fiind un polinom de gradul n (neomogen) în $\cos\varphi$ și $\sin\varphi$ sau în $e^{i\varphi}$ și $e^{-i\varphi}$, vom scrie:

$$g(\varphi) = \sum_{s=0}^{n} A_s \cos s\varphi + B_s \sin s\varphi\,. \qquad (51.1)$$

Fiecare termen al derivatei a doua va reproduce termenul corespunzător din $g(\varphi)$, înmulțit cu $-s^2$, (51) devenind:

$$\sum_{s=0}^{n}\left[A_s(s^2+k)\cos s + B_s(s^2+k)\sin s\varphi\right] = 0. \qquad (51.2)$$

Pentru ca această ecuație însă să se verifice pentru orice valoare a lui φ, trebue ca toți coeficienții $A_s(s^2+k)$ și $B_s(s^2+k)$ să fie nuli, ceeace implică fie ca A_s și B_s să fie separat nuli, fie ca constanta k să fie aleasă egală succesiv cu câte o valoare a lui $-s_1^2$, în care caz A_{s_1} și B_{s_1} pot fi diferiți de zero, toți ceilalți A_s și B_s trebuind să fie nuli, astfel că suma (51.1) se reduce de fiecare dată numai la termenul:

$$g(\varphi) = A_s \sin s\varphi + B_s \sin s\varphi,$$

unde s poate lua toate valorile particulare $0, 1, \ldots, n$.

În ceeace privește ecuația în ξ, ea admite ca soluție un polinom în ξ sau un asemenea polinom înmulțit cu $\sqrt{1-\xi^2}$. Se regăsește astfel:

$$(A_s \cos s\varphi + B_s \sin s\varphi) P_n^s(\xi)$$

și prin urmare funcția S_n cea mai generală va fi (49):

$$S_n = \sum_{s=0}^{n} (A_s \cos s\varphi + B_s \sin s\varphi) P_n^s(\xi)$$

cu $2n+1$ coeficienți arbitrari $A_0, \ldots, A_n$ și $B_1, \ldots, B_n$.

o) Proprietăți integrale ale funcțiunilor sferice de suprafață (Laplace), cari sunt funcțiuni Legendre.

1) Pentru două funcțiuni cu indici n, n' diferiți se poate arăta că vom avea pe suprafața sferică unitară:

$$\oint S_n S_{n'} d\sigma = \oint S_n S_{n'} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = \int_{-1}^{+1} d\xi \int_0^{2\pi} S_n S_{n'} \, d\varphi = 0, \quad (52)$$

cu $\cos\theta = \xi$, $-\sin\theta \, d\theta = d\xi$, ceeace se exprimă, spunând că funcțiunile S_n sunt *ortogonale* (ca și funcțiile $\cos s\varphi$, $\sin s\varphi$).

Într'adevăr, după teorema lui *Green* vom avea la o sferă de rază r oarecare, cu centrul în origină:

$$\int (P_n \Delta P_{n'} - P_{n'} \Delta P_n) \, d\tau = \oint \left(P_n \frac{dP_{n'}}{dn_e} - P_{n'} \frac{dP_n}{dn_e} \right) d\sigma, \quad (53)$$

unde n_e este normala exterioară sferei r, și cum $\Delta P_n = 0$ și $\Delta P_{n'} = 0$, trecând la coordonate polare, în cari

$$P_n = r^n S_n(\theta, \varphi) \quad \text{și} \quad P_{n'} = r^{n'} S_{n'}(\theta, \varphi);$$

deci

$$\frac{dP_n}{dn_e} = \frac{\partial P_n}{dr} = n r^{n-1} S_n, \qquad \frac{dP_{n'}}{dn_e} = \frac{\partial P_{n'}}{dr} = n' r^{n'-1} S_{n'},$$

și substituind în (53), obținem:

$$0 = (n - n') r^{n+n'-1} \oint S_n S_{n'} \, d\sigma,$$

și deci integrala este nulă.

Pentru polinoamele lui *Legendre* vom scrie:

$$\int_{-1}^{+1} P_n(\xi) P_{n'}(\xi) \, d\xi = 0.$$

și, drept corolar, ținând seamă că $P_0(\xi)=1$ și luând $n'=0$

$$\int_{-1}^{+1} P_n(\xi)d\xi=0.$$

Dacă luăm acum două funcții sferice *Legendre* de același indice și calculăm integrala analoagă cu (52), observăm că avem $2n+1$ funcții sferice liniar independente de ordinul n, în forma:

$$P_n^s \cos s\varphi \quad \text{și} \quad P_n^s \sin s\varphi$$

și, fie că aceste funcții diferă prin indicele s fie că ele diferă prin felul liniei trigonometrice ($\cos$ și $\sin$), vom avea și atunci o integrală de suprafață (52) nulă, căci în primul caz ($s\neq s'$)

$$\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta\, P_n^s P_n^{s'} \int_0^{2\pi} \cos s\varphi \cos s'\varphi=0,$$

iar în al doilea

$$\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta\, (P_n^s)^2 \int_0^{2\pi} \cos s\varphi \sin s\varphi\, d\varphi=0,$$

din cauza nulității în ambele cazuri a integralei dela coadă.

Singurele integrale (52) diferite de zero vor fi acele de tipul

$$\oint^{\sigma} S_n^2 d\sigma,$$

din cauza că ele conțin termeni ca (la care se reduc):

$$I_n^s=\int_{-1}^{+1}(P_n^s)^2 d\xi \int_0^{2\pi} \cos^2 s\varphi\, d\varphi=\pi\int_{-1}^{+1}(P_n^s)^2\, d\xi=\frac{(n+s)!}{(n-s)!}\frac{2\pi}{2n+1}$$

iar pentru $s=0$

$$I_n^0=\frac{2\pi}{2n+1},$$

întru cât avem:

$$\int_{-1}^{+1}(P_n^s)^2 d\xi=\frac{(n+s)!}{(n-s)!}\frac{2}{2n-1} \quad \text{și} \quad \int_{-1}^{+1}(P_n)^2 d\xi=\frac{2}{2n+1}.$$

Același lucru pentru $P_n^s \sin s\varphi$.

p) **Desvoltarea unei funcții cu două variabile în serie de funcții sferice Laplace.**

Știm că în anumite condiții, o funcție $f(\varphi)$ se poate descompune în serie trigonometrică (*Fourier*) sub forma:

$$f(\varphi)=a_0+a_1\cos\varphi+b_1\sin\varphi+\ldots$$

Avem astfel în plan o funcție a poziției unui punct pe o circonferință. Analog, dacă avem o funcție de două variabile $f(\theta,\varphi)$, cu θ între 0 și π și cu φ între 0 și 2π, se poate spune că f este o funcție a poziției unui punct pe o sferă, căci la orice poziție a punctului, corespunde o valoare a lui θ și o valoare a lui φ. Invers, la orice pereche de valori θ, φ corespunde un punct al sferei.

In anumite condiții se poate desvolta funcția f în o serie de funcții S_n, scriind:

$$f(\theta,\varphi) = S_0 + S_1 + \ldots + S_n(\theta,\varphi), \qquad (54)$$

unde:

$$S_n(\theta,\varphi) = \sum_{s=1}^{n} (A_n^s \cos s\varphi + B_n^s \sin s\varphi) \mathcal{P}_n^s. \qquad (54.1)$$

Prima demonstrație a acestei desvoltări a fost dată de *Lejeune Dirichlet* în cazul simplu când f este continuu. *Bonnet* și *Dini* au dat desvoltări valabile în cazuri mai întinse, când f admite pe sferă un număr finit de discontinuități. In fine *Darboux* a studiat cazul când funcția devine infinită pe sferă, într'un număr finit de puncte.

Determinarea coeficienților, în cazul când funcția este finită și continuă peste tot, nu prezintă dificultăți. Se poate vedea ușor că, odată desvoltarea admisă, nu poate exista de cât un singur șir de coeficienți A_n^s, B_n^s.

Intradevăr să presupunem că avem desvoltarea (54). Pentru a determina coeficientul A_n^s, să înmulțim ambii membri ai egalității precedente, cu $\mathcal{P}_n^s \cos s\varphi$; vom avea

$$f(\theta,\varphi)\,\mathcal{P}_n^s \cos s\varphi = \mathcal{P}_n^s \cos s\varphi\,(S_0 + S_1 + \ldots + S_n + \ldots)$$

și, integrând pe sferă,

$$\iint f(\theta,\varphi)\,\mathcal{P}_n^s \cos s\varphi \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = A_n^s I_n^s = A_n^s \frac{(n+s)!}{(n-s)!}\frac{2\pi}{2n+1}.$$

In același mod se obține B_n^s.

Procedeul este analog cu acela pentru aflarea coeficienților la o desvoltare în serie Fourier și se bazează pe proprietatea *ortogonalității* funcțiunilor respective.

In analiză se arată că desvoltarea este convergentă și că ea reprezintă funcția dată.

În caz de simetrie în jurul axei Oz vom scrie ($A_n^0 \equiv C_n$)

$$f(\xi) = C_0 + C_1 \mathcal{P}_1(\xi) + C_2 \mathcal{P}_2(\xi) + \ldots + C_n \mathcal{P}_n(\xi) + \ldots$$

Dacă înmulțim ambii membri cu $\mathcal{P}_n(\xi)\, d\xi$ și integrăm între -1 și $+1$, găsim (ținând seamă că $\int_{-1}^{+1} \mathcal{P}_n(\xi)\, d\xi = 0$):

$$C_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} f(\xi)\, d\xi$$

și în general

$$C_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{+1} f(\xi)\, \mathcal{P}_n(\xi)\, d\xi.$$

Motivele fizice pentru utilizarea posibilității unor asemenea desvoltări se va vedea la tratarea diverselor probleme.

Aplicația Nr. 40. *Problema lui Dirichlet pentru sferă.* a) *Să căutăm în interiorul sferei de rază 1 o funcție* Φ_i *finită, continuă și armonică, care la suprafață să aibă valorile unei anumite funcțiuni* $\Phi_0(\theta,\varphi) = S(\theta,\varphi)$.

Soluție. Aceasta corespunde (vezi Cap. V) mișcării rezultată prin aplicarea, pe suprafața sferei, de presiuni de impulsie $-\Phi_0$ repartizate pe sfera fluidă, inițial în repaus.

Să desvoltăm pe Φ_0 de pe suprafață în o serie de funcțiuni sferice *Laplace*, oteză că Φ, îndeplinește condițiile cerute de această dsevoltare:

$$\Phi_0 = S_0 + S_1 + \ldots S_n + \ldots$$

Soluția problemei va fi dată de funcția armonică de *a doua categorie* (adică u puteri pozitive de r):

$$\Phi_i = S_0 + r S_1 + \ldots + r^n S_n + \ldots$$

e:

Intradevăr, r fiind < 1 în interior, seria va fi a fortiori convergentă în interior, și cum fiecare termen este un polinom armonic, vom avea pentru ‘icate punctele $\Delta\Phi_i = 0$.

In cazul sferei de rază a, reducem problema la sfera unitară, luând pe a drept unitate, sau tratăm problema ca mai jos.

b) A se rezolva problema lui Dirichlet deasemenea și pentru exterior, în sensul de a găsi o funcție Φ_e, *care pe sferă să se reducă la* Φ_0, *în exterior să fie finită, continuă și armonică, iar la* ∞ *să tinză spre zero ca* $\frac{1}{r}$.

Soluție. Aceasta corespunde mișcării produse prin aplicarea pe suprafața unei sfere goale, înconjurată de fluid în repaus, a anumitor presiuni de impulsie $-\Phi_0$, repartizate.

Pentru a rezolva această problemă, este suficient a observa (*W. Thomson*), ă ecuația, care definește pe S_n, nu se schimbă atunci când schimbăm pe n în

$-(n+1)$. Cum $r^n S_n$ este o funcție armonică de a doua categorie, $r^{-(n+1)} S_n$ va fi de asemenea armonică însă de prima categorie (cu puteri negative de r).

Dacă pe sferă se dă Φ_0, vom avea în exterior:

$$\Phi_e = \frac{S_0}{r} + \frac{S_1}{r^2} + \dots \frac{S_n}{r^{n+1}}$$

Toți termenii sunt armonici, iar la ∞ partea principală este $\frac{S_0}{r}$, care descreşte ca $\frac{1}{r}$.

Pentru cazul când raza sferei în loc de 1 este a, repetăm observația de mai sus.

Putem totuşi, în ambele calcule ce preced, să introducem dela început pe a, în cazul când Φ_a este dat pe sfera de rază a, scriind atunci:

$$\Phi_a = S_0 + S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots$$

unde:

$$S_n = A_0 \mathcal{P}_n(\xi) + \sum_{s=1}^{n} (A_s \cos s\varphi + A_s \sin s\varphi) \mathcal{P}_n^s(\xi).$$

întrucât Φ_a este funcție exclusivă de θ şi φ, cu $\cos\theta = \xi$.

În acest caz vom avea evident pentru spațiul interior sferei:

$$\Phi_i = S_0 + \frac{r}{a} S_1 + \frac{r^2}{a^2} S_2 + \dots + \frac{r^n}{a^n} S_n + \dots,$$

deoarece pentru $r = a$ expresia ia valoarea Φ_a, iar pentru $r < a$, seria este convergentă.

Tot astfel pentru spațiul exterior vom avea:

$$\Phi_e = \frac{a}{r} S_0 + \frac{a^2}{r^2} S_1 + \dots \frac{a^{n+1}}{r^{n+1}} S_n + \dots,$$

termenii fiind funcțiuni sferice de spațiu de prima categorie.

Dacă unim aceste două rezultate, obținem cazul unui fluid indefinit, a cărui continuitate este întreruptă printr'un strat *gol*, infinit de subțire, în interiorul căruia acționează o presiune de impulsie repartizată $-\Phi_a$. Valorile lui Φ în acest strat sunt continue, dar componentele normale ale vitezei sunt pentru $r = a$ discontinue; întradevăr avem pentru fluidul interior:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \Sigma n \frac{S_n}{a},$$

iar pentru fluidul exterior:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = -\Sigma (n+1) \frac{S_n}{a}.$$

Mişcarea, aflât în interior cât şi în exteriorul stratului sferic menționat, se poate concepe ca fiind produsă printr'o repartizare de surse simple pe suprafața sferei şi anume cu densitatea de debit:

$$\Sigma (2n+1) \frac{S_n}{a}.$$

Aplicația Nr 41. *Problema lui Neumann pentru sferă.*

Aci se cere ca, valorile $\frac{\partial\Phi}{\partial r}$ *pe sfera de rază a fiind* $g(\theta,\varphi)$ *date, să se găsească funcția de viteză și în exterior.*

Soluție. Vom scrie și aci:

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)_{r=a} \equiv g(\theta,\varphi) = S_1+S_2+\ldots+S_n+\ldots \qquad (55)$$

fără termenul constant S_0, deoarece în cazul fluidelor incompresibile avem, pe o suprafață închisă ca aci:

$$\oint^{\sigma}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)_{r=a} d\sigma \equiv \oint^{\sigma} g(\theta,\varphi)\, d\sigma = 0. \qquad (55.1)$$

Valoarea lui Φ pentru interiorul sferei va avea forma, în funcțiune sferică de spațiu de a doua categorie:

$$\Phi_i = C_1 r S_1 + C_2 r^2 S_2 + \ldots + C_n r^n S_n + \ldots,$$

deoarece, după valoarea ce rezultă pentru coeficienții C_n, această funcțiune este finită, apoi ea este continuă și satisface ecuația $\Delta\Phi = 0$.

Constanta C_n se determină astfel ca $\frac{\partial\Phi}{\partial r}$ să primească valorile prescrise în (55). Derivând obținem anume:

$$n C_n a^{n-1} = 1,$$

de unde

$$C_n = \frac{1}{n a^{n-1}}$$

și deci

$$\Phi_i \; a \sum \frac{1}{n}\frac{r^n}{a^n} S_n = a\left(\frac{r}{a}S_1 + \frac{1}{2}\frac{r^2}{a^2}S_2 + \ldots + \frac{1}{n}\frac{r^n}{a^n}S_n + \ldots\right),$$

de unde se vede deasemenea, că valoarea $n = 0$ trebuia dela început exclusă.

Soluția pentru exterior se găsește pe aceeași cale, întrebuințând o desvoltare în funcțiuni sferice de a doua categorie:

$$\Phi_e = C_1\frac{1}{r}S_1 + C_2\frac{1}{r^3}S_2 + \ldots + C_n\frac{1}{r^{n+1}}S_n + \ldots$$

Derivând și identificând cu (55), obținem pentru termenul în $\frac{1}{r^{n+1}}$:

$$-(n+1)\, C_n \frac{1}{a^{n+2}} = 1,$$

de unde

$$C_n = -\frac{a^{n+2}}{n+1}$$

BCU ALEXANDRU CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

și deci

$$\Phi_e = -a\sum \frac{1}{n+1}\frac{a^{n+1}}{r^{n+1}} S_n .$$

Unind cele două rezultate, obținem mișcarea, care s'ar produce într'un fluid indefinit, despărțit printr'o membrană sferică de rază a, imprimându-se în fiecare punct al membranei o vitesă prescrisă de (55), care să asculte de condiția de continuitate (55.1).

La străbaterea membranei în chestiune există continuitate pentru vitesa normală, însă Φ sare dela

$$a\sum \frac{S_n}{n} \text{ la } -a\sum \frac{S_n}{n+1},$$

astfel că componenta *tangențială* a vitesei este acum discontinuă. Atât mișcarea interioară cât și cea exterioară este constituită ca în cazul, când ele ar proveni dintr'un strat de dubleuri cu o densitate de moment:

$$-a\sum \frac{2n+1}{4\pi(n+1)} S_n .$$

Energia cinetică a fluidului din interiorul sferei este dată de formula (pag. 122).

$$2T = \rho \oint^{\sigma} \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial r} d\sigma = \rho a^3 \sum \frac{1}{n} \oint^{\sigma=4\pi} S^2_n \, d\omega,$$

dispărând integralele cu produse de funcțiuni *Laplace* de ordin diferit, din cauza ortogonalității (vezi pag. 201).

Energia cinetică a fluidului din exteriorul sferei va fi dată de expresia:

$$2T = \rho \oint^{\sigma} \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} d\sigma = -\rho \oint^{\sigma} \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial r} d\sigma = \rho a^3 \sum \frac{1}{n+1} \oint^{\sigma=4\pi} S^2_n \, d\omega.$$

g) Tratarea ecuației zonale cu ajutorul cantităților complexe.

S'au studiat până acum funcțiunile sferice de suprafață, cu variabila reală ξ. Trecând la *complex*, vom arăta expresiuni integrale ale acestor funcțiuni, căutând și celelalte soluțiuni ale ecuației diferențiale și totodată eliberând parametrul ν de restricția de a fi un număr întreg n.

Am văzut că polinomul (35), care după (30,1) se scrie:

$$P_n(\xi) = \frac{(-1)^n}{n!} r^{n+1} \frac{\partial^n \frac{1}{r}}{\partial z^n}$$

se mai poate scrie după (35,6):

$$\mathcal{P}_n(\xi) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\xi^n} (\xi^2 - 1)^n. \qquad (56)$$

De altfel se constată că expresia:

$$\frac{d^n (\xi^2 - 1)^n}{d\xi^n}$$

satisface ecuația diferențială a funcțiunilor zonale (29), iar comparația termenilor în ξ^n din formulele (35) și (57) ne convinge despre identitatea coeficienților numerici.

Trecând la *complex*, formula lui *Cauchy* permite să scriem, relativ la un contur C închis, care înconjoară odată punctul $t = \xi$:

$$(\xi^2 - 1)^n = \frac{1}{2i\pi} \oint^C \frac{(t^2 - 1)^n}{t - \xi} dt, \qquad (57)$$

integrală atribuită lui *Schläfli* și care conduce la consecințe și generalizări importante.

Derivând ecuația (57) succesiv de n ori în raport cu ξ, rezultă că vom putea scrie (56):

$$\mathcal{P}^n(\xi) = \frac{1}{2^{n+1} i\pi} \oint^C \frac{(t^2 - 1)^n}{(t - \xi)^{n+1}} dt, \qquad (58)$$

formulă integrală (dată de *Schläfli*) și care satisface în consecință ecuația diferențială a funcțiunilor zonale (29,2). Dar aceasta se-

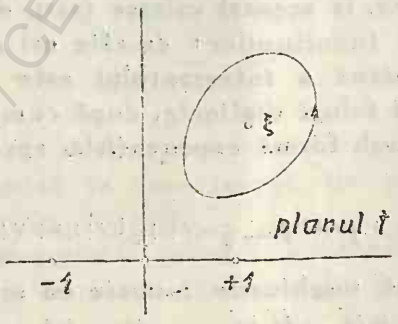


Fig. 39

poate constata și prin directa introducere a expresiei (58) în (29,2), în care caz obținem:

$$(1-\xi^2)S_n''-2\xi S_n'+n(n+1)S_n=\frac{n+1}{2^{n+1}i\pi}\oint^C\frac{d}{dt}\left[\frac{(t^2-1)^{n+1}}{(t-\mu)^{n+2}}\right]dt=0.$$

Ecuația diferențială este, așa dar, satisfăcută prin faptul că funcția de t

$$\frac{(t^2-1)^{n+1}}{(t-s)^{n+2}}$$

reia aceiași valoare la descrierea unui contur închis în jurul punctului $t=\xi$, întrucât n a fost presupus număr întreg.

r) **Funcțiunile lui Laplace de prima și a doua speță. Formulele Laplace-Jacobi.**

Dacă în locul cazului particular cu $\nu=n$ întreg, considerăm cazul general cu ν oarecare, calculul poate primi deasemenea o interpretare. S'a văzut că o funcție definită prin integrala (58), scrisă :

$$P_\nu(\xi)=\frac{1}{2^{\nu+1}i\pi}\oint^C\frac{(t^2-1)^\nu}{(t-\xi)^{\nu+1}}dt, \qquad (58.1)$$

este o soluție a ecuației zonale, de câte ori conturul C poate fi ales astfel, ca expresia :

$$\frac{(t^2-1)^{\nu+1}}{(t-\xi)^{\nu+2}}$$

să revină după descrierea completă a conturului, ca și în cazul lui n număr întreg, la aceeași valoare (sau, după limbajul întrebuințat în teoria funcțiunilor : de câte ori drumul de integrare pe foaia Riemaniană a integrantului este închis). Aceasta se poate face în două feluri distincte, după cum se vede, dacă scriem numita expresie sub formă exponențială, spre a pune în evidență argumentul ei :

$$|t-1|^{\nu+1}\,|t+1|^{n+1}\,t-\xi|^{-(\nu+2)}\,e^{i[(\nu+1)\alpha+(\nu+1)\alpha'-(\nu+2)\alpha'']}$$

unde $\alpha, \alpha', \alpha''$ sunt unghiurile formate cu semi-axa pozitivă reală de către vectorii $+\overline{1t}, -\overline{1t}, \overline{\xi t}$, socotite dela numita semiaxă, spre vectorii respectivi (pozitive în sensul trigonometric). Se vede de ex. că această condiție este îndeplinită, atunci când curba C înconjură odată, în sensul trigonometric, punctele $+1$ și ξ, cu

excluderea punctului -1 (Fig. 40), în care caz argumentul expresiei de mai sus este augmentat la închiderea conturului cu :

$$(\nu+1-\nu-2)\,2\pi=-2\pi,$$

ceeace evident nu modifică valoarea funcțiunei.

Același lucru se întâmplă dacă trasăm o curbă A (Fig. 41), care înconjură punctul $+1$ în sensul opus (deci conturul în formă de 8) cu excludrea punctului ξ, în care caz argumentul expresiei de mai sus rămâne nemodificat la închiderea conturului :

$$(\nu+1-\nu-1)\,2\pi = 0,$$

conducând la aceeași concluzie.

Se vede ușor că o curbă ce ar înconjura direct punctele -1 și ξ cu excluderea lui $+1$, se compune din o curbă de categoria

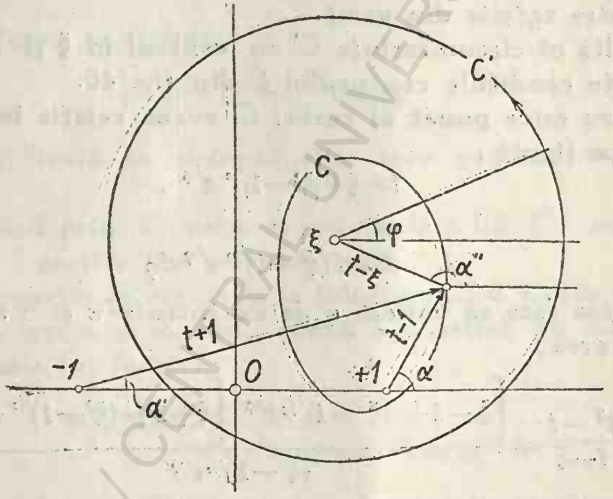


Fig. 40

C și o curbă, descrisă în sens invers, de categoria A, astfel că nu procură o soluție distinctă.

Curbele de categoria C procură soluțiuni, cari se numesc *funcțiuni Laplace de prima speță*, însemnându-se cu $\mathcal{P}_\nu(\xi)$, cuprinzând drept cazuri particulare *polinoamele și funcțiile Legendre* cu $\nu=n$ întreg. Curbele de categoria A corespund speței a doua de soluțiuni, care se înseamnă $Q_\nu(\xi)$ și cari, pentru $\nu=n$ întreg, ne dau funcțiunile particulare $Q_n(\xi)$, studiate mai sus.

Atât funcţiunile de prima speţă cât şi cele de a doua speţă, pentru ν diferind de orice număr întreg pozitiv sau negativ, nu pot fi în nici un caz polinoame.

1) *Forma integrală a funcţiunilor Laplace de prima speţă.*

Să presupunem că partea reală a lui ξ este pozitivă şi $\xi \neq 1$. In acest caz vom putea lua drept contur C, circumferinţa C' cu centrul în ξ şi raza $|\xi^2-1|^{1/2}$.

Se poate verifica uşor că avem :

$$|\xi-1|^2<|\xi^2-1|<|\xi+1|^2$$

Intradevăr inegalitatea :

$$|\xi-1|^2<|\xi+1|^2$$

rezultă din simplul aspect al figurii şi cum termenul intermediar este media geometrică a termenilor extremi, el va fi natural cuprins între aceştia din urmă.

Rezultă că circumferinţa C' cu centrul în ξ şi raza $|\xi^2-1|^{1/2}$ îndeplineşte condiţiile conturului C din fig. 40.

Pentru orice punct al curbei C' avem relaţia între vectori, evidentă pe figură :

$$t=\xi+|\xi^2-1|^{1/2}\, e^{i\varphi},$$

deci

$$dt=i\,(\xi^2-1)^{1/2}\, e^{i\varphi}\, d\varphi$$

şi vom putea face să varieze φ de ex. între $-\pi$ şi $+\pi$.

Vom avea :

$$\frac{t^2-1}{t-\xi}=\frac{\left[\xi-1+(\xi^2-1)^{1/2}e^{i\varphi}\right]\left[\xi+1+(\xi^2-1)^{1/2}\, e^{i\varphi}\right]}{(\xi^2-1)^{1/2}e^{i\varphi}}$$

$$=\left[(\xi-1)^{1/2}+(\xi+1)^{1/2}\, e^{i\varphi}\right]\left[(\xi-1)^{1/2}+(\xi+1)^{1/2}\, e^{-i\varphi}\right]$$

$$=2\left[\xi+(\xi^2-1)^{1/2}\cos\varphi\right]. \qquad (59)$$

Introducând această expresie în (58), obţinem formula, valabilă şi pentru $\xi=1$:

$$P_\nu(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}[\xi+(\xi^2-1)^{1/2}\cos\varphi]^\nu\, d\varphi.$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\xi+(\xi^2+1)^{1/2}\cos\varphi]^\nu\, d\varphi. \qquad (60)$$

Aceasta este formula lui *Laplace*, care pentru $\xi = 1$ dă $P_\nu(1)=1$, ca și în cazul polinoamelor lui *Legendre*.

Pentru a înlătura orice dubiu asupra determinațiilor funcțiilor multiforme ce intervin, vom conveni a lua pentru t *real* și >1:

$$\alpha \equiv arg\,(t-1)=0, \quad \alpha' \equiv arg\,(t+1)=0 \quad \text{și} \quad \alpha'' \equiv |\,arg\,(t-\xi)\,| < \pi.$$

In consecință, când punctul t este pe axa reală la dreapta punctului $t=1$, determinația cantității de sub semnul integralei:

$$\xi + (\xi^2-1)^{1/2} cos\,\varphi = \frac{1}{2}\,\frac{t^2-1}{t-\xi}$$

va avea drept argument, conform celor de mai sus:

$$-arg\,(t-\xi), \text{ deci } |arg\,(t-\xi)| < \pi.$$

Funcțiunea multiformă

$$[\xi + (\xi^2-1)^{1/2} cos\,\varphi]^\nu$$

este astfel fixată în determinația, care pentru $\varphi = \frac{\pi}{2}$ devine ξ^ν, înțelegând prin ξ^ν *valoarea principală* a lui ξ^ν, care în special pentru ξ pozitiv și ν real este reală.

Cum ecuația diferențială la înlocuirea lui ν prin $-(\nu+1)$ nu se schimbă, avem o a doua formă a ecuației lui *Laplace*, care poartă numele lui *Iacobi*:

$$P_\nu(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\varphi}{[\xi + (\xi^2-1)^{1/2} cos\,\varphi]^{\nu+1}}.$$

In fine, funcția $P_\nu(\xi)$ satisface formulele de recurență:

$$P'_{\nu+1}(\xi) - \xi\,P_\nu'(\xi) = (\nu+1)\,P_\nu(\xi)$$

$$(\nu+1)\,P_{\nu+1}(\xi) - \xi\,(2\nu+1)\,P_\nu(\xi) + \nu\,P_{\nu-1}(\xi) = 0.$$

2) *Funcțiunile Laplace de a doua speță.*

Spre completarea celor de mai sus, menționăm că ecuația diferențială:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(1-\xi)^2 \frac{\partial P_\nu}{\partial \xi}\right] + \nu(\nu+1)P_\nu = 0$$

trebue să admită și o a doua integrală, liniar independentă de cea de mai sus, anume funcțiunea *Laplace* de a doua speță, pe care o vom însemna cu $Q_\nu(\xi)$.

Ea se obține parcurgând o curbă A în formă de opt, ca în fig. 41. Această funcțiune, introducând pentru *normare* factorul $\frac{1}{\sin \nu\pi}$ (în ipoteza că ν nu este număr întreg, căci altfel factorul ar fi infinit), este:

$$Q_\nu(\xi) = \frac{1}{4\, i \sin \nu\pi} \oint^{A} \frac{1}{2^\nu} \frac{(t^2-1)^\nu}{(\xi-t)^{\nu+1}}\, dt$$

(*normarea* constă în a face ca $\int Q^2_\nu\, d\xi$ să fie egal cu 1).

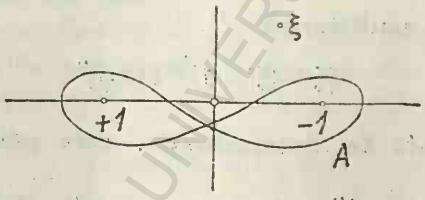


Fig. 41

În cazul când partea reală a lui $\nu+1$ este pozitivă, se poate scrie, după turtirea curbei de integrare pe segmentul drept $-1 \leq t \leq 1$:

$$Q_\nu(\xi) = \frac{1}{2^{\nu+1}} \int_{-1}^{+1} \frac{(1-t^2)^\nu}{(\xi-t)^{\nu+1}}\, dt,$$

formulă valabilă acum și pentru ν număr întreg. Pentru $\xi = 1$ Q_ν devine logaritmic infinit

$$\left(\int_{-1}^{1} \frac{(1+t)^\nu}{(1-t)}\, dt \right).$$

Pentru valori ν negative sau cu partea reală negativă, Q_ν se poate defini prin relația $Q_\nu(\xi) = Q_{-(\nu+1)}(\xi)$ și funcțiunile $Q_\nu(\xi)$ se pot pune sub formă analoagă ca integralele *Laplace-Iacobi* pentru $P_\nu(\xi)$, intervenind un cosinus hiperbolic în locul celui trigonometric.

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Dacă se pune, mai întâiu pentru $\xi > 1$

$$t = \frac{e^{\varphi}(\xi+1)^{1/2} - (x-1)^{1/2}}{e^{\varphi}(\xi+1)^{1/2} + (x-1)^{1/2}},$$

se obține după oarecari calcule:

$$Q_\nu(\xi) = \int_0^\infty \frac{d\varphi}{[\xi + (\xi^2-1)^{1/2}\cos h\varphi]^{\nu+1}},$$

fixându-se determinația integrantului multiform de mai sus. Aplicabilitatea acestei formule se extinde acum la orice valori ale lui ξ pe planul ξ, tăiat între -1 și $+1$, integrantul fiind în acest domeniu o funcțiune uniformă regulată de ξ.

Cu ajutorul relației $Q_\nu = Q_{-(\nu+1)}$ se obține și cealaltă formă integrală:

$$Q_\nu(\xi) = \int_0^\infty [\xi + (\xi^2-1)^{1/2}\cos h\varphi]^{\nu}\, d\varphi.$$

In fine, menționăm în treacăt că există și funcțiuni generale *Laplace* de ordin superior, ca și cele *Legèndre* cu $\nu = n$ întreg, și anume:

$$\mathcal{P}_\nu^s(\xi) = (1-\xi)^{s/2}\frac{d^s}{d\xi^s}\mathcal{P}_\nu(\xi)$$

$$Q_\nu^s(\xi) = (1-\xi)^{s/2}\frac{d^s}{d\xi^s}Q_\nu(\xi),$$

din care obținem în particular, prin derivarea integralei *Schläfli* și substituirea $t = \xi + |\xi^2-1|^{1/2} e^{i\varphi}$.

$$\mathcal{P}_\nu^s(\xi) = (-1)^s \frac{(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+s)}{\pi}\int_0^\pi [\xi + (\xi^2-1)^{1/2}\cos\varphi]^{\nu}\cos s\varphi\, d\varphi.$$

s) **Metodă bazată pe rezolvarea ecuațiilor liniare cu coeficienți constanți. Formulele Laplace-Iacobi.**

Ecuația lui *Laplace* este evident satisfăcută de funcția

$$\Phi = e^{\alpha x+\beta y+\gamma z}$$

sau în mod mai general de funcția

$$\Phi = f(\alpha x + \beta y + \gamma z), \tag{61}$$

dacă

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 0,$$

ceeace se poate realiza cu cantități imaginare.

Să punem de ex.:

$$\alpha = i\cos\delta, \quad \beta = i\sin\delta, \quad \gamma = 1, \tag{62}$$

după cum s'ar mai putea pune:

$$\alpha = i\cos h\delta, \quad \beta = \sin h\delta, \quad \gamma = 1.$$

Se poate arăta că soluţia cea mai generală a ecuaţiei lui *Laplace* se obţine prin suprapunerea soluţiunilor de forma (61).

In ipoteza (62) introducând coordonatele cilindrice

$$x = \rho\sin\varphi \quad y = \rho\cos\varphi,$$

putem forma o soluţie simetrică în raport cu axa z, punând:

$$\Phi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f[i\rho\cos\delta(\delta-\varphi)+z]\,d\delta,$$

şi cum este indiferent unde se începe a se măsura unghiul δ, deoarece integrarea se face pe o circumferinţă întreagă, putem scrie

$$\Phi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(i\rho\cos\delta+z)\,d\delta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(i\rho\cos\delta+z)\,d\delta. \tag{63}$$

Valorile lui Φ pe axa z, pentru care $r=0$, sunt:

$$\Phi_{r=0} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(z)\,d\delta = f(z)$$

şi deci cu ajutorul acestei valori se poate găsi valoarea lui Φ în orice alt punct.

Drept caz special al lui (63) avem funcţiunile:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(i\rho\cos\delta+z)^n\,d\delta, \quad \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(i\rho\cos\delta+z)^{-(n+1)}\,d\delta,$$

unde n este număr întreg. Cum aceste funcţiuni sunt armonice sferice de spaţiu, ce rămân finite pe sfera unitară, şi cum pentru $\rho=0$ (care corespunde cu $\theta=0$). se reduc la $z^n=r^n$ şi $r^{-(n+1)}$, ele trebue să fie identice cu $\mathcal{P}_n(\xi)r^n$ şi $\mathcal{P}_n(\xi)r^{-(n+1)}$, ţinând seamă că $\mathcal{P}_n(o)=1$.

Aşa dar:

$$\mathcal{P}_n(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\xi+i\sqrt{1-\xi^2}\cos\delta)^n\,d\delta,$$

respectiv:

$$\mathcal{P}_n(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{d\delta}{(\xi+i\sqrt{1-\xi^2}\cos\delta)^{n+1}},$$

formula lui *Laplace*, respectiv aceea a lui *Iacobi*, găsită mai sus pe altă cale.

t) **Cazul simetriei în jurul unei axe.**

Vom lua axa de simetrie, drept axă z. Coordonatele indicate în asemenea probleme fiind cele cilindrice ρ, φ, z, studiul curenților simetrici în jurul axei z se poate mărgini numai într'un plan meridian ρz, în care se vor găsi și vectorii vitezelor moleculelor respective.

Componentele vitesei ce intră în considerație, sunt, așa dar

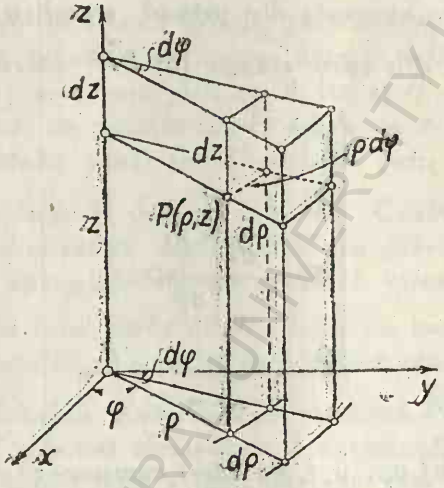


Fig. 42

v_ρ și v_z, deoarece $v_{\varphi=0}$. Ecuația de continuitate, scrisă pentru fluxul ce iese prin fețele paralelipipedului $d\rho, \rho d\varphi, dz$:

$$\frac{\partial(v_\varphi \rho d\varphi dz)}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial(v_z \rho d\varphi d\rho)}{\partial z} dz = 0$$

se reduce la forma simplă

$$\frac{\partial(\rho v_\varphi)}{\partial \rho} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0, \qquad (64)$$

care, scrisă :

$$\frac{\partial(\rho v_\varphi)}{\partial \rho} = -\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}, \qquad (64.1)$$

arată că

$$\rho v_\rho dz - \rho v_z d\rho = d\psi(x, y, z), \qquad (64.2)$$

adică primul membru, este o diferenţială exactă, punând în evidenţă, ca şi la mişcările plane, existenţa unei funcţiuni de curent ψ, căci:

$$\frac{dz}{v_z} = \frac{d\rho}{v_\rho}.$$

Este uşor de văzut, că pentru un element de linie $\overline{ds}[d\rho, dz] = PP'$, socotit pozitiv în sensul $\vec{PP'}$, reprezentând un element de suprafaţă de lărgime *1* în direcţia perpendiculară pe planul meridian, expresia din primul membru (64,2) reprezintă debitul ce trece din spre stânga lui $\vec{PP'}$ către dreapta lui, în

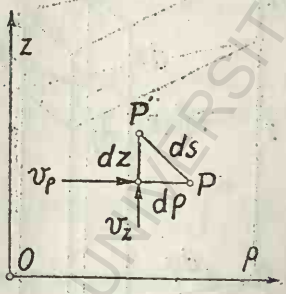


Fig. 43.

virtutea vitesei $\overline{v}[v_\rho, v_z]$, ale cărei componente v_ρ şi v_z debitează prin componentele dz şi $-d\rho$ părţile respective ale debitului. Prin zona elementară de rotaţie $2\pi\rho ds$, generată prin rotaţia lui ds în jurul axei z, trece debitul $2\pi d\psi$ dela stânga la dreapta sensului pozitiv $\vec{ds}$. Acesta este motivul pentru care am definit funcţiunea ψ prin (64,1) şi (64.2), iar nu prin:

$$\frac{-\partial(\rho v_\rho)}{d\rho} = \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}$$

şi

$$r v_z d\rho - v_\rho \partial z = dz = d\psi,$$

în care caz debitul prin elementul menţionat ar fi fost $-d\psi$ în loc de $d\psi$, iar prin zona ds, deasemenea, $-2\pi d\psi$ în loc de $2\pi d\psi$. Să luăm în planul meridian pe o curbă AP, din care face parte elementul PP', un punct fix A şi să facem să varieze P' faţă de P, considerat deasemenea fix; $2\pi d\psi$ va exprima debitul $2\pi v_\rho \rho dz$ dacă $PP' = dz$ şi debitul $-2\pi v_z \rho d\rho$ dacă $PP' = d\rho$, fiind socotit

că pozitiv atunci când vitesa respectivă se îndreaptă dela stânga la dreapta elementului $\vec{ds}$ (după sensul de parcurs convenit, care procură semnul intrinsec diferenţialei dz sau $d\rho$). In fine, dacă PP' este chiar pe o linie de curent, atât debitul respectiv cât şi $d\psi$ sunt nule.

Rezultă că debitul total prin o zonă finită, cum ar fi de ex. AP, va fi:

$$2\pi(\psi_P - \psi_A),$$

ţinând seamă de convenţia de semne, făcută mai sus.

Am fi putut deasemenea începe prin a definit pe ψ în felul următor. Debitul prin zona AP, cu A fix şi P variabil, este evident funcţie numai de poziţia lui P, adică de z şi de ρ. Fie $2\pi\psi$ funcţia care repezintă acest debit, socotit prin definiţie pozitiv, când trece dela stânga la dreapta lui $\vec{AB}$. Curbele $\psi = const$ vor fi evident linii de curent: dacă P şi P' se găsesc pe o asemenea curbă, infinit de apropiate, $d\psi = 0$ arată că vitesa este în direcţia $\vec{PP'}$. Dacă PP' nu face parte dintr'o linie de curent, componenta vitesei normală pe PP', şi socotită ca pozitivă când este îndreptată dela stânga la dreapta elementului orientat $\vec{PP'}$, înmulţită cu suprafaţa $2\pi\rho\, PP'$ a zonei elementare corespunzătoare, va exprima evident debitul, astfel cum a fost definit mai sus. Rezultă că

$$\frac{2\pi d\psi}{2\pi\rho . PP'} \qquad (64.3)$$

va reprezenta numita componentă normală, socotită dela stânga la dreapta lui $\vec{PP'}$. Dacă luăm acum pe $PP' = d\rho$, vom avea în expresia $\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho}$ componenta normală a vitesei, în sensul pozitiv, îndreptat dela stânga la dreapta lui $d\rho$ (deci în sensul $-z$) adică pe $-v_z$. Dacă luăm $PP' = dz$, vom avea în expresia $\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial z}$ componenta normală a vitesei, socotită pozitivă dela stânga la dreapta lui dz, adică v_ρ. Aşa dar, avem pentru vitesele *radială* şi *axială* respectiv:

$$v_\rho = \frac{\partial\Phi}{\partial\rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad \text{şi} \quad v_z = \frac{\partial\Phi}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho} \qquad (65)$$

analog ca la mișcarea plană (ρ corespunzând cu x și z cu y, conform orientării lor mutuale), cu singura diferență că aci apare a ambele componente factorul $\frac{1}{\rho}$ (vezi mai departe mișcarea *plană*).

Dacă totodată mișcarea este nerotațională (vectorul rotațional sau rotorul vitesei neputând exista, de altfel, decât normal pe planul meridian, din cauza simetriei admise) vom avea:

$$\Omega \equiv \frac{\partial v_z}{\partial \rho} - \frac{\partial v_\rho}{dz} = 0, \tag{66}$$

sau, înlocuind valorile vitezelor în funcție de ψ și schimbând semnele:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \psi}{\partial \rho} = 0. \tag{66.1}$$

Ecuația diferențială pentru Φ se obține, înlocuind în (64) expresiile componentelor vitesei în funcție de Φ:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = 0. \tag{67}$$

Rezultă că funcțiunile Φ și ψ nu sunt interschimbabile ca la mișcarea plană, fiind chiar de dimensiuni diferite, din cauza prezenței factorului $\frac{1}{\rho}$ în (65).

Energia cinetică a unui lichid, mărginit de o suprafață de rotație în jurul axei z, se exprimă (pentru a evita confuzia în notație vom însemna densitatea cu $\frac{\varpi}{g}$, fiindcă ρ are aci alt înțeles) prin:

$$2T = \frac{\varpi}{g}\oint^{\sigma} \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} d\sigma = \frac{\varpi}{g}\int^{s} \Phi \frac{1}{\rho}\frac{\partial \psi}{ds} \cdot 2\pi\rho ds = 2\pi\frac{\varpi}{g}\int \Phi d\psi,$$

unde $\bar{n}$ este normala exterioară, iar $\bar{ds}$ un element al meridianei numitei suprafețe, cu sensul la stânga aceluia al normalei, astfel că dn corespunde cu $d\rho$ și ds cu dz.

În cazul unei surse punctiforme, așezată în origină, cu funcția de viteză:

$$\Phi_{-1} = \frac{1}{r}$$

avem:

$$v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = -\frac{1}{r^2} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \psi}{r\partial\theta} = -\frac{1}{r^2\partial(\cos\theta)} \quad \left(\begin{matrix}\text{viteza radială}\\ \text{spre centru}\end{matrix}\right),$$

de unde

$$\psi = \cos\theta = \frac{z}{r} = \frac{\partial r}{\partial z},$$

luând constanta de integrare $= 0$.

Mai putem raționa și astfel: debitul prin o curbă oarecare închisă este egală cu unghiul solid, sub care curba se vede din origină. Pentru un cerc având oz ca axă, de o rază $\rho = r\sin\theta$, calota corespunzătoare a sferei unitare este $2\pi(1-\cos\theta)$ și deci aceasta va fi și expresia, în valoare absolută, a debitului, dacă luăm $\psi = 0$ pe axa z.

Cum v_r este pozitiv când este centrifug, debitul va avea semnul său intrinsec, atunci când $ds = r\partial\theta$ va fi positiv, și deci vom scrie:

$$2\pi\psi = -2\pi(1-\cos\theta);$$

Dacă lăsăm constanta deoparte, vom avea pentru funcția ψ o valoare negativă (fără a mai fi proporțională cu debitul):

$$\psi_{[-1]} = \cos\theta = \frac{z}{r} = \frac{dr}{\partial z}.$$

Pentru un număr oarecare de surse simple, așezate în diferite puncte ale axei z, soluțiile se suprapun, și de ex. pentru dubleu avem (luând derivata în loc de diferențială), cu

$$\Phi_{-2} = -\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r} = \frac{\cos\theta}{r^2}$$

și funcția de curent (ținând seamă că $r^2 = z^2 + \rho^2$):

$$\psi_{[-2]} = -\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{\rho^2}{r^3} = \frac{\sin^2\theta}{r}. \qquad (68)$$

In general la armonica sferică (de spațiu) simplă de gradul $-(n+1)$

$$\Phi_{-(n+1)} = C\frac{\partial^n}{\partial z^n}\frac{1}{r}, \qquad (69)$$

corespund funcțiuni de curent:

$$\Psi_{[-(n+1)]} = C\frac{\partial^{n+1} r}{\partial z^{n+1}} \cdot \qquad (70)$$

Pentru cazul $n=1$ am văzut că $A=-1$.

O formulă generală, aplicabilă funcțiunilor sferice de spațiu de orice grad, întreg sau nu, se obține în modul următor: să luăm componentele vitesei, în planul meridian, v_r și v_θ, respectiv dealungul lui r și perpendicular pe r, înlocuind pe PP' în (64.3) întâiu cu $rd\theta$ și apoi cu dr, anume (după orientare $rd\theta$ este în avans față de dr, după cum dz este în avans față de $d\rho$):

$$v_r = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{rd\theta}, \qquad v_\theta = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r}.$$

Cum la o mișcare nerotațională aceste vitese, în funcție de Φ, sunt respectiv:

$$v_r = \frac{\partial\Phi}{\partial r}, \qquad v_\theta = \frac{\partial\Phi}{r\partial\theta},$$

vom avea pentru funcțiile sferice în chestiune (curenți nerotaționali):

$$\frac{\partial\psi}{\sin\theta\, d\theta} = r^2\frac{\partial\Phi}{dr}, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial r} = -\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}.$$

Așa dar, dacă avem: $\Phi = r^n S_n$, unde S_n este o funcțiune simplă (zonală) de suprafață de ordinul n, vom avea (punând $\xi = \cos\theta$):

$$\frac{\partial\psi}{\partial\xi} = -nr^{n+1}S_n, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial r} = r^n(1-\xi^2)\frac{dS_n}{d\xi}.$$

Ultima relație dă funcția:

$$\psi = \frac{r^{n+1}}{n+1}(1-\xi^2)\frac{dS_n}{d\xi},$$

care trebue să satisfacă și penultima relație, ceeace se poate verifica cu ajutorul ecuației zonale.

Așa dar, în cazul funcțiunei zonale $\mathcal{P}_n$ avem corespondența:

$$\Phi_n = r^n\mathcal{P}_n(\xi) \qquad \psi_{[n]} = \frac{r^{n+1}}{n+1}(1-\xi^2)\frac{d\mathcal{P}_n}{d\xi}$$

și

$$\Phi_{-(n+1)}\, r^{-(n+1)}\mathcal{P}_n(\xi) \qquad \psi_{[-(n+1)]} = -\frac{r^{-n}}{n}(1-\xi^2)\frac{d\mathcal{P}_n}{d\xi},$$

unde ultimile două expresii trebuue să fie echivalente respectiv cu (69) și (70), ceea ce se verifică, de ex. pentru $n=1$ (știind că $\mathcal{P}_n=\xi$) cu

$$C=-1,$$

iar pentru $n=2$, știind că $\mathcal{P}^2(\xi)=\frac{1}{2}(3\xi^2-1)$, cu

$$C=-\frac{1}{2}, \text{ etc.}$$

Aceleași relații se aplică firește și la funcțiunile Q_n de a doua speță.

Aplicația Nr. 42. *A se studia mișcarea unei sfere într'un lichid indefinit în repaus.*

Răspuns. Să luăm origina în centrul sferei, care se presupune că se mișcă cu vitesa U, iar axa z în direcția mișcării. Componenta normală a vitesei pe un punct al suprafeței va fi: $U\cos\theta$.

Condițiile pentru determinarea lui Φ sunt următoarele:

1) trebue să avem $\Delta\Phi=0$;

2) derivatele $\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \frac{\partial\Phi}{\partial z}$ la ∞ trebue să fie nule.

3) pentru $r=a$ trebue să avem:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r}=U\cos\theta. \tag{71}$$

Forma relației (71) indică aplicarea funcțiunei zonale de primul ordin și dictează să punem:

$$\Phi=A\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}=-A\frac{\cos\theta}{r^2}.$$

Condiția (71) cere, așa dar, ca

$$\frac{2A}{a^3}=U \quad \text{adică} \quad A=\frac{1}{2}a^3U,$$

astfel că soluția este

$$\Phi=-\frac{1}{2}U\frac{a^3}{r^2}\cos\theta. \tag{72}$$

Mișcarea este deci identică cu aceea produsă de un dubleu cu un moment (vezi pag. 145) $2\pi Ua^3$, plasat în centrul sferei și cu axa îndreptată după axa z.

Energia mișcării se obține prin relația:

$$2T=-\rho\oint^{\sigma}\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial r}d\sigma=\frac{1}{2}\rho a\,U^2\int_0^{\pi}\cos^2\theta\,2\pi a\sin\theta\,ad\theta=\frac{2}{3}\pi\rho a^3U^2=M'U^2$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

cu $M' = \frac{2}{3}\pi\rho a^3$. Se vede că, prezenţa lichidului implicând producerea unei energii cinetice în lichid:

$$T = \frac{1}{2} M' U^2,$$

dacă am presupune-o şi pe aceasta concentrată în masa corpului în mişcare, energia cinetică a corpului ar deveni aceeaşi ca şi când masa lui ar fi crescut aparent cu M', adică cu jumătatea masei lichidului deplasat.

Dacă sfera se mişă rectiliniu şi asupra ei nu acţionează nici o altă forţă decât presiunile lichidului, presiunea rezultantă asupra ei din partea lichidului ar fi egală cu:

$$-M' \frac{dU}{dt}$$

în direcţia mişcării, fiind nulă în cazul $U = const.$ Dacă, aşa dar, sfera ar fi pusă în mişcare şi apoi lăsată în voia ei, ea s'ar mişca teoretic (în lipsa vîscozităţii şi a compresibilităţei fluidului) cu vitesă constantă.

Aplicaţia Nr. 43. *A se studia mişcarea unei sfere într'un lichid mărginit.*

Răspuns. Aceiaşi metodă se poate întrebuinţa pentru a determina mişcarea produsă în lichidul cuprins între o sferă şi o frontieră sferică rigidă concentrică, când prima se mişcă cu vitesa dată U. Dacă luăm originea în centrul sferei, având în vedere că spaţiul lichid este mărginit atât în interior cât şi în exterior, se pot întrebuinţa funcţiuni sferice de grad atât pozitiv cât şi negativ.

Efectiv avem nevoie de ambele aceste categorii, pentru satisfacerea condiţiilor la frontieră, cari sunt

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = U \cos\theta$$

pentru $r = a$ (a fiind raza sferei ce se mişcă) şi

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0,$$

pentru $r = b$ (b fiind raza frontierei rigide exterioare).

Presupunem şi aci că mişcarea are loc în direcţia axei z.

Punând

$$\Phi = \left(Ar + \frac{B}{r^2}\right) \cos\theta,$$

condiţiile prescrise ne dau:

$$A - \frac{2B}{a^2} = U, \qquad A - \frac{2B}{b^2} = 0,$$

de unde:

$$A = -\frac{a^3}{b^3 - a^3} U, \qquad B = -\frac{1}{2} \frac{a^3 b^3}{b^3 - a^3} U.$$

Energia cinetică a mişcării fluidului este dată de

$$2T = -\rho \oint^{\sigma} \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial r} d\sigma,$$

integrarea întinzându-se numai asupra sferei interioare, deoarece la cea exterioară avem

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0.$$

Găsim astfel

$$2T = \frac{2}{3}\pi \frac{b^3 + 2a^3}{b^3 - a^3} \rho a^3 U^3.$$

Creșterea aparentă a masei este acum

$$\frac{2}{3}\pi \frac{b^3 + 2a^3}{b^3 - a^3} a\rho^2.$$

Dacă b descrește de dela ∞ la a, această expresie crește continuu dela valoarea găsită mai sus $\frac{2}{3}\pi\rho a^3$ până la ∞. Introducerea, așa dar, la aplicația precedentă, a unei frontiere sferice rigide conduce, pentru orice viteză dată, la o augumentare forțată a energiei cinetice și deci la o creștere a masei aparente a sistemului.

Aplicația Nr. 44. *A se găsi funcția de curent la mișcarea unei sfere într'un fluid indefinit.*

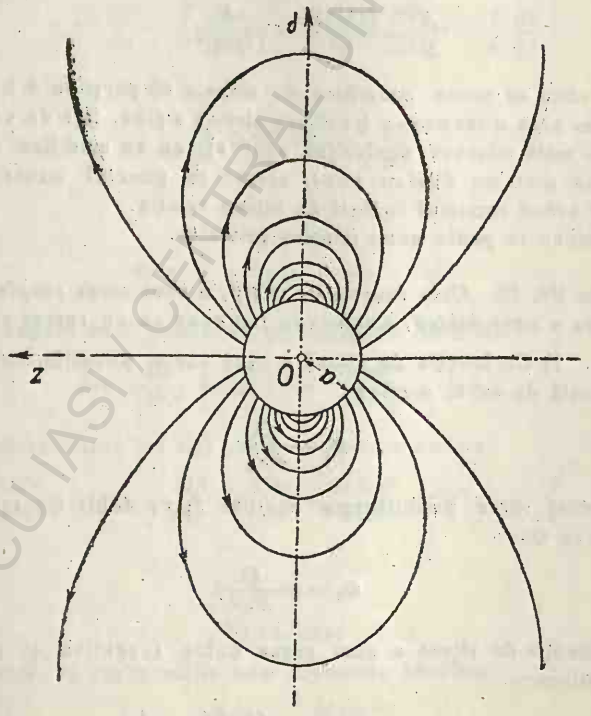


Fig. 44

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Răspuns. Dacă comparăm formula (68) cu (72), dată în penultima aplicaţie, găsim pentru funcţia de curent, produsă de sfera în mişcare irdefinită:

$$\psi_{[-2]} = \frac{1}{2} U \frac{a^3}{r} \sin^2 \theta.$$

Forma liniilor de curent, corespunzătoare la salturi egale de ψ, se vede pe fig. 44. Bineînţeles spectrul liniilor de curent faţă de sferă, considerată fixă, este cu totul altul, suprafaţa sferei fiind atunci însăşi o suprafaţă de linii de curent.

Aplicaţia Nr. 45. *A se găsi funcţia de curent a două dubleuri, ale căror axe se află pe axa z şi sunt opuse.*

Răspuns. După (68) avem

$$\psi_{[-2]} = \frac{A\rho^2}{r_1^3} - \frac{B\rho^2}{r_2^3},$$

unde r_1, r_2 sunt distanţele unui punct oarecare la punctele P_1 şi P_2, unde sunt plasate cele două dubleuri. Pentru suprafaţa de curent $\psi = 0$ avem

$$\frac{r_1}{r_2} = \left(\frac{A}{B}\right)^{1/2}$$

şi deci această suprafaţă este o sferă, pentru care punctele P_1 şi P_2 sunt *inverse*. Dacă O este centrul acestei sfere şi a raza ei, găsim: $OP_1 \times OP_2 = a^2$ şi

$$\frac{A}{B} = \frac{(OP_1)^3}{a^3} = \frac{a^3}{(OP_2)^3}.$$

Această sferă se poate considera de ambele ei părţi ca o frontieră a lichidului. Dacă am avea o asemenea frontieră sferică rigidă, faţă de un dubleu (sau o sferă infinit de mică mişcată dealungul axei z), ea va modifica curentul astfel, cum ar rezulta dintr'un dubleu opus, aşezat în punctul *invers* celui dintâiu, momentele lor având raportul indicat de ultima relaţie.

Acest dubleu se poate numi imagina primului.

Aplicaţia Nr. 46. *Dela funcţia de vitesă, a unei surse simple punctiforme, a se trece la aceia a unui dubleu, singur sau suprapus cu un curent paralel —U.*

Răspuns. 1) Cu funcţia de vitesă a unei surse punctiforme negative S_1 de debit $-Q$, aşezată de ex. în origină:

$$\Phi_1 = \frac{Q}{4\pi r_1}.$$

şi cu aceea a unei surse punctiforme pozitive S_2 de debit Q, aşezată de ex. pe semi-axa pozitivă Oz

$$\Phi_2 = -\frac{Q}{2\pi r^2},$$

se formează funcţia de vitesă a unei surse duble (negativă şi pozitivă, fig. 45) S_1 şi S_2 prin adunare

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = -\frac{Q}{4\pi}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right).$$

Prin apropierea lui S_2 de S_1 la distanța dz' se formează un dubleu $-Q,+Q$ cu axa dz', care spre a fi finit, este nevoe a se spori debitul, astfel ca $Q\,dz'$ să aibă o limită finită M.

Funcția de vitesă devine atunci:

$$\Phi = -\frac{Q}{4\pi}\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z'}dz' = \frac{Q}{4\pi}\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z}dz = -\frac{M}{4\pi}\frac{z}{r^3} = -\frac{M}{4\pi}\frac{\cos\theta}{r^2},$$

unde θ este unghiul, pe care îl formează raza vectoare $\overline{r}$ a punctului curent P cu direcția $+z$, care este și direcția axei dubleului (dela $-Q$ la $+Q$). Dacă în direcția $+z$ poziția celor două surse este inversată ($-Q$ venind după $+Q$), funcția de vitesă va fi:

$$\frac{M\cos\theta}{4\pi r^2},$$

afară dacă, pentru generalizare, am pune atunci $M = -Q\,dz$, considerând momentul unui asemenea dubleu ca negativ.

O astfel de convenție ar fi utilă, în cazul când avem mai multe dubleuri de orientări diferite, cu axele așezate pe aceeași dreaptă.

Cunoscând funcția de vitesă Φ, se poate deduce aceea de curent ψ prin formulele:

$$v_\rho = \frac{\partial\Phi}{\partial\rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial z}, \qquad v_z = \frac{\partial\Phi}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho}.$$

In cazul dubleului avem

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} = \frac{3M}{4\pi}\frac{\rho z}{r^5} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial z}$$

sau

$$d\psi = \frac{3}{4\pi}M\rho^2 z\,(\rho^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}dz$$

și, integrând în raport cu z, constanta de integrare fiind $f(\rho)$:

$$\psi = -\frac{M\rho^2}{4\pi r^3} + f(\rho) = -\frac{M\sin^2\theta}{4\pi r} + f(\rho).$$

Pentru determinarea lui $f(\rho)$ uzăm de a doua relație:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\rho} = -\frac{M\rho}{2\pi r^3} + \frac{3M\rho^3}{4\pi r^5} + f'(\rho) = -\frac{M\theta}{2\pi r^3} + \frac{3M\rho}{4\pi r^3} - \frac{3M\rho z^2}{4\pi r^5} + f'(\rho) = -\rho\frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{M\rho}{4\pi r^3} - \frac{3M\rho z^2}{4\pi r^5}.$$

Rezultă:

$$f'(\rho) = 0$$

$$f(\rho) = const$$

și în cele din urmă, cu aproximația unei constante absolute,

$$\psi = -\frac{M\rho^2}{4\pi r^3} \equiv -\frac{M\sin^2\theta}{4\pi r}.$$

BCUMS CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Pentru curentul paralel cu vitesa $-U$ la ∞ în direcţia axei z vom avea

$$v_{0\rho} = 0, \qquad v_{0z} = \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} = -U$$

şi deci

$$\Phi_0 = -Uz.$$

Cunoscând pe Φ_0 se deduce ψ_0 prin aceleaşi formule:

$$v_{0\rho} = 0 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \psi_0}{\partial z}$$

$$\psi_0 = f(\rho),$$

iar pe de altă parte

$$v_{0z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \psi_0}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho} f'(\rho) = -U,$$

de unde

$$\psi_0 = \frac{1}{2} U\rho^2.$$

Prin suprapunerea acestor două câmpuri avem:

$$\Phi \text{ rezultant} = -Uz - \frac{M}{4\pi}\frac{z}{r^3} = -z\left(U + \frac{M}{4\pi r^3}\right)$$

$$\psi \text{ rezultant} = \frac{1}{2}U\rho^2 - \frac{M\rho^2}{4\pi r^3} = \frac{\rho^2}{2}\left(U - \frac{M}{2\pi r^3}\right).$$

Ecuaţia $\underset{\text{rez}}{\psi} = 0$ reprezintă, drept linie de curent, axa z şi curba meridiană definită prin

$$2\pi U r^3 = M,$$

cu r constant şi egal cu

$$a = \sqrt[3]{\frac{M}{2\pi U}},$$

deci un cerc, meridiana sferei cu aceaşi rază.

Firul de pe axa z se poate numi *filon* (fir mare), de oarece se resfiră ansamblul firelor ce formează suprafaţa de curent sferică menţionată.

Inlocuind pe M prin valoarea lui în a, găsim:

$$\Phi \text{ rez} = -Uz\left(1 + \frac{a^3}{2r^3}\right)$$

$$\psi \text{ rez} = \frac{U\rho^2}{2}\left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right),$$

formule găsite mai sus pe altă cale.

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Suprafața sferică în chestiune este o suprafață de separație, care desparte fluidul surselor de acela venit de la $-\infty$ și care merge la $+\infty$, cu deformarea spectrului său paralel prin prezența dubleului.

Dacă imprimăm ansamblului vitesa U, vom avea o sferă mișcată cu vitesa U într'un fluid indefinit, în repaus la ∞, sferă ce se poate presupune solidificată, fără a se schimba nimic în câmpul de vitesă exterior ei.

4. Metoda lui Rankine.

a) **Principiul metodei.** Cazul câmpului produs de mișcarea unei sfere (aplicația Nr. 46) este un caz particular din cele mai simple. *Rankine* a imaginat o metodă generală (care, adaptată anume, se aplică și la mișcările plane) pentru a determina forme de rotație utile în practică, ce se pot da unui corp, în așa fel ca acesta, mișcându-se cu o vitează uniformă U în direcția axei lui (pe care o vom lua drept axă z) într'un fluid incompresibil indefinit în repaus, să producă o mișcare potențială cunoscută, evident simetrică în jurul menționatei axe și *variabilă* (nepermanentă).

In acest caz, al *corpului mobil* într'un fluid aflat prealabil în repaus, mișcarea fluidului care, văzută de un observator fix, adică raportată la axe fixe sau solidare cu fluidul la ∞, deci în repaus (hipoteza 1), este nepermanentă, este o *mișcare absolută*, în opoziție cu *mișcarea relativă a fluidului*, văzută de un observator sau raportată la axe, solidare cu corpul (hipoteza 2), fluidul având atunci vitesa $-U$ la ∞; aceasta din urmă mișcare este permanentă (sau staționară).

Vom păstra aceste denumiri și în cazul când ansamblul de mai sus ar primi o translație $-U$, adică în cazul *corpului fix*, în care caz calificarea hipotezelor *1* și *2* (relative la axe A_1 solidare cu fluidul la ∞, respectiv A_2 solidare cu corpul) nu se schimbă, însă ceeace era mișcare *absolută* și *nepermanentă* devine *relativă* și *permanentă* (*staționară*), și vice-versa.

Vom numi Φ_1 funcțiunea de vitesă a mișcării din hipoteza 1, văzută din A_1 sau de observatorul (fix sau mobil), ce vede corpul mișcându-se cu vitesa U, iar Φ funcțiunea de vitesă a mișcării din hipoteza 2, relative la axe A_2 solidare cu corpul (fix sau mobil), adică așa cum este văzută de observatorul așezat pe corp.

Să presupunem acum, că pe axa Oz avem o repartiție oarecare de surse pozitive și negative fixe, cu debit total nul. Spre a fixa ideile vom plasa cu precădere sursele pozitive de partea axei

$+z$, cele negative de partea $-z$. Va rezulta un câmp de vitesă sau un spectru de linii de curent, formând suprafețe de curent în formă de rotație în jurul axei Oz. Ca și la un dubleu, vor exista și linii de curent, ce dela sursele pozitive merg la $+\infty$ și dela $+\infty$ prin $-\infty$ se întorc spre sursele negative, vitesele tinzând la ∞ către zero.

Dacă, la un moment dat, suprapunem curentului produs de aceste surse fixe, un curent paralel în direcția $-Oz$, care vine dela $+\infty$ cu vitesa uniformă $-U$, va rezulta, pentru observatorul fix, un câmp de vitesă sau un spectru de linii de curent simetric în jurul aceleiași axe, constituind cazul *surselor fixe într'un curent paralel de la* ∞. Pentru una din cele două sensuri posibile ale curentului paralel față de sistemul de surse, anume sensul ales aci pentru vitesa $-U$, se va găsi printre suprafețele de curent în formă de rotație și o *suprafață închisă fixă*, care va cuprinde toate sursele și liniile sau tuburile de curent, ce duc dela sursele pozitive la cele negative; sursele fiind date, mărimea acestei suprafețe închise va depinde evident de intensitatea, adică vitesa curentului paralel, de oarece la anularea acesteia, după cele arătate mai sus, ea va înceta de a exista, fiind aruncată la ∞.

Pentru $-U$ finit existența acestei suprafețe se poate foarte ușor concepe. Intradevăr, prin suprapunerea curentului paralel (care la ∞ rămâne nemodificat) având sensul menționat, favorabil pentru ca debitul surselor pozitive, ce altfel s'ar dispersa și spre $+\infty$, să fie îndreptat spre cele negative și absorbit de acestea, efectul curentului paralel va fi de a deforma și apropia de surse liniile sau tuburile de curent preexistente. Sistemul surselor cu liniile lor de curent va rămâne, prin acest efect, izolat de curentul paralel, deformat în consecință în afara menționatei suprafețe închise fixe, care, așa dar, va fi o suprafață de separație, ce se va putea înlocui printr'un perete rigid sau un corp de aceiași formă, fără a se schimba nimic în mișcarea din exterior. Am avea astfel un caz analog aceluia al *corpului fix* într'un curent paralel de la ∞ (hipoteza 2), iar mișcarea fluidului exterior corpului ar fi o mișcare potențială, caracterizată de funcția de vitesă Φ relativ la axe A_2 solidare cu sistemul surselor sau cu corpul, și Φ_1 față de axe A_1 solidare cu fluidul la ∞.

Dacă acum imprimăm ansamblului, adică surselor și curentului $-U$, o translație generală $+U$, situația relativă dintre surse

și curentul paralel anterior, la ∞ redus acum la repaus, nu se schimbă și vom avea masa, închisă în suprafața de separație menționată, animată de vitesa generală U într'un fluid indefinit, la ∞ în repaus, exact ca în cazul corpului mobil (hipoteza 1).

In ambele cazuri sau hipoteze spectrul liniilor de curent în exteriorul suprafeței închise menționate rămâne același, fie că în suprafața de separație avem sistemul de surse, fie un corp solid. Mișcarea fluidului exterior suprafeței de separație ar avea, față de axe A_1 o funcție de viteză Φ_1, iar față de axe A_2 solidare cu sistemul de surse, respectiv cu corpul, o funcție de vitesă Φ.

Problema, ce și-a propus *Rankine*, este de a alege debitele sau intensitățile de debit ale unor surse, izolate sau continuu repartizate, în raport cu intensitatea curentului paralel dela ∞ în așa mod, ca forma și mărimea suprafeței închise ce va rezulta, să fie cât mai bine adaptabilă corpului solid ce interesează, cum ar fi de exemplu cazul unei *aerocave*.

Această problemă se poate rezolvi prin tatonări, plecând dela problema inversă, cu mult mai simplă, a unei repartiții de surse cunoscută, pentru care se pot găsi ușor suprafețe închise corespunzătoare.

b) **Aplicarea metodei.** Dacă U este vitesa corpului solid de formă necunoscută, iar ds un element al curbei meridiane *din dreapta* a suprafeței lui de rotație, *componenta normală* a vitesei la un punct oarecare al acestei meridiane rigide, va fi proecția lui U pe normală; dacă dăm lui s un sens de parcurgere, de ex. luând origina lui la un z mai mic și extremitatea la un z mai mare, iar normala pozitivă o vom socoti la dreapta elementului orientat $\overline{ds}$, proecția în chestiune va fi în mărime și semn, după cum ușor se poate verifica pentru toate cazurile:

$$-U\frac{\partial\varrho}{\partial s}.$$

După aceleași convențiuni însă, Φ_1 și ψ_1 fiind funcțiunile de vitesă și de curent ale mișcării absolute sau variabile (hipoteza 1), iar direcțiile n și s fiind *congruente* (de aceiași orientare una față de alta) cu direcțiile axelor coordonate ϱ și z, vom avea pentru componenta normală a vitesei fluidului

$$v_n = \frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial\psi_1}{\partial s},$$

şi cum vitesele normale ale peretelui şi fluidului în contact trebue să fie egale, vom avea dealungul meridianei egalitatea acestor vitese normale:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi_1}{\partial s} = -U\frac{\partial\rho}{\partial s}. \qquad (73)$$

Dacă aplicăm ansamblului, format din fluid, imobil la ∞, şi corpul solid, o translaţie cu vitesa $-U$, fiecare din aceste componente va trebui să se reducă la zero prin adăogarea la fiecare din ele a componentei $U\frac{\partial\rho}{\partial s}$ (după aceiaşi direcţie) a vitesei de translaţie $-U$.

Relaţia (73) dealungul meridianei devine atunci:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi_1}{\partial s} + U\frac{\partial\rho}{\partial s} = 0, \qquad (73.1)$$

unde primul membru exprimă componenta normală a vitesei din câmpul relativ Φ (hipoteza 2) al curentului, ce venind de la ∞ cu vitesa $-U$ se scurge în jurul corpului fix. Dar atunci putem scrie:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial s} \equiv \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi_1}{\partial s} + U\frac{\partial\rho}{\partial s} = 0 \qquad (73.2)$$

dealungul meridianei rigide, care evident în această mişcare relativă este şi linie de curent, ceeace ne explică şi faptul că, componenta normală a vitesei fluidului este nulă pe suprafaţa solidului:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial s} = 0,$$

fluidul alunecând tangenţial pe acea suprafaţă fixă.

Relaţia (73,2) ne va da prin integrare dealungul meridianei

$$\psi \equiv \psi_1 + \frac{1}{2}U\rho^2 = const, \qquad (73.3)$$

ceeace va fi evident ecuaţia meridianei în coordonatele ρ şi z.

Rezultă că, pentru orice mişcare absolută, caracterizată de o funcţie de curent ψ_1, provocată de mişcarea unui corp cu vitesa U într'un fluid indefinit, prealabil în repaus, meridiana corpului va satisface ecuaţia (73,3) sau ecuaţia

$$\psi_1 = -\frac{1}{2} U\rho^2 + const, \qquad (73.4)$$

rezultată prin integrarea parțială, în raport cu s, a egalității (73).

Ori, am văzut că, dacă mișcarea caracterizată prin funcția ψ_1 este una din acelea, ce pot lua naștere prin o repartiție oarecare de surse (cu debit total nul) pe axa z (funcția ψ_1 fiind evident independentă de starea de repaus sau mișcare a surselor, deoarece câmpul de viteză, corespunzător lui ψ_1, se obține prin derivare parțială a funcției în raport cu ρ și z, față de axe solidare cu corpul) vom obține, în suprafața închisă ce s'ar găsi că satisface relația (73) sau (73,4), suprafața unui corp de formă de rotație, care, prin mișcarea lui cu viteza U într'un fluid în repaus, sau înplântat fix într'un curent paralel $-U$, poate produce în exterior același câmp Φ_1, ψ_1, respectiv Φ, ψ, ca și sistemul de surse considerat.

Aplicația Nr. 47. *A se găsi, după metoda lui Rankine, câmpul din jurul unui dubleu care, cu axa sa $-Q_1, +Q$, orientată în direcția $+z$ și așezată pe axa z, se mișcă în direcția $+z$ cu viteza U într'un fluid prealabil în repaus. Se va deduce suprafața de curent închisă care se mișcă solidar cu dubleul. A se găsi apoi Φ și ψ din cazul când dubleul este fix (mișcare permanentă).*

Răspuns. Am văzut (pag. 145) că funcția de viteză a unui dubleu, fix sau mobil, cu o asemenea poziție și orientare, este, față de axe A_1 cu origina în dubleu:

$$\Phi_1 = -\frac{M\cos\theta}{4\pi r^2} \equiv -\frac{Mz}{4\pi r^3},$$

cu $M = Q\,dz$ pozitiv.

În ceeace privește funcțiunea de curent, ea este de forma (68)

$$\psi_1 = C\frac{\rho^2}{r^3} \equiv C\frac{\sin^2\theta}{r},$$

rămânând a se determina C în consecință și a se găsi și meridiana suprafeței închise în chestiune.

Introducând în (73,4) această expresie a lui ψ_1 și luând în (73,4) constanta arbitrară egală cu zero, găsim:

$$C\frac{\sin^2\theta}{r} = -\frac{1}{2}U\rho^2 \equiv -\frac{1}{2}Ur^2\sin^2\theta,$$

ecuație care este evident satisfăcută (dând o meridiană închisă) pentru

$$C = -\frac{1}{2}Ur^3 = -\frac{1}{2}Ua^3$$

cu r constant și egal cu:

$$a=\sqrt[3]{\frac{-2C}{U}}.$$

Regăsim astfel mișcarea absolută, provocată într'un fluid în repaus, de mișcarea sferei de diametru a cu vitesa U în direcția $+z$, și a cărei funcție de curent este (vezi aplicația Nr. 44) față de axe A_1 (aci fixe):

$$\psi_1=-\frac{1}{2}U\frac{a^3}{r}\sin^2\theta,$$

iar pentru mișcarea relativă față de sferă sau de axe A_2, după (73,3) (adică prin imprimarea unui curent de translație $-U$)

$$\psi=\frac{1}{2}U\rho^2-\frac{1}{2}U\frac{a^3}{2}\sin^2\theta=\frac{1}{2}U\rho^2\left(1-\frac{a^3}{r^3}\right).$$

In ceeace privește funcția de vitesă ea se poate explicita cu valoarea lui $C=-\frac{M}{4\pi}$ (69), ceeace se poate deduce și din relația

$$v_z=\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi_1}{\partial\rho},$$

deci

$$\Phi_1=-\frac{Ua^3z}{2r^3}=-\frac{Mz}{4\pi r^3},$$

deci $2\pi Ua^3=M$, conducând la $\psi_1=-\frac{M}{4\pi}\frac{\sin^2\theta}{r}$ și $\psi=\frac{1}{2}U\rho^2-\frac{M}{4\pi}\frac{\rho^2}{r^3}$ și cum funcția de vitesă a curentului de translație $-U$ este Uz, vom avea:

$$\Phi=-Uz\left(1+\frac{a^3}{2r^3}\right)=-Uz\left(1+\frac{M}{4\pi Ur^3}\right)\equiv-z\left(U+\frac{M}{4\pi r^3}\right).$$

Observăm că, plecând dela factorul nedeterminat C, am găsit că dubleul, care se deplasează cu vitesa U în sensul $+z$ într'un fluid în repaus sau care, fiind fix, este suprapus curentului paralel $-U$, trebue să aibă pe M pozitiv, adică să fie orientat $-Q$, $+Q$ în direcția $+z$, dacă voim de ex. să limităm în spațiu perturbația adusă de dubleu în curentul paralel dela infinit (dând în acest caz, al sistemului de surse fixe, și punctele *critice*, adică cu vitesă nulă). În cazul orientării inverse, sursa pozitivă a dubleului ar debita o parte din debitul ei spre $-\infty$ (unde s'ar găsi o sursă fictivă negativă), iar parte din liniile curentului paralel, cari vin dela sursa fictivă pozitivă dela $+\infty$, s'ar îndrepta spre sursa negativă a dubleului, astfel că o suprafață de curent închisă n'ar putea lua ființă.

Aplicația Nr. 48. *A se studia, aceeași chestiune ca la aplicația de mai sus, a suprapunerei unui dubleu fix $-Q$, $+Q$ de moment M cu un curent paralel $-U$, plecându-se dela funcția Φ presupusă cunoscută, însă pentru stabilirea funcțiunei ψ se va folosi expresia debitului în funcție de ψ.*

Răspuns. Curentul rezultant are, precum am văzut, drept funcție de vitesă:

$$\Phi=-Uz-\frac{M\cos\theta}{4\pi r^2}=-z\left(U+\frac{M}{4\pi r^3}\right),$$

care, se va vedea și pe această cale, reprezintă și mișcarea în jurul unei sfere de o anumită rază a, a unui curent paralel ce vine dela ∞ cu vitesa $-U$.

Avem în planul meridian:

$$r^2=\rho^2+z^2, \quad \text{deci} \quad r^3=(\rho^2+z^2)^{3/2} \quad \text{și} \quad \frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r},$$

apoi:

$$v_z=\frac{\partial \Phi}{\partial z}=-U-\frac{M}{4\pi r^3}\left(1-\frac{3z^2}{r^2}\right),$$

iar debitul printr'un disc, perpendicular pe axa Oz și de rază ρ, a cărui meridiană dreaptă merge dela 0 la ρ, sub $z=(r^2-\rho^2)^{1/2}$ constant, va fi, aplicând convenția făcută anterior de a lua vitesa normală pe ds (aci $d\rho$) ca pozitivă, atunci când trece dela stânga lui ds orientat la dreapta lui (deci aci $-v_z$):

$$2\pi\psi=-2\pi\int_0^\rho v_z\,\rho\,d\rho=2\pi\int_0^\rho\left[U+\frac{M}{4\pi r^3}\left(1-\frac{3z^2}{r^2}\right)\right]\rho d\rho$$

sau:

$$\psi=\frac{U\rho^2}{2}+\frac{M}{8\pi}\int_0^{\rho^2}\frac{d(\rho^2)}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}-\frac{3Mz^2}{8\pi}\int_0^{\rho^2}\frac{d(\rho^2)}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}$$

și, ținând seamă că din $r^2=\rho^2+z^2$ avem $d(\rho^2)=d(r^2)$ sub z constant:

$$\psi=\frac{U\rho^2}{2}+\frac{M}{8\pi}\int_{z^2}^{r^2}\frac{d(r^2)}{(r^2)^{3/2}}-\frac{3Mz^2}{8\pi}\int_{z^2}^{r^2}\frac{d(r^2)}{(r^2)^{3/2}},$$

în fine:

$$\psi=\frac{U\rho^2}{2}+\frac{M}{4\pi}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{z}\right)+\frac{Mz^2}{4\pi}\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{z^3}\right)=\frac{\rho^2}{2}\left(U-\frac{M}{2\pi r^3}\right).$$

Pentru $\rho=0$ debitul fiind nul (discul nul), se verifică că avem $\psi=0$. Mai avem însă $\psi=0$ și la anularea celuilalt factor:

$$r^3=\frac{M}{2\pi U}\equiv a^3.$$

Această linie de curent $\psi=0$ reprezintă meridiana unei sfere de rază a, din interiorul căreia nu iese nici o linie de curent (toate mergând dela $+Q$ la $-Q$), sfera însăși de separație constituind o suprafață de curent. Așa dar, atât $\rho=0$ cât și $r=a$, ne dau liniile de curent $\psi=0$, constând din axa z (două segmente interioare și două brațe infinite în exterior) și din semimeridianele sferei de rază

$$a=\left(\frac{M}{2\pi U}\right)^{1/3}.$$

Părțile axei z din interiorul sferei sunt linii de curent, datorite surselor dubleului, și anume linia de curent sau filonul ce pleacă de la sursa pozitivă din centru, mergând în direcția $+z$ până la suprafața sferică, pentru a se resfira pe întreaga suprafață sferică interioară și a se reuni la antipol, spre a se reîntoarce

tot ca filon la sursa negativă din centru. Polul şi antipolul sferei de pe axa z sunt puncte critice, adică vitesele acolo se anulează (Staupunkte), liniile de curent frângându-se, atât cele interioare cât şi cele exterioare, căci linia de curent de pe axa $+z$ ce vine dela $+\infty$ (*filon*) se resfiră la fel pentru a îmbrăţişa întreaga sferă şi a se reuni la antipol, continuând pe restul axei $-z$.

Introducând valoarea lui M în funcţie de a, cele două funcţii se vor scrie:

$$\Phi = -U z\left(1+\frac{a^3}{2r^3}\right)$$

$$\psi = \frac{U\rho^2}{2}\left(1-\frac{a^3}{r^3}\right).$$

Formule găsite mai sus pe atâtea alte căi diferite.

Pentru vitese avem:

$$v^2 = v_\rho{}^2 + v_z{}^2,$$

unde pe de o parte:

$$v_z = \frac{\partial\Phi}{\partial z} = -U - U\frac{a^3}{2r^3}\left(1-\frac{3z^2}{r^2}\right)$$

şi pe suprafaţa sferei $r=a$ (putându-se presupune solidificată):

$$v_{za} = -\frac{3}{2}U\left(1-\frac{z^2}{a^2}\right),$$

iar pe de altă parte, ţinând seama că $\frac{\partial r}{\partial\rho} = \frac{\rho}{r}$:

$$v_\rho = \frac{\partial\Phi}{\partial\rho} = \frac{3}{2}U\frac{z\rho a^3}{r^5}$$

şi pe suprafaţa sferei:

$$v_{\rho a} = \frac{3}{2}U\frac{z\rho}{a^2}.$$

Vitesa pe sferă rezultă din compunerea lui v_{za} cu $v_{\rho a}$ şi, ţinând seamă că acolo $\rho^2 = a^2 - z^2$:

$$v^2 = v_z{}^2 = \frac{9}{4}v^2\left(1-\frac{z^2}{a^2}\right),$$

cu valoarea maximă $\frac{2}{3}U$ la ecuator.

Pentru a găsi însă şi analitic sensul vectorului $\overline{v}$, să atribuim semimeridianei din dreapta sensul trigonometric, după convenţia făcută mai sus, şi să proectăm componentele pe direcţia $\overline{s}$, înmulţind pe v_{za} cu $\frac{\rho}{a}$ şi pe $v_{\rho a}$ cu $-\frac{z}{a}$, în care caz găsim:

$$v_s = -\frac{3}{2}U\frac{\rho}{a} = -\frac{3}{2}U\sin\theta,$$

ceeace puteam prevede, gândindu-ne la modul cum curentul, venit dela ∞ cu viteza $-U$, ocolește sfera.

Punctele critice le regăsim, făcând $v=0$, ad că $z=\pm a$.

In ceea ce privește liniile de curent $\psi_1 = const$ (fig. 45) ale mișcărei absolute (nepermanente), dată de dubleu, ecuația lor se reduce la

$$\frac{\rho^2}{r^3} \equiv \frac{\sin^2\theta}{r} = const,$$

care indică următoarea regulă simplă de construcție: fie $\frac{1}{D}$ constanta din membrul al doilea.

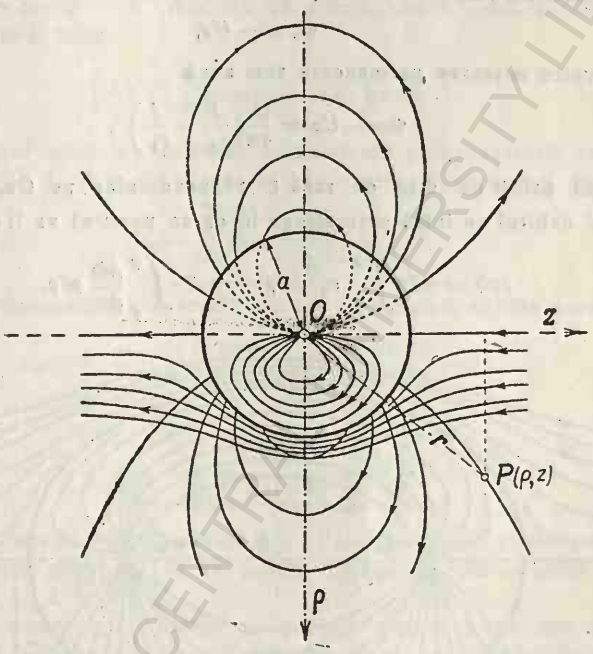


Fig. 45

Pe un cerc de diametru D (figura 46), tangent în origina O la axa Oz, ca să găsim în direcția θ pe r corespunzător, ducem în această direcție coarda $r' = OP'$ și pe ea luăm OP = proecția lui OP' pe axa $O\rho$.

Avem evident

$$OP = D\sin^2\theta,$$

deci

$$\frac{\sin^2\theta}{OP} = \frac{1}{D},$$

adică

$$OP = r.$$

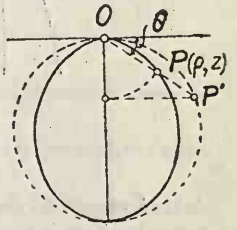


Fig. 46

Aplicația Nr 49. *A se studia câmpul de viteză al unei surse duble punctiforme cu axă (depărtarea între surse) finită, atât singur cât și în suprapunere cu un curent paralel de viteză $-U$ și în direcția contrară axei sursei duble. Se va folosi expresia debitului în funcție de ψ.*

Răspuns. Să presupunem că cele două surse punctiforme $-Q$, $+Q$ se găsesc pe axa z la $\mp a$ de origină, ca în fig. 47.

Funcția de viteză va fi:

$$\Phi_1 = -\frac{Q}{4\pi}\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)$$

iar pentru curentul paralel cu viteza $-U$ în direcția axei z

$$\Phi_0 = -Uz,$$

astfel că, pentru mișcarea permanentă vom avea

$$\Phi = -Uz = \frac{Q}{4\pi}\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right).$$

Debitul printr'un disc de rază ρ, perpendicular pe Oz, cu $\psi=0$ pe axă (considerând debitul ce intră prin stânga lui $c\rho$ ca pozitiv) va fi:

$$2\pi\psi = -2\pi\int_0^\rho v_z\,\rho\,d\rho = -2\pi\int_0^\rho \frac{\partial\Phi}{\partial z}\rho\,d\rho.$$

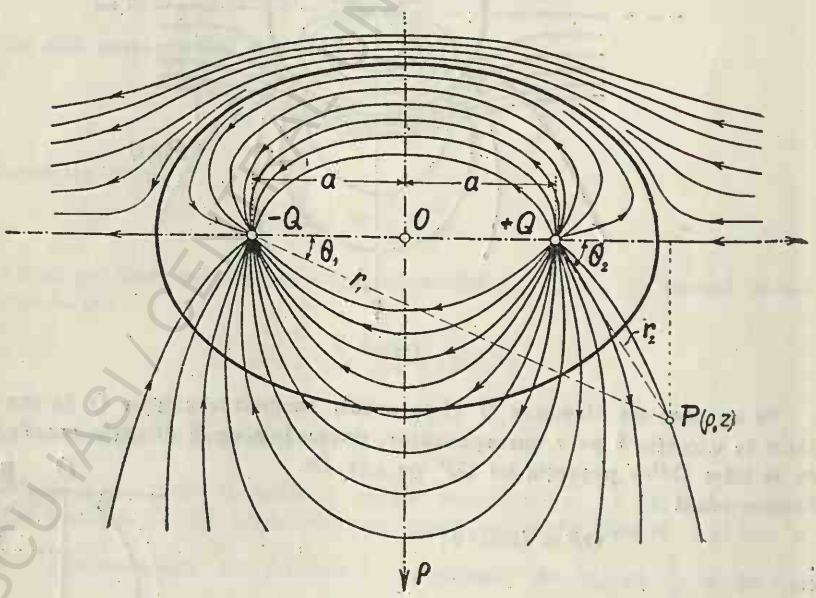


Fig. 47

Cum

$$v_z = -U + \frac{Q}{4\pi}\left(\frac{z-a}{r_2^3}-\frac{z+a}{r_1^3}\right)$$

rezultă

$$\psi = \frac{1}{2} U\rho^2 - \frac{Q}{4\pi}\int_0^{\rho}\left(\frac{z-a}{r_2^2}\frac{\rho}{r^2} - \frac{z+a}{r_1^2}\frac{\rho}{r_1}\right)d\rho$$

$$= \frac{1}{2} U\rho^2 + \frac{Q}{4\pi}\left(\frac{z-a}{r_2} - \frac{z+a}{r_1}\right) = \frac{1}{2} U\rho^2 + \frac{Q}{4\pi}\left(\cos\theta_2 - \cos\theta_1\right). \quad (74)$$

Suprafața de curent închisă, care provine din filonul central $\rho = 0$ de la $-\infty$ prin resfirarea acestuia în p. critic, spre a se reconstitui la p. critic opus în filonul $\rho = 0$ spre $+\infty$, este evident reprezentantă prin $\psi = 0$, pe când în exteriorul suprafeței pe semiaxa $-z$ avem $\rho = 0$, $\cos\theta_2 = \cos\theta_1 = 1$, iar pe semiaxa pozitivă $\rho = 0$ avem $\cos\theta_2 = \cos\theta_1 = -1$. Această suprafață are o formă de elipsă de al 16-lea grad, ecuația ei fiind

$$\frac{1}{2} U\rho^2 + \frac{Q}{4\pi}\left(\cos\theta_2 - \cos\theta_1\right) = 0.$$

Două relațiuni pentru dimensiile longitutinală și transversală se obțin imediat în funcție de Q, U și a, de oarece pe axa ρ avem $r_1 = r_2 = r_0$ și deci

$$U\rho_0^2 = \frac{a}{\pi r_0} Q = \frac{a\,Q}{\pi\sqrt{\rho_0^2 + a^2}},$$

de unde scoatem dimensia transversală $2\rho_0$, iar la punctele critice avem

$$v_z = -U + \frac{Q}{2\pi}\left(\frac{z_0 - a}{(z_0 - a)^3} - \frac{z_0 + a}{(z_0 + a)^3}\right) = 0$$

sau

$$\frac{1}{(z_0 - a)^2} - \frac{1}{(z_0 + a)^2} = \frac{2\pi U}{Q},$$

de unde scoatem dimensia longitudinală $2z_0$. Rezultă o primă aproximație pentru adaptarea la nevoile practice (de ex. pentru aeronave) prin alegerea potrivită a celor 3 parametri Q, U și a.

In privința construcției liniilor de curent, putem trasa mai întâi liniile curentului paralel la distanțe astfel, ca diferitele coroane de lățime $\delta\rho$ să dea același debit, ceea ce necesită ca distanța lor la axa z să fie proporțională cu șirul $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots$

In al doilea rând, liniile de curent de surse duble sunt reprezentate prin

$$\psi_2 \equiv \cos\theta_2 - \cos\theta_1 = const.$$

Resultă următoarea construcție simplă.

Prin fiecare din surse se duce câte un mănunchiu de raze, al căror cosinus director crește sau scade în serie aritmetică.

Intersecțiile celor două mănunchiuri între linii, cari dau $\cos\theta_2 - \cos\theta_1 = const$, aparțin liniei de curent corespunzătoare constantei respective.

Se procedează analog la compunerea câmpului surselor cu câmpul paralel. Curbele diagonale obținute prin intersecțiile celor două familii de curbe (unind punctele ce corespund la aceași sumă constantă) sunt curbele date de ψ din (74),

egalat cu constanta respectivă. Mişcarea fiind permanentă, aceste linii sunt şi traiectoriile moleculelor fluide. Acelaş spectru, însă tot relativ la corp, se obţine dacă se imprimă ansamblului vitesa $-U$.

Liniile mişcărei absolute însă sunt tocmai liniile de câmp ale sursei duble, în afara suprafeţei de separaţie.

Aplicaţia Nr. 50. *A se trata aplicaţia precedentă, cu sursa negativă aruncată la* $-\infty$.

Răspuns. In acest caz, mutând origina în sursa concentrată pozitivă (fig. 48), vom avea:

$$\Phi = -Uz - \frac{Q}{4\pi r}, \qquad \psi = \frac{1}{2}U\rho^2 + \frac{Q}{4\pi}\frac{z}{\rho} - \frac{Q}{4\pi}.$$

Suprafaţa de separaţie va fi

$$\psi_2 = \frac{1}{2}U\rho^2 + \frac{Q}{4\pi}\frac{z}{r} - \frac{Q}{4\pi} = 0.$$

Vârful ei va satisface evident relaţia $z_0 = r_0$, ceea ce cu $\rho = 0$ satisface ecuaţia, transformând-o într'o identitate. Scriind însă

$$\psi_3 = \frac{1}{2}U(r_0^2 - z_0^2) - \frac{Q(r_0 - z_0)}{4\pi} = 0$$

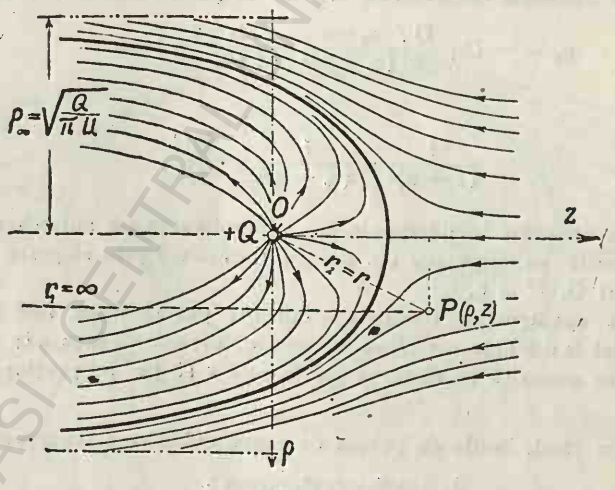


Fig. 48

şi eliminând factorul $r_0 - z_0$, găsim

$$\frac{1}{2}(r_0 + z_0) = z_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{Q}{\pi U}}.$$

Dacă luăm pe z la $-\infty$, avem $-\frac{z}{r} \to 1$ şi curba se apropie asimptotic de un cilindru circular de rază

$$\rho_\infty = \sqrt{\frac{Q}{\pi U}}.$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Aplicația Nr. 51. *A se studia câmpul dat de o repartiție liniară de surse pozitive sau negative pe axa Oz, de la origină spre* $-z$.

Răspuns. Fie $q(z')$ intensitatea de debit, adică debitul pe unitatea de lungime a repartiției de surse pe un segment de lungime a de pe axa $-z$, începând dela origine (fig. 49). Funcția de vitesă va fi:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi}\int_0^{-a} \frac{q(z')\,dz'}{r}$$

cu

$$r = \sqrt{\rho^2 + (z - z')^2},$$

iar în cazul particular $q = const = \frac{Q}{a}$:

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi a}\int_0^{-a} \frac{dz'}{r},$$

care pentru $a = -dz'$, adică în cazul sursei punctiforme simple cu debitul Q, capătă forma cunoscută

$$\Phi = -\frac{Q}{4\pi r}.$$

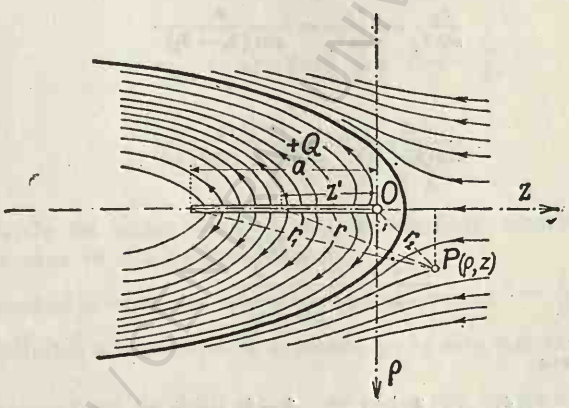


Fig. 49

Integrala:

$$\int_0^{-a} \frac{dz'}{r} \equiv \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{\sin\theta}$$

(căci $z' = z - \rho\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$, $dz' = \frac{\rho}{\sin^2\theta}d\theta$ și $r = \frac{\rho}{\sin\theta}$) se poate efectua după tipul:

$$\int \frac{1}{a + b\cos\theta}\,d\theta = \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}}\log\frac{\sqrt{b-a}\,tg\frac{\theta}{2} + \sqrt{b+a}}{\sqrt{b-a}\,tg\frac{\theta}{2} - \sqrt{b+a}},$$

care pentru $a=0$, $b=1$ și complementul lui θ devine:

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{\sin\theta} = \left[\log \frac{tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)+1}{tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)-1} \right]_{\theta_1}^{\theta_2} = \log \frac{tg\frac{\theta_1}{2}}{tg\frac{\theta_2}{2}}$$

și cum (punând $\cos\theta=\xi$)

$$tg\frac{\theta}{2} = \left(\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}\right)^{1/2} = \left(\frac{1-\xi}{1-\xi}\right)^{1/2},$$

vom putea scrie:

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{2}\log\frac{1-\xi_1}{1+\xi_1} - \frac{1}{2}\log\frac{1-\xi_2}{1+\xi_2} = Q_0(\xi_2) - Q_0(\xi_1)$$

și

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi a}[Q_0(\xi_2) - Q_0(\xi_1)],$$

adică diferența între două funcțiuni sferice *Legendre* de a doua speță.

Din relațiile cunoscute ale unui triunghiu, aplicate la cazul de aci,

$$\frac{r_1}{\sin\theta_2} = \frac{r_2}{\sin\theta_1} = \frac{a}{\sin(\theta_2-\theta_1)}$$

tragem

$$\frac{a}{\sin(\theta_2-\theta_1)} = \frac{r_1+r_2}{\sin\theta_2+\sin\theta_1}$$

adică

$$\frac{r_1+r_2}{a} = \frac{\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}{\sin\frac{\theta_2-\theta_1}{2}}.$$

Cum pe de altă parte

$$\frac{tg\frac{\theta_1}{2}}{tg\frac{\theta_2}{2}} = \frac{\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}-\sin\frac{\theta_2-\theta_1}{2}}{\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}+\sin\frac{\theta_2-\theta_1}{2}} = \frac{r_1+r_2-a}{r_1+r_2+a},$$

vom putea scrie de asemenea

$$\Phi = -\frac{Q}{4\pi a}\log\frac{r_1+r_2-a}{r_1+r_2+a}.$$

Se vede că suprafețele echipotențiale

$$\frac{r_1+r_2-a}{r_1+r_2+a} = const$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

sau

$$r_1+r_2=ka$$

sunt elipsoide de rotație confocale, cu focarele la extremitățile liniei de surse.

Funcția de curent în general este

$$\psi=-\int_0^\rho \frac{\partial\Phi}{\partial z}\rho d\rho=-\frac{1}{4\pi}\int_0^\rho\int_0^a \frac{(z-z')q(z')dz'\rho d\rho}{r^3},$$

iar în cazul particular $q=const=\frac{Q}{a}$, integrând în raport cu ρ $\left(\text{avem } \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\rho}=-\frac{\rho}{r^3}\right)$

$$\psi=\frac{Q}{4\pi a}\int_0^a\frac{(z-z')\,dz'}{r}=\frac{Q\rho}{4\pi a}\int_0^a\frac{\cos\theta\,d\theta}{\sin^2\theta}$$

$$=-\frac{Q}{4\pi a}(r_2-r_1)+C.$$

Dacă convenim că $\psi=0$ pe axa pozitivă (firul), ar trebui să alegem în consecință constanta:

$$-\frac{Q}{4\pi a}(r_2-r_1)-C=0$$

adică

$$-\frac{Q}{4\pi a}(-a)-C=0 \text{ sau } C=-\frac{Q}{4\pi}.$$

Așa dar

$$\psi=-\frac{Q}{4\pi}\left(1+\frac{r_2-r_1}{a}\right).$$

Suprafețele de curent sunt, deci, hiperboloizi confocali, ortogonali cu cele $\Phi=const$, ceea ce era de prevăzut.

Suprapunând acest curent cu un curent paralel având $\psi=\frac{1}{2}U\rho^2$, se obține meridiana periferică a suprafeței de separație, care este mai ascuțită de cât curba precedentă.

Dacă intensitatea de debit a liniei de repartiție crește liniar, începând cu valoarea nulă:

$$q(z')=-\frac{2Q}{a^2}z'$$

(pentru ca să avem în total $\frac{2Q}{a^2}\int_0^{-a}z'dz'=Q$), vom avea

$$\Phi=-\frac{Q}{2\pi a^2}\int_0^{-a}\frac{z'}{r}\,dz'$$

$$\psi=\frac{Q}{2\pi a^2}\int_0^a\frac{(z-z')z'dz'}{r},$$

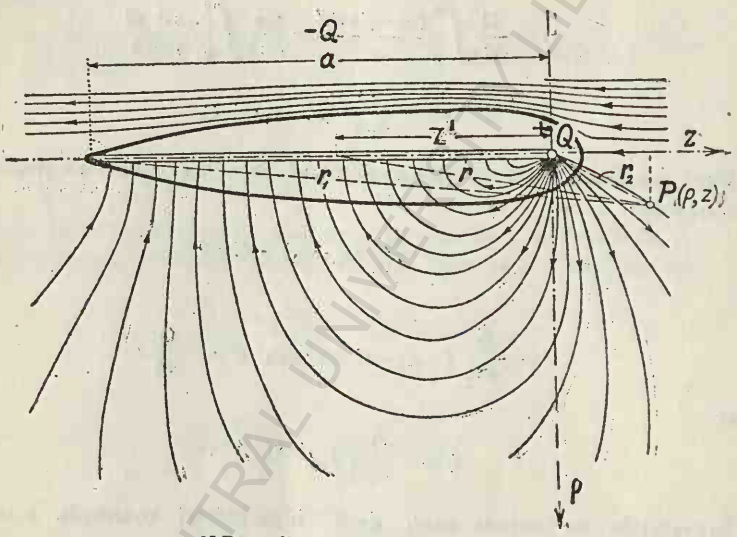
BCU IAȘI / CENTRUL UNIVERSITY LIBRARY

integralele exprimându-se cu ajutorul funcţiunilor sferice de a doua speţă, funcţiuni de θ (la extremităţile repartiţiei).

Pentru o distribuţie de surse negative n'avem de cât să schimbăm pe Q în $-Q$.

Aplicaţia Nr. 52. *Curent în jurul unei aeronave, dat de o sursă simplă pozitivă, aşezată în origină, şi surse negative repartizate uniform pe o lungime a a axei $-z$. (Fuhrmann).*

Soluţie. Pentru determinarea formei celei mai avantajoase a aeronavelor, s'au studiat la *Göttingen* diferite forme, printre care şi aceea menţionată cu repar-



N.B. r din fig. trebue accentuat: r'.

Fig. 50

ţia mai sus arătată (fig. 50) între $z=0$ şi $z=-a$, la care corespund razele vectoare r_2 şi r_1, ce duc la punctul curent P.

Pentru sursa punctiformă pozitivă avem:

$$\Phi_1 = -\frac{Q}{4\pi r_2} \qquad v_z = \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = \frac{Q}{4\pi r_2^2}\frac{z}{r_2}$$

şi (analog ca la aplicaţia 48 sub z constant):

$$2\pi\psi_{poz.} = -2\pi\int_0^{\rho} v_z\,\rho\,d\rho$$

sau:

$$\psi_{poz} = -\frac{Q}{4\psi}\int_0^{\rho}\frac{z}{r_2^3}\rho\,d\rho = -\frac{Qz}{8\pi}\int_0^{\rho^2}\frac{d(\rho^2)}{(\rho^2+z^2)^{3/2}} = -\frac{Qz}{8\pi}\int_{z^2}^{r_1^2}\frac{d(r_2^2)}{(r_2^2)^{3/2}} = -\frac{Q}{4\pi}\left(1-\frac{z}{r_2}\right).$$

(Notăm că diferenţiala acestei funcţii în raport cu z', purând $Q\,dz' = M$, adică:

$-\frac{M\rho^2}{4\pi r^3}$, trebue să ne dea pe ψ_1 al dubleului $-Q, +Q$, ceea ce se verifică; vezi pag. 232).

Funcțiunea de curent pentru sursele negative repartizate se obține prin integrare și n'avem de cât să schimbăm pe Q în $-Q$ în expresia din pag. 241:

$$\psi_{neg} = \frac{Q}{4\pi}\left(1+\frac{r_2-r_1}{a}\right),$$

însă această expresie se mai poate găsi repede, fracționând sursa liniar repartizată în elemente $\frac{Q}{a}dz'$ și aplicând rezultatul de mai sus, cu înlocuirea lui z prin $z-z'$ (schimbare de origină), a lui r prin r' și a lui $\frac{z-z'}{r'}=\cos\theta$ prin $-\frac{dr'}{dz'}=\cos\theta$, în care caz un element dz' dă:

$$d\psi_{neg} = \frac{Q dz'}{4\pi a}\left(1+\frac{dr'}{dz'}\right)=\frac{Q}{4\pi}\left(\frac{dz'}{a}+\frac{dr'}{a}\right)$$

și, deci, integrând de la origina la extremitatea repartiței:

$$\psi_{neg} = \frac{Q}{4\pi}\left(1+\frac{r_2-r_1}{a}\right).$$

Cum sursa pozitivă este plasată la origină, curentul paralel, care va înlesni ca debitul sursei pozitive să treacă cât mai direct la cele negative, va trebui să aibă direcția $-z_1$ (determinând și unul din punctele critice, inevitabil la conturarea sau ocolirea unei suprafețe închise, punct în care, pentru anularea vitesei, trebue ca vitesa din câmpul sursei să fie opusă aceleia a curentului paralel).

Fie $-U$ această din urmă vitesă, determinând funcțiile $\Phi_0=-zU$ și $\psi_0=\frac{\rho^2}{2}U$.

Vom avea

$$\psi=\psi_0+\psi_{poz}+\psi_{neg}=\frac{U\rho^2}{2}+\frac{Q}{4\pi}\left(\frac{z}{r^2}+\frac{r_2-r_1}{a}\right).$$

Meridiana, care corespunde lui $\psi=0$, va fi:

$$\frac{U\rho^2}{2}+\frac{Q}{4\pi}\left(\frac{z}{r_2}+\frac{r_2-r_1}{a}\right)=0,$$

iar vitesele rezultă din expresiile cunoscute în funcție de ψ.

Distanțele celor două vârfuri de la prora și pupă (puncte critice) față de origină se calculează, egalând cu zero vitesa

$$v_z \equiv -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho}.$$

Vom aveea stfel

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\equiv U+\frac{Q}{4\pi}\left[-\frac{z}{r_2^3}+\frac{1}{a}\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)\right]=0.$$

Această relaţie dă, pentru punctul critic dela proră ($z=r_2\equiv r$, $r_1=r_2+a\equiv r+a$):

$$U=-\frac{Q}{4\pi}\left[-\frac{1}{r^2}+\frac{1}{a}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r+a}\right)\right]$$

sau

$$r^3+ar^2=\frac{Qa}{4\pi U},$$

iar pentru punctul critic de la pupă ($z=-r_2\equiv -r$, $r_1=r_2-a\equiv r-a$):

$$U=-\frac{Q}{4\pi}\left[\frac{1}{r^2}+\frac{1}{a}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r-a}\right)\right]$$

sau

$$r^3-ar^2=\frac{Qa}{4\pi U}.$$

Suma celor două valori ale lui r dă lungimea aeronavei.

Din ultima relaţie, scrisă

$$r-a=\frac{Qa}{4\pi U r^2},$$

se vede că punctul critic de la pupă este cu atât mai aproape de extremitatea repartiţiei de surse negative, cu cât a este mai mare (din cauza raportului $\frac{a}{r^2}$ cu $r>a$).

Pentru aplicaţii este important a se cunoaşte condiţiile de scurgere în vecinătatea unui corp de rotaţie (de ex. aeronava lipsită de aceesoriile ei exterioare, cârma, etc).

Pentru înlesnirea rezolvărei problemelor de acest fel se adoptă în locul unei repartiţiuni neuniforme continuă, o repartiţie în trepte, făcându-se calculul separat pentru partea din faţă (din spre proră), care depinde în esenţă de sursele pozitive şi pentru partea dinapoi (dinspre pupă), care depinde în esenţă de sursele negative.

Se obţin astfel (v. *Kármán*), pentru debitele treptelor pozitive şi ale celor negative, câte o serie de ecuaţii, cari se pot rezolva relativ uşor.

Dacă notăm aceste debite şi distanţele punctului curent la extremităţile treptei i cu Q_i, respectiv r_i' şi r_i'', iar lungimea *constantă* a acestor trepte a, vom avea

$$\psi=\psi_0+\psi_{poz}+\psi_{neg}=\frac{Up^2}{2}-\Sigma\frac{Q_i}{4\pi}\left(1+\frac{r''-r'}{a}\right),$$

unde Q_i este pozitiv pentru sursele repartizate pozitive, negativ pentru cele negative.

Ecuaţia $\psi=0$ dă filonul în legătură cu suprafaţa de separaţie. Pentru a face să concorde această suprafaţă cu secţia meridiană a aeronavei proectată, să ne închipuim secţiuni transversale, duse prin mijlocul treptelor, perpendicular pe

axă, care decupează pe suprafaţa de separaţie inele de rază ρ. Dacă r'_{ik} şi r''_{ik} sunt lungimile razelor vectoare de la extremităţile treptei i către un punct periferic de pe inelul k şi punem

$$\frac{Q_i}{2U\pi a^2}=z_2\,, \qquad 1+\frac{r''_{ik}-r'_{ik}}{a}=C_{ik}\,,$$

condiţia $\psi=0$ procură pentru n trepte de surse şi n puncte periferice, ecuaţiile:

$$C_{11}z+C_{21}z_2+\ldots+C_{n_1}z_n=\left(\frac{\rho_1}{a}\right)^2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$C_{1n}\,z_1+C_{2n}\,z_2+\ldots+C_{nn}\,z_n=\left(\frac{\rho_n}{a}\right)^2\,.$$

Coeficienţii C_{ik} se apropie, dacă k şi i diferă mult, de valoarea 2 şi 0, după cum inelul este aşezat la dreapta (în care caz $r''_{ik}-r'_{ik}\cong a$, lungimea treptei) sau la stânga (în care caz $r''_{ik}-r'_{ik}\cong -a$) treptei i. Numai dacă k şi i diferă puţin între ele, coeficientul se depărtează de valorile de mai sus (2 sau 0), iar pentru $i=k$ avem evident $r'_{ik}=r''_{ik}$ şi

$$C_{ii}=C_{kk}=1.$$

5. Complement asupra funcţiunilor cilindrice.

a) **Funcţiuni cilindrice; funcţiuni Bessel şi legătura lor cu problema Hidrodinamică.** Funcţiunile cilindrice sunt funcţiuni ale variabilei ρ şi a unui parametru s, număr real oarecare (deşi se poate generaliza şi pentru s complex), fiind soluţii ale ecuaţiei diferenţiale a lui *Bessel*:

$$\frac{d^2y}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dy}{d\rho}\left(1-\frac{s^2}{\rho^2}\right)y=0\,, \qquad (74)$$

pe a cărei soluţie generală o vom nota: $y=C_s(\rho)$, cu denumirea generică de *funcţie cilindrică*.

De fapt această ecuaţie a fost găsită de *Euler* (1764) cu ocazia studiului vibraţiilor unei membrane întinse, însă *Bessel* a studiat proprietăţile ei principale pentru s număr întreg.

Dacă înlocuim ρ prin $k\rho$, ecuaţia ia forma:

$$\frac{d^2y}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dy}{d\rho}\left(k^2-\frac{s^2}{\rho^2}\right)y=0, \qquad (74.1)$$

care deci nu diferă în esenţă de (74), având drept soluţie generală funcţia cilindrică:

$$y=C_s(k\rho).$$

O soluţie formală a ecuaţiei (74) se obţine punând:

$$y = \rho^s (a_0 + a_2\rho^2 + a_4\rho^4 + \dots), \qquad (74.2)$$

coeficienţii (evident dependenţi de s) fiind astfel aleşi, ca să satisfacă ecuaţia lui *Bessel* de indice s. Această soluţie, dacă prescriem $a_0 = 1$ (şi deci pentru $s = 0$ şi $\rho = 0$ valoarea $y = 1$), se însemnă cu $I_s(\rho)$ şi se numeşte funcţiune *Bessel de prima speţă*, de *indice* sau *ordin* s. In cazul $s \geq 0$, $I_s(o)$ cu $\rho = 0$ rămâne finit.

Venind acum la problema hidrodinamică, dacă în ecuaţia lui *Laplace* $\Delta\Phi = 0$, care este ecuaţia de continuitate a fluidelor incompresibile, Φ fiind o funcţie de vitesă, introducem coordonatele cilindrice z, ρ, φ, această ecuaţie, precum am văzut la *Complementul* respectiv, ia forma:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} = 0, \qquad (75).$$

care se obţine şi pe altă cale, exprimând că debitul total prin suprafaţa limitativă a paralelipipedului elementar $dz\, dr\, rd\theta$ (sau volumul acestuia, înmulţit cu $div\ \overline{v}$) este nul.

Dacă există simetrie în jurul axei z, ecuaţia se reduce la forma:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} = 0. \qquad (75.1)$$

O soluţie particulară a acestei ecuaţiuni este:

$$\Phi = e^{\pm kz} y(\rho),$$

cu condiţia, ce rezultă imediat prin înlocuire, ca $y(\rho)$ să satisfacă ecuaţia:

$$\frac{dy^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dy}{d\rho} + k^2 y = 0, \qquad (76.1)$$

care este de forma (74,1) a ecuaţiei lui *Bessel* pentru $s = 0$, soluţia ei de prima speţă fiind $I_0(k\rho)$, adică o funcţie *Bessel* de indice sau ordin zero.

Soluţia generală a ecuaţiei lui *Bessel* sub forma (74) sau (74,1), care în problema hidrodinamică interesează sub forma particulară (76.1), este firesc suma a două speţe de funcţii de ρ înmulţite fiecare cu câte o constantă arbitrară.

Soluţia $I_s(\rho)$ se obţine uşor prin determinarea coeficienţilor $a_1, a_2 \dots$, fiind:

$$J_s(\rho) = \frac{\rho^s}{2^s \Pi(s)} \left\{ 1 - \frac{\rho^2}{2(2s+2)} + \frac{\rho^4}{2.4.(2s+2)(2s+4)} - \dots \right\}$$

$$= \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \rho^{s+2n}}{2^{s+2n} n! \, \Pi(s+n)},$$

unde:

$$\Pi(s) = \lim_{m=\infty} \frac{1.2.3 \dots m . m^s}{(s+1)(s+2)\dots(s+m)},$$

care pentru s întreg devine egal cu $s!$ Așa dar, pentru s întreg vom avea:

$$I_s(\rho) = \frac{\rho^s}{2^s . s!} \left(1 - \frac{\rho^2}{2(2s+2)} + \frac{\rho^4}{2.4.(2s+2)(2s+4)} - \dots \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \rho^{s+2n}}{2^{s+2n} n! \, (s+n)!}.$$

Această serie este convergentă, $I_s(\rho)$ fiind funcțiuni transcendente întregi. In particular pentru $s=0$, caz care ne interesează aci în deobște, avem:

$$I_0(\rho) = 1 - \frac{\rho^2}{2^2} + \frac{\rho^4}{2^2.4^2} - \frac{\rho^6}{2^2.4^2.6^2} + \dots \qquad (77)$$

Așa dar, soluția (76) a ecuației (75,1), care în fond este relația de continuitate a fluidului incompresibil în caz de simetrie în în jurul axei z, este explicit:

$$\Phi = e^{\pm kz} I_0(k\rho), \qquad (78)$$

funcție pe care o putem numi *armonică axial-simetrică* (în jurul axei z).

Dar noi știm că:

$$v_\rho = \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial z},$$

astfel că, prin derivarea lui Φ în raport cu ρ și integrarea rezultatului în raport cu z (lăsând deoparte constanta arbitrară $f(\rho)$ de la această integrare, deoarece $f(\rho)$ trebue să fie nul, după cum rezultă din cealaltă relație

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho}.$$

și utilizarea formulei

$$\frac{dI_1(x)}{dx} = -\frac{1}{x} I_1 + I_0,$$

punând $x=\rho k$), obținem

$$\psi = \pm \rho e^{\pm kz} I'_0(k\rho). \qquad (79)$$

Ori, știm că:

$$\cos(\rho\cos\alpha) \equiv 1 - \frac{\rho^2\cos^2\alpha}{2!} + \frac{\rho^4\cos^4\alpha}{4!} - \frac{\rho^6\cos^6\alpha}{6!} + \ldots \pm \frac{\rho^{2n}\cos^{2n}\alpha}{(2n)!}$$

și cum avem pentru medie:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos^{2n}\alpha\, d\alpha \equiv \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n},$$

rezultă că termenul general al desvoltării mediei

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(\rho\cos\alpha)\, d\alpha$$

va fi ρ^{2n} înmulțit cu factorul numeric:

$$\frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n}\,\frac{1}{(2n)!} \equiv \frac{1}{(2.4.6\ldots 2n)^2},$$

care se poate ușor identifica cu factorul numeric al termenului de același grad, din desvoltarea (77), care și el este:

$$\frac{1}{(2.4.6\ldots 2n)^2} \equiv \frac{1}{(n!\,2^n)^2},$$

rezultând:

$$I_0(\rho) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(\rho\cos\alpha)\, d\alpha \equiv \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{i\rho\cos\alpha}\, d\alpha; \qquad (80)$$

căci pe de altă parte știm că:

$$\sin(\rho\cos\alpha) \equiv \rho\cos\alpha - \rho^3\frac{\cos^3\alpha}{3!} + \rho^5\frac{\cos^5\alpha}{5!} - \ldots,$$

iar mediile valorilor puterilor impare ale liniilor trigonometrice sunt nule, astfel că:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(\rho\cos\alpha)\, d\alpha \equiv 0.$$

UCLA MATH / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Dar formula (78), scrisă atunci sub forma:

$$\Phi = \frac{1}{\pi} e^{\pm kz} \int_0^{\pi} e^{\mp ik\rho\cos\alpha} d\alpha = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{\pm k(z+i\rho\cos\alpha)} d\alpha$$

devine de tipul formulei (63).

b) **Funcţia Bessel drept caz limită a funcţiei Legendre. Funcţia armonică axial-simetrică drept caz limită a armonicei sferice (de spaţiu).** Este uşor de înţeles că trebue să existe rudenie între funcţiunile *Bessel* şi cele sferice, mai întâi fiindcă ambele sunt mijloace proprii pentru rezolvirea a numitor probleme şi apoi prin consideraţiuni la limită. Astfel, dacă centrul sferei, luat ca origină O pentru funcţiunile *Legendre*, se depărtează la ∞ ($r \to \infty$), alunecând de ex. pe axa z spre $-\infty$, coarda ρ_1 a arcului, corespunzător unghiului la centru θ, va tinde în spaţiul finit către ρ al unei funcţii *Bessele*. In acelaşi mod, luând pentru z o origină mobilă O' în spaţiul finit, o funţie armonică sferică (de spaţiu) axial-simetrică va tinde în aceleaşi condiţiuni către o funcţie armonică axial-simetrică de forma (78) etc.

Să arătăm mai întâi că o funcţie *Legendre simplă* ($=$ *zonală*) $\mathcal{P}_n$ tinde către o funcţie *Bessel*, în cazul când atât ordinul n, cât şi depărtarea r a originei de la punctul considerat P, devin infinite, într'un anumit raport între ele, de ex. $\frac{n}{a} = k$, unde (vezi fig 51) $\frac{a}{r} \to 1$, atunci când centrul O se depărtează la $-\infty$, după cum s'a descris mai sus, pe axa z.

In acest scop, în funcţiunea $\mathcal{P}_n(\xi)$ să introducem în locul lui $\xi \equiv \cos\theta$ variabila $\rho_1 \equiv 2r \sin\frac{\theta}{2}$ (coarda arcului de rază r, care corespunde unghiului la centru θ). Când origina se depărtează la ∞ pe $-z$, ρ_1, care tinde către ρ, se poate exprima prin

$$\rho_1 = 2\alpha \sin\frac{\theta}{2} .$$

Ori, în asemenea condiţii, înlocuind $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{\rho_1}{2a}$ în formula 37), obţinem

$$\mathcal{P}_n(\xi)\equiv\mathcal{P}_n(\cos\theta)=1-\frac{n(n+1)}{1^2.2^2}\frac{\rho_1^2}{a^2}+\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{1^2.2^2}\frac{\rho_1^4}{2^4a^4}$$

$$-\frac{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)}{1^2.2^2.3^2}\frac{\rho^6}{2^6a^6}$$

$$+\frac{(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1^2.2^2.3^2.4^2}\frac{\rho^8}{2^8a^8}-\ldots$$

sau, desfăcând multiplicatorul lui a^{2m} în m factori de 2^2 pentru a înmulţi cu câte 2^2, pe fiecare din factorii numerici ai numitorului fracţiei numerice:

$$\mathcal{P}_n(\xi)\equiv\mathcal{P}_n(\cos\theta)=1-\frac{n(n+1)}{2^2}\frac{\rho_1^2}{a^2}+\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{2^2.4^2}\frac{\rho_1^4}{a^4}$$

$$-\frac{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)}{2^2.4^2.6^2}\frac{\rho_1^6}{a^6}$$

$$+\frac{(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2^2.4^2.6^2.8^2}\frac{\rho_1^8}{a^8}-\ldots.$$

Făcând acum ca n şi a să crească la ∞ cu menţinerea raportului $\frac{n}{a}=k$ şi ţinând seamă că $\frac{n\pm1}{a},\ldots\frac{n\pm m}{a}$ tind de asemenea către k, obţinem:

$$\mathcal{P}_{n\to\infty}=1-\frac{k^2}{2^2}\rho^2+\frac{k^4}{2^2.4^2}\rho^4-\frac{k^6}{2^2.4^2.6^2}\rho^6+\frac{k^8}{2^2.4^2.6^2.8^2}\rho^8-\ldots$$

sau:

$$\mathcal{P}_{n\to\infty}(\xi)=\mathcal{P}_{n\to\infty}\left(\cos\frac{\rho}{a}\right)\equiv\mathcal{P}_{n\to\infty}\left(\cos\frac{k\rho}{n}\right)=I_0(k\rho).$$

In cazul $k=1$ avem:

$$\mathcal{P}_{n\to\infty}\left(\cos\frac{\rho}{n}\right)=I_0(\rho).$$

Pentru mai multă generalitate să plecăm dela formula (48) (pag. 197) cu s număr întreg (funcţie *Legendre*)

$$\mathcal{P}_n^s(\xi)=\frac{(n+s)!}{2^s.(n-s)!\,s!}\sin^s\theta\left\{1-\frac{(n-s)(n+s+1)}{1.(s+1)}\sin^2\frac{\theta}{2}\right.$$

$$\left.+\frac{(n-s-1)(n-s)(n+s+1)(n+s+2)}{1.2.(s+1)(s+2)}\sin^4\frac{\theta}{2}-\ldots\right\}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

şi să facem aceaşi înlocuire de variabilă: $\rho_1 = 2a \sin \frac{\theta}{2}$; găsim:

$$\mathcal{P}_n^s(\cos\theta) = \mathcal{P}_n^s(\xi) = \frac{(n+s)!}{2^s(n-s)!\,s!}\left(\frac{\rho_1}{a}\right)^s\left\{1 - \frac{(n-s)(n+s+1)}{1.(s+1)}\frac{\rho_1^2}{2^2a^2}\right.$$

$$\left. + \frac{(n-s-1)(n-s)(n+s+1)(n+s+2)}{1.2.(s+1)(s+2)}\frac{\rho_1^4}{2^4a^4} - \cdots\right\}$$

şi

$$\mathcal{P}_{n\to\infty}^s(\cos\theta) = \frac{n^s(k\rho)^s}{2^s.s!}(k\rho)^s\left\{1 - \frac{k^2}{2(2s+2)}\rho^2\right.$$

$$\left. + \frac{k^2}{2.4.(2s+2)(2s+4)}\rho^4 - \cdots\right\}$$

sau (pag. 247)

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{P}_n^s(\cos\frac{\rho}{a}) = \mathcal{P}_{n\to\infty}^s(\cos\frac{k\rho}{n}) = I_s(k\rho).$$

Pentru $k = 1$ avem

$$\lim\left[n^{-s}\mathcal{P}_n^s(\cos\frac{\rho}{n})\right] = I_s(\rho).$$

Să trecem acum la funcţia sferică de spaţiu (armonica sferică), care s'ar putea asimila la limită cu o armonică axial-simetrică de tipul (78).

Forma unei asemenea funcţiuni sferice de spaţiu, construită cu armonica sferică de ordinul n, se va scrie, pentru a fi fără dimensiuni ca şi funcţia (78), în cele două categorii a 2-a şi 1-a:

$$\Phi_n = \frac{r^n}{a^n}\mathcal{P}_n(\xi),$$

respectiv

$$\Phi_{-(n+1)} = \frac{a^{n+1}}{r^{n+1}}\mathcal{P}_n(\xi).$$

Dacă în loc de ρ şi z, coordonatele curente faţă de sistemul de referinţă cu origina în O (fig. 51), la care se referă funcţiunea *Bessel* (78), am lua variabilele ρ_1 şi z_1 (coarda şi $r-a$), definite pe figură de cercul cu raza $O'P = r$, al cărui centru O',

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

luat ca altă origină, se depărtează în jos la ∞, se poate spune că, $O'O \equiv a$ crescând la ∞, z_1 va tinde către z, adică:

$$\frac{r^n}{a^n} \text{ va tinde către } \left(\frac{a+a}{a}\right)^n \equiv \left(1+\frac{z}{a}\right)^n,$$

iar $\left(\frac{z}{a}\right)^{n+1}$ va tinde către

$$\left(\frac{r-z}{r}\right)^{n+1} \equiv \left(1-\frac{z}{r}\right)^{n+1}.$$

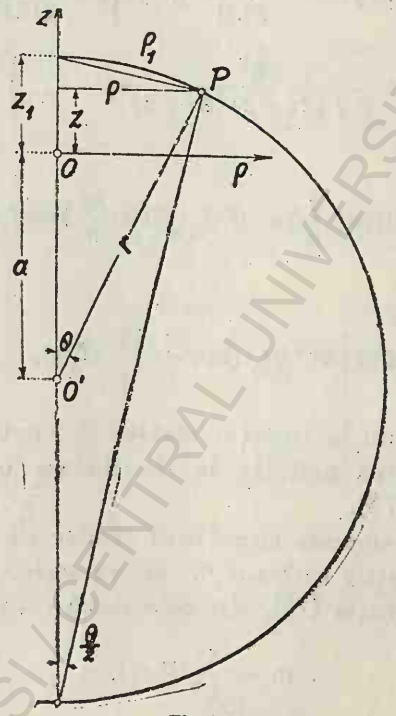


Fig. 51

Cum pentru $a \to \infty$ avem:

$$\frac{n}{a} \text{ deci şi } \frac{n+1}{a+z} \cong \frac{n+1}{r}$$

tinzând către k, vom avea la limită, după formula $lim\ (1+\varepsilon)^{1/\varepsilon} = e$ pentru $\varepsilon \to 0$,

$$\left(1+\frac{z}{a}\right)^n = \left(1+\frac{z}{a}\right)^{\frac{a}{z}\frac{nz}{a}} \to e^{kz}.$$

BCU IASI - CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

și

$$(1-\frac{z}{r})^{n+1}=(1-\frac{z}{r})^{-\frac{r}{z}\frac{n+1}{r}}\to e^{-kz}.$$

Pe de altă parte, am uzat mai sus de faptul că $\rho_1=2r\sin\frac{\theta}{2}$, deci și echivalentul său $2a\sin\frac{\theta}{2}$ tinde către ρ, ceea ce ne-a condus la relația:

$$\mathcal{P}_{n\to\infty}(\xi)\to I_0(k\rho).$$

Vom avea, așa dar, în ansamblu:

funcția sferică de a doua categorie: $\Phi_n=\frac{r^n}{a^n}\mathcal{P}_n(\xi)\to e^{kz}\,I_0(k\rho)$

funcția sferică de prima „ : $\Phi_{-(n+1)}=\frac{a^{n+1}}{r^{n+1}}\mathcal{P}_n(\xi)\to e^{-kz}\,I_0(k\rho)$.

Conchidem, că orice funcție de ρ se va putea exprima prin funcțiuni *Bessel* de ordinul zero, prin analogie cu funcțiile zonale.

Intradevăr la pag. 103, am văzut că o funcție arbitrară de θ sau $\xi\equiv\cos\theta$ pe sfera unitară se poate desfășura în funcțiuni sferice zonale:

$$f(\xi)=\Sigma\frac{2n+1}{2}\mathcal{P}_n(\xi)\int_{-1}^{+1}f(\xi')\mathcal{P}_n(\xi')d\xi' \qquad (81)$$

și cum la limită am văzut că putem pune:

$$\rho=2a\sin\frac{\theta}{2},\ \text{de unde}\ \rho d\rho=-a^2d\xi,$$

formula (81) se va putea scrie în ρ, pentru a foarte mare:

$$F(\rho)=\frac{1}{a^2}\Sigma\,(n+\frac{1}{2})\,H_n(\rho)\int_0^{2a}F(\rho')H_n(\rho')\rho'd\rho'. \qquad (81.2)$$

Dacă punem acum $k=\frac{n}{a}$ cu saltul $\delta k=\frac{1}{a}$, făcând să tindă a către ∞, obținem formula importantă:

$$F(\rho)=\int_0^\infty I_0(k\rho)\,kdk\int_0^\infty F(\rho')I_0(k\rho')\rho'd\rho'. \qquad (81.3)$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Dacă trecem acum la ecuaţia completă

$$\Delta\Phi \equiv \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{d\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} = 0$$

şi desvoltăm funcţia Φ într'o serie trigonometrică, ai cărei termeni sunt ordonaţi după $cos s\varphi$ şi $sin s\varphi$, coeficientul unui asemenea termen va satisfae evident o ecuaţie de forma:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\rho^2}\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} - \frac{s^2}{\rho^2}\Phi = 0, \qquad (82)$$

ecuaţia care se satisface de

$$\Phi = e^{\pm kz} y(\rho), \qquad (82.1)$$

unde $y(\rho)$ este o soluţie a ecuaţiei lui *Bessel* de ordinul s:

$$y''(\rho) + \frac{1}{\rho}y'(\rho) + (k^2 - \frac{s^2}{\rho^2})y(\rho) = 0. \qquad (83)$$

Soluţia, care pentru $\rho = 0$ este finită, poate fi scrisă în forma

$$y(\rho) = C I_s(k\rho) \qquad (83.1)$$

unde:

$$I_s(k\rho) = \frac{(k\rho)^s}{2^s \Pi(s)}\left\{1 - \frac{(k\rho)^2}{2(2s+2)} + \frac{(k\rho)^4}{2.4.(2s+2)\,2s+4)} - \ldots\right\} \qquad (84)$$

Soluţia completă a ecuaţiei (83) mai cere adăogarea unei funcţii *Bessel* de a *doua speţă*.

Soluţiunile găsite pentru ecuaţia $\Delta\Phi = 0$ sunt deci de tipurile:

$$\Phi = \left\{\begin{matrix} e^{\pm kz} I_s(k\rho)\cos s\varphi \\ e^{\pm kz} I_s(k\rho)\sin s\varphi \end{matrix}\right\}.$$

Ele se mai pot considera ca forme-limite ale funţiunilor sferice de spaţiu (nedimensionale), de a 2-a şi de 1-a categorie:

$$\frac{r^n}{a^n}\mathcal{P}_n^s(\xi)\begin{cases}\cos s\varphi \\ \sin s\varphi,\end{cases} \qquad \text{respectiv:} \quad \frac{a^{n+1}}{r^{n+1}}\mathcal{P}_n^s(\xi)\begin{cases}\cos s\varphi \\ \sin s\varphi,\end{cases}$$

dacă întrebuinţăm desvoltarea (48).

Formula (81,3) permite între altele a se exprima valoarea lui Φ pe o parte a unui plan indefinit ($z = 0$), cu ajutorul valo-

rilor Φ sau $\frac{\partial\Phi}{\partial n}\left(=\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)$ din punctele acestui plan, în hipoteza că există simetrie în jurul unei axe (oz), perpendiculare pe acest plan.

Dacă de exemplu: $\Phi = F(\rho)$ pentru $z=0$, vom avea pe partea planului cu $z>0$ (luăm funcţia exponenţială e^{-kx} pentru ca la $x=\infty$ să se anuleze):

$$\Phi = \int_0^\infty e^{-kz} I_0(k\rho)\, kdk \int_0^\infty F(\rho')\, I_0(k\rho')\, d\rho'.$$

Şi întradevăr, făcând aci $z=0$, căpătăm exact membrul al doilea din (81,3) şi deci

$$\Phi = F(\rho). \qquad (84,1)$$

Deasemnea dacă:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = f(\rho) \quad \text{pentru } z=0$$

vom avea:

$$\Phi = -\int_0^\infty e^{-kz} I_0(k\rho)\, dk \int_0^\infty f(\rho')\, I_0(k\rho')\rho' d\rho' . \qquad (85)$$

Şi întradevăr, derivând în raport cu z şi făcând apoi $z=0$, găsim relaţia:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = \int_0^\infty e^{-kz} I_0(k\rho) kdk \int_0^\infty f(\rho')\, I_0(k\rho')\rho' d\rho',$$

al cărei membru al doilea este acelaşi ca la (81,3), unde am avea anume $f(\rho')$ în loc de $F(\rho')$, astfel că vom avea aci

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = f(\rho). \qquad (85.1)$$

O altă soluţie a aceleiaşi probleme s'a dat prin următoarele formule (pag. 148—9), cari dau pe Φ, prin o repartiţie excluziv de dubleuri, sau excluziv de surse simple pe frontiera plană $z=0$

$$\Phi = -\frac{1}{2\pi}\int^\sigma \Phi \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma, \qquad (86)$$

respectiv

$$\Phi = \frac{1}{2\pi}\int^\sigma \frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{d\sigma}{r}, \qquad (87)$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

căci aci direcția $\overline{n}$ se confundă cu direcția $-z$, iar în loc de 4π avem 2π, întrucât Φ, respectiv $\frac{\partial\Phi}{\partial z}$, este luat o singură dată).

Iată câteva aplicații ale formulelor generale (85) și (84).

Aplicația Nr 53. *Să luăm în origină o sursă izolată cu* $Q=1$, *a cărei funcție de vitesă* Φ *va fi deci* $-\frac{Q}{4\pi r}=-\frac{1}{4\pi r}$ *și să căutăm pe* Φ *cu ajutorul formulei* (85).

Răspuns. Fiind vorba aci de funcțiuni continue, vom evita concepția sursei punctiforme, pentru a cărei funcție de vitesă, punctul sursei este un punt singular. Vom admite deci că sursa izolată este constituită din o repartiție pe un cerc foarte mic de rază a în jurul originei, având în shimb o intensitate liniară foarte mare, astfel ca să dea același debit $Q=1$, iar în spațiul $z>1$, un debit intrând prin frontieră $=\frac{1}{2}$.

Vom scrie, așa dar, întrebuințând expresia intensității de sursă simplă $\frac{\partial\Phi}{\partial z}$, ce figurează în (87), ținând seamă și de (85,1):

$$\int_0^a f(\rho)\,2\pi\rho d\rho \equiv 2\pi\int_0^\infty f(\rho)\rho d\rho = \frac{1}{2}, \quad \text{deci} \quad \int_0^\infty f(\rho)\rho d\rho = \frac{1}{4\pi}.$$

Ultima integrală nu diferă ca valoare, de integrala: $\int_0^\infty f(\rho')I_0(k\rho')\rho' d\rho'$ din (85), căci pentru ρ foarte mic avem: $I_0(0)=1$.

Rezultă după (85):

$$\Phi=-\frac{1}{4\pi}\int_0^\infty e^{-kz}I_0(k\rho)dk$$

și deci după (79)

$$\psi=\frac{1}{4\pi}\rho\int_0^\infty e^{-kz}I_1(k\rho)dk,$$

căci $I_0'=-I_1$. Comparând-o cu ceea ce cunoaștem pentru sursa simplă $\Phi=-\frac{1}{4\pi r}$ și $\psi=\frac{\rho^2}{r(r+z)}$ $\left(\text{se verifică ușor că: } \frac{\partial\Phi}{\partial\rho}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)$, rezultă că va trebui să avem:

$$\int_0^\infty e^{-kz}I_0(k\rho)dk=\frac{1}{r}.$$

și:

$$\int_0^\infty e^{-kz}I_1(k\rho)dk=\frac{\rho}{r(r+z)}.$$

Ori aceste relațiuni ale funcțiunilor *Bessel* sunt cunoscute.

Aplicația Nr. 54. *A se găsi funcția de viteză și cea de curent a unei repartiții uniforme de surse simple pe un cerc de rază finită a în jurul originei, așezat în planul z=0.*

Răspuns. Repartiția de surse simple fiind uniformă, densitatea superficială de debit:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = f(\rho) = f(a),$$

este constantă și, lăsând acest factor constant de o parte, avem integrala:

$$\int_0^a I_0(k\rho')\rho' d\rho' = \frac{a}{k} I_1(ka),$$

egalitatea cu membrul al doilea verificându-se prin relația cunoscută:

$$\frac{dI_1(\xi)}{d\xi} = -\frac{1}{\xi} I_1 + I_0.$$

Vom avea după (85):

$$\Phi = -\frac{1}{\pi a} \int_0^\infty e^{-kz} I_0(k\rho) I_1(ka) \frac{dk}{k}$$

$$\psi = \frac{\rho}{\pi a} \int_0^\infty e^{-kz} I_1(k\rho) I_1(ka) \frac{dk}{k}.$$

Aplicația Nr. 55. *Să găsim pe Φ și pe ψ la problema precedentă, însă cu o repartiție a intensității de debit: $\frac{C}{\sqrt{a^2-\rho^2}}$ cu C constant, deci descrescând dela un maximum în centru, la zero pe periferie.*

Răspuns. Integrala finală din (85) devine atunci:

$$\int_0^a I_0(k\rho) \frac{\rho d\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}},$$

care, introducând variabila unghiulară $\sin\alpha = \frac{\rho}{a}$, se reduce la forma simplă (dezvoltăm pe $I_0(ka\sin\alpha)$ în serie și integrăm pe fiecare termen în parte):

$$Ca \int_0^{\pi/2} I_0(ka\sin\alpha) \sin\alpha \, d\alpha = C \frac{\sin ka}{k}.$$

Dacă punem și aci condiția ca debitul total al repartiției să fie egal cu 1

$$C \int_0^a \frac{2\pi\rho d\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}} = C 2\pi a = 1,$$

vom avea: $C = \frac{1}{2\pi a}$, iar (85) ne va da

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\left.\begin{aligned}\Phi &= -\frac{1}{2\pi a}\int_0^\infty e^{-kz} I_0(k\rho)\sin ka\,\frac{dk}{k}\\ \psi &= \frac{\rho}{2\pi a}\int_0^\infty e^{-kz} I_1(k\rho)\sin ka\,\frac{dk}{k}\end{aligned}\right\}. \tag{88}$$

In Eletrostatică se arată că, la o repartiție a sarcinei după legea de mai sus, potențialul Φ pe suprafața cercului este constant. Și intradevăr (făcând $z=0$) se poate arăta că avem:

$$\int_0^\infty I_0(k\rho)\sin ka\,\frac{dk}{k} = \frac{\pi}{2} \quad \text{sau} \quad = \arcsin\frac{a}{\rho}, \tag{89}$$

după cum $\rho \lessgtr a$.

Se arată deasemenea că avem, în aceleași condiții:

$$\int_0^\infty I_1(k\rho)\sin ka\,\frac{dk}{k} = \frac{a-\sqrt{a^2-\rho^2}}{\rho}, \quad \text{respectiv} = \frac{a}{\rho}. \tag{89.1}$$

Formulele (88) dau curentul unui lichid, care trece printr'un orificiu circular, practicat într'un perete subțire plan.

Aplicația Nr. 56. *A se studia cazul, când se dă Φ pe planul $z=0$ după regula de distribuție pe un disc:*

$$\Phi = C\sqrt{a^2-\rho^2} \quad \text{pentru} \quad \rho < a$$
$$\Phi = 0 \quad \text{„} \quad \rho > a.$$

Răspuns. Găsim mai întâiu pentru integrala finală din (84), lăsând deocamdată constanta la o parte:

$$\int_0^a I_0(k\rho)\sqrt{a^2-\rho^2}\,\rho\,d\rho = a^2\int_0^{\pi/2} I_0(ka\sin\alpha)\sin\alpha\cos^2\alpha\,d\alpha = a^3\psi_1(ka)$$

unde:

$$\psi_1(\xi) = \frac{1}{3}\left\{1-\frac{\xi^2}{2\,5}+\frac{\xi^4}{2.4.5.7}-\cdots\right\} = -\frac{d}{\xi d\xi}\frac{\sin\xi}{\xi}$$

și deci (84) se va scrie:

$$\Phi = -C\int_0^\infty e^{-kz} I_0(k\rho)\,\frac{d}{dk}\left(\frac{\sin ka}{k}\right)dk.$$

Derivând în raport cu z și făcând apoi $z=0$, găsim:

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)_0 = C\int_0^\infty k I_0(k\rho)\,\frac{d}{dk}\left(\frac{\sin ka}{k}\right)dk$$

și prin integrare prin părți în raport cu k:

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)_0 = \left[C\,I_0(k\rho)\sin ka\right]_0^\infty - C\int_0^\infty\left[I_0(k\rho)+k\rho I_0'(k\rho)\right]\frac{\sin ka}{k}\,dk,$$

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

sau, cum $I_0(\infty)=0$, ceea ce face să dispară primul termen din membrul al doilea, și luând derivata după normala exterioară spațiului $z>0$:

$$-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)_0 = C\int_0^\infty I_0(k\rho)\frac{\sin ka}{k}\,dk + C\rho\int_0^\infty I'_0(k\rho)\sin ka\,dk.$$

Valoarea primei integrale este dată de (89), iar aceasta, derivată în raport cu ρ, dă pe a doua. Avem astfel, după cum $\rho \lessgtr a$:

$$-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right) = \frac{\pi}{2}C, \quad \text{respectiv} = C\left(\arcsin\frac{a}{\rho} - \frac{a}{\sqrt{\rho^2-a^2}}\right).$$

In cazul $\rho<a$, viteza $-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)_0$ este constantă și egală cu $\frac{\pi}{2}C$.

Fie U această viteză, cu care putem elimina constanta:

$$C=\frac{2}{\pi}U.$$

Energia cinetică a lichidului va fi, integrând pe întreaga frontieră ($z=0$) a spațiului $z>0$ și dublând, în scop de a avea expresia $2T$ și pentru spațiul $z<0$:

$$2T = \frac{2\varpi}{g}\int_\sigma \Phi\frac{\partial\Phi}{\partial n}\,d\sigma = -\frac{2\varpi}{g}\int_\sigma \Phi\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)_0 d\sigma = \frac{\varpi}{g}\pi C^2\int_0^a \sqrt{a^2-\rho^2}\,2\pi\rho\,d\rho$$

$$= \frac{2}{3}\frac{\varpi}{g}\pi^2a^3C^2 = \frac{8}{3}\frac{\varpi}{g}a^3U^2$$

deci:

$$T = \frac{4}{3}\frac{\varpi}{g}a^3U^2 = \frac{2}{\pi}\frac{1}{2}\frac{\varpi}{g}VU^2.$$

Sporirea aparentă a masei discului este, așa dar, egală cu de $\frac{2}{\pi}=0{,}6366$ ori masa unei sfere lichide de același diametru cu discul.

Aplicația Nr. 57. *A se găsi meridiana suprafeței afectată de o bulă de aer, alimentată un timp oarecare la bază, și care se ridică într'un tub de diametru nu prea mic în virtutea principiului lui Archimede (teză de doctorat a D-lui Dr. Ing. D. Dumitrescu: Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, Band 23 S. 139—149, Juni 1943).*

Răspuns. Să examinăm mai întâiu partea fizică a fenomemului.

Dacă bula se menține ca formă (crescând în volum, mai întâiu câtva timp prin aportul de aer la bază, iar apoi prin dilatare aproape exclusiv în lungime, pe măsură ce urcă într'o regiune mereu mai deprimată), aceasta se datorește tensiunei superficiale a lichidului, care echilibrează diferența de presiune de o parte și de alta a peliculei de lichid înconjurătoare. Această diferență, între presiunea din lichid nehidrostatică (căci de fapt moleculele sunt puse în mișcare de bulă după liniile de curent din fig. 52) și presiunea quazi-constantă din bulă (neglijând greutatea aerului), se prezintă crescândă în sus, în care sens deci crește și curbura

meridianei, analog ca la un aerostat. Se știe că, în virtutea tensiunei superficiale, calota superioară a unei bule de aer *liberă*, fără a fi riguros sferică (din cauza legei menționate), se apropie de această formă cu atât mai mult, cu cât dimensiunea transversală a bulei este mai mică. Tendința de creștere a calotei pe măsura urcării într'o regiune din ce în ce mai deprimată, este aci compensată mai mult sau mai puțin prin constrângerea dilatărei *laterale* a aerului, ceeace face ca forma cu calotă cvasi-sferică să se stabilizeze în timpul urcării.

Se vede deci, că condițiile de deformare și mărire a bulei (aci numai în sensul înălțimei) diferă de acelea ale unei bule de aer liberă care, sub masă constantă, se urcă într'un *lichid* indefinit și care se umflă din ce în ce mai mult în toate sensurile, treptat cu descreșterea presiunei hidrostatice înconjurătoare.

O altă stabilizare se remarcă la vitesa de urcare, care la bula liberă de masă constantă, ce se ridică într'un lichid indefinit, tinde mai mult a crește în virtutea creșterei subpresiunei, pe când aci, datorită creșterei mai accentuate a suprafeței de *frecare* (care, în ambele cazuri crescând cu patratul vitesei, sfârșește prin a echilibra forța ascensională) pe măsura înălțării bulei se stabilește mai repede regimul de quasi-echilibru între forțe, ceea ce face ca vitesa de urcare, între limite relativ restrânse, să poată fi considerată constantă (U).

Că lucrurile se petrec aproximativ astfel, rezultă din constatările experimentale.

Pe lângă aceste hipoteze simplificatoare se mai face abstracție și de tensiunea superficială (deși este singura cauză a menținerii formei bulei, căci în lipsa ei, moleculele lichide ar cădea vertical, străbătând calota și fărămițând bula) Această tensiune se poate admite că și în regiunea calotei este neglijabilă datorită curburei relativ mici a meridianei, (astfel că presiunea de o parte și de alta a peliculei ce înconjură bula, n'ar diferi mult, fiind egală cu presiunea quasi-constantă a aerului din bulă); dela calotă în jos, unde traiectorile sunt aproape drepte, tensiunea este insensibilă, concomitent cu faptul că moleculele lichide, dislocate de bulă, se pun în mișcare pentru a trece, cu vitese *crescânde* în jos, pe sub bulă (vezi liniile de curent ale mișcării absolute), ceea ce micșorează din ce în mai mult presiunea hidrostatică, dela proră spre pupă, egalând-o astfel, cum am spus, cu aceea a aerului din bulă.

Rezultă că putem admite cu destulă aproximație, că moleculele lichide din suprafața bulei se mișcă *liber* în câmpul gravitațiunei.

Dacă trecem acum la mișcarea *relativă*, adică față de axe antrenate cu bula, se poate trata problema ca a unui curent lichid ce s'ar scurge din regiunea superioară îndepărtată cu o vitesă *uniformă*, egală și de sens contrar cu aceea a bulei, curent strecurat între tub și bulă, considerată solidificată și fixă.

La această mișcare relativă, care este potențială (Φ) ca și cea absolută (Φ_1), vitesa moleculelor lichide de pe conturul bulei, căzând din origina $z=0$ în câmpul gravitațiunei, va fi:

$$v=\sqrt{2gz} \qquad (90)$$

origina axelor: *orizontală* (ρ) și *verticală descendentă* (z), fiind aleasă în vârful calotei, unde $v=0$.

Funcțiunea potențială Φ, pe lângă legea lui *Laplace*, va trebui să satisfacă condiția la frontieră (90) dinspre partea bulei, și condiția la frontiera exterioară cilindrică, firele periferice trebuind să fie îndreptate după generatricele cilindrului ce limitează curentul; această din urmă condiție, dacă este împlinită de funcț'a Φ_1,

va fi dela sine împlinită și de Φ, căci viteza de translație $\overline{U}$, ce se adaogă câmpului de vitsă Φ_1, este chiar în direcția aceleași generatrice.

Dificultatea problemei constă în faptul că meridiana bulei, care este și linie de curent în mișcarea relativă Φ, este necunoscută, putându-se însă admite, după cele ce preced, că se compune dintr'un arc de cerc superior și o curbă de racordare asimptotică a acestui cerc cu generatricea cilindrului și că ascultă de legea continuității (constanța debitului prin orice secțiune transversală). Dl. *Dumitrescu*, trecând dela mișcarea absolută la cea relativă, a rezolvat problema cu aproximație prin o desvoltare în serie a ecuației meridianei, admisă aci circulară în preajma punctului critic ($\rho=z=0$) și a ecuații aproximative a ramurei asimptotice, la $+\infty$, la generatricea tubului ($\rho=R$), stabilind cea mai bună racordare a curbelor respective, pentru a constitui meridiana bulei.

Problema, pusă în felul arătat mai sus, apare ca o problemă pur cinematică, având deci nevoie numai de două mărimi fundamentale și anume aci, din motive practice, lungimea și acceleraţia.

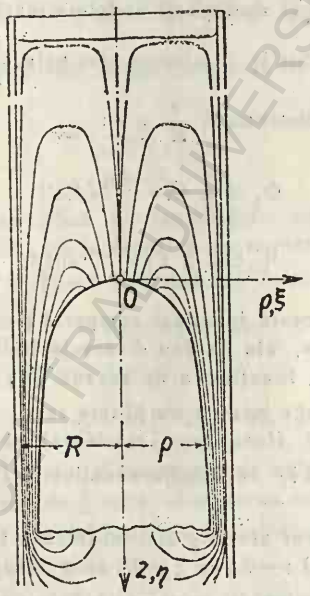


Fig. 52

Vom lua drept unități intrinseci respective: raza R a cilindrului și acceleraţia g a gravitațiunei. Coordonatele fără dimensiuni vor fi atunci:

$$\xi=\frac{\rho}{R} \qquad \text{și} \quad \eta=\frac{z}{R},$$

iar vitesele *specifice* (fără dimensiuni) ce interesează:

$$\frac{U}{\sqrt{gR}}=\lambda, \quad \frac{v_x}{\sqrt{gR}}=v_{xs}, \quad \frac{v_y}{\sqrt{gR}}=v_{ys}, \quad \frac{v_z}{\sqrt{gR}}=v_{zs}.$$

Dacă Φ_1 și Ψ_1 sunt funcțiunile de viteză și de curent ale mișcării absolute

ambele, fiind armonice (mișcări potențiale), vor satisface ecuația lui *Laplace* în coordonate cilindrice:

$$\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi_1}{\partial\rho}=0$$

$$\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial\rho^2}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Psi_1}{\partial\rho}=0.$$

Pentru a cunoaște aceste funcțiuni, ce trebue să satisfacă condiția la frontieră pentru $\rho=R$, se poate pleca dela formulele axial-simetrice, stabilite în text:

$$\Phi=e^{-kz}I_0(k\rho)$$

și

$$\psi=-\rho e^{-kz}I'_0(k\rho)=\rho e^{-kz}I_1(k\rho).$$

In loc de a proceda ca în exemplele precedente, s'a urmat aci calea directă, de a se lua drept soluții sumă de Φ și sumă de ψ de tipul de mai sus, Φ, deci și ψ, fiind înmulțite cu diverși coeficienți nedeterminați C_i, corespunzători diverselor valori ale parametrului k_i, înlocuit aci prin $\frac{\beta_i}{R}$, în scop de a face să apară coordonatele fără dimensiuni $\frac{z}{R}=\eta$:

$$\Phi_1\equiv\sum_{i=1}^{n}C_i e^{-\beta_i\eta}I_0(\beta_i\xi)$$

$$\Psi_1\equiv\rho\sum_{i=1}^{n}C_i e^{-\beta_i\eta}I_1(\beta_i\xi).$$

Bineînțeles ambele aceste funcțiuni comportă și o constantă arbitrară aditivă. Egalate cu diverse constante, ele ne dau diversele linii echipotențiale și linii de curent (fig. 52). In special, funcțiunea de curent Ψ_1, egalată cu o anumită constantă, pe care o putem alege pentru simplitate zero, va trebui să ne dea linia de curent $\rho=R$, adică $\xi=1$ (frontiera exterioară) și atunci o soluție a ecuației $\Psi_1=0$ o avem, luând pentru β_i rădăcinile ecuațiunii: $I_1(\beta)=0$, precum $\beta_1=3{,}83171$, $\beta_2=7{,}01559$ etc.

Printre liniile de curent ale mișcării absolute, trebue să se găsească evident și firul mijlociu (*filon*) $\rho=0$ sau $\xi=0$, care începe la punctul critic $\xi=0$ $\eta=0$. Ori, tot $\Psi_1=0$ reprezintă și pe această linie de curent, atât fiindcă pe ea $\rho=0$, cât și prin faptul că pe ea $I_1(o)=0$. Filonul de altfel se menține și în mișcarea relativă, dar la această mișcare în polul calotei el se resfiră în jurul bulei, pentru a forma frontiera interioară a domeniului fluid (meridianele bulei).

Dacă imprimăm ansamblului translația cu vitesa constantă U, spre a trece la această mișcare relativă (față de axe antrenate de bulă cu vitesa ei $-U$, axe care în momentul calculului coincid cu axele mișcării de adinioară), în care meridiana bulei apare ca linie de curent, obținem funcțiunile:

$$\Phi\equiv Uz+\sum_{i=1}^{n}C_i e^{-\beta_i\eta}I_0(\beta_i\xi)$$

$$\Psi\equiv-\frac{U}{2}\rho^2+\rho\sum_{i=1}^{n}C_i e^{-\beta_i\eta}I_1(\beta_i\xi).$$

Spre a trece la formule fără dimensiuni, împărțim fiecare din aceste formule cu monomul dimensional, în unitățile intrinseci alese, al mărimei lui Φ și al lui Ψ respectiv, anume cu $R\sqrt{gR}$, respectiv $R^2\sqrt{gR}$, adoptând literile mici $\varphi\,\psi$ și c pentru valorile *specifice* (fără dimensii) astfel obținute:

$$\left.\begin{aligned}\varphi &\equiv \lambda\eta + \sum_{i=1}^{n} c_i e^{-\beta_i\eta} I_0(\beta_i\xi)\\ \psi &\equiv -\frac{\lambda}{2}\xi^2 + \xi\sum_{i=1}^{n} c_i e^{-\beta_i\eta} I_1(\beta_i\xi)\end{aligned}\right\}. \tag{91}$$

Componentele specifice ale vitesei, pe cari le-am notat cu indicele suplimentar s, sunt:

$$\left.\begin{aligned}v_{xs} &\equiv \frac{\partial\varphi}{\partial\xi} = \frac{1}{\xi}\frac{\partial\psi}{\partial\eta} = -\sum_{i=1}^{n} c_i\beta_i e^{-\beta_i\eta} I_1(\beta_i\xi)\\ v_{zy} &\equiv \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = -\frac{1}{\xi}\frac{\partial\psi}{\partial\xi} = \lambda - \sum_{i=1}^{n} c_i\beta_i e^{-\beta_i\eta} I_0(\beta_i\xi).\end{aligned}\right\} \tag{92}$$

În punctul critic $\xi = \eta = 0$, vitesa fiind nulă (în mișcarea absolută este $-U$), vom avea:

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} c_i\beta_i, \tag{93}$$

ceeace arată că vitesa specifică de translație, reprezentată prin constanta caracteristică a problemei λ, stă în legătură cu constantele fără dimensiuni c_i.

Condiția a doua de frontieră (formula lui *Toricelli*):

$$v_x^2 + v_y^2 = 2gz$$

devine, prin împărțire cu gR, fără dimensiuni:

$$v_s^2 \equiv v_{xs}^2 + v_{ys}^2 = 2\eta. \tag{94}$$

Dacă în expresia lui ψ din (91) introducem valoarea lui λ din (93) și egalăm cu 0, după ce vom fi împărțit cu ξ spre eliminarea soluției $\xi = 0$, care reprezintă filonul ce nu interesează, iar în al doilea rând în (94) introducem valorile (92) precum și valoarea lui λ din (93), obținem:

$$\frac{\psi}{\xi} \equiv \sum c_i e^{-\beta_i\eta} I_1(\beta_i\xi) - \frac{\xi}{2}\sum_{i=1}^{i=n} c_i\beta_i = 0 \tag{95}$$

$$\left\{-\sum_{i=1}^{n} c_i\beta_i e^{-\beta_i\eta} I_1(\beta_i\xi)\right\}^2 + \left\{\sum_{i=1}^{n} c_i\beta_i - \sum_{i=1}^{m} c_i\beta_i e^{-\beta_i\eta} I_0(\beta_i\xi)\right\}^2 = 2\eta. \tag{96}$$

ecuațiile fundamentale ale problemei.

Ecuația (95) este ecuația liniei de curent periferice (meridiană) a bulei, după cum arată atât proveniența ei, din ecuația filonului în mișcarea Φ_1, cât și faptul că ea conține punctul critic $\xi = \eta = 0$, căci $I_1(o) = 0$.

Ecuația (96) exprimă legea lui *Toricelli*, care trebue deasemenea satisfăcută pe linia în chestiune.

BCU IAȘI CENTRALA UNIVERSITY LIBRARY

Coeficienții nedeterminați c_i fiind acum aleși astfel, ca ξ și η, să satisfacă ambele aceste ecuațiuni, (93) ne va da vitesa ascensională, iar (95) și (96) curba meridiană căutată.

Pentru determinarea coeficienților c_i ne servim de desvoltările cunoscute:

$$I_0(\beta_i\xi) = 1 - \frac{1}{1^2}\left(\frac{\beta_i}{2}\right)^2\xi^2 + \frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{\beta_i}{2}\right)^4\xi^4 - \frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{\beta_i}{2}\right)^6\xi^6 + \cdots$$

$$I_1(\beta_i\xi) = \left(\frac{\beta_i}{2}\right)\xi - \frac{1}{1!2!}\left(\frac{\beta_i}{2}\right)^3\xi^3 + \frac{1}{2!3!}\left(\frac{\beta_i}{2}\right)^5\xi^5 - \frac{1}{3!4!}\left(\frac{\beta_i}{2}\right)^7\xi^7 + \cdots$$

$$e^{-\beta_i\eta} = 1 - 2\left(\frac{\beta_i}{2}\right)\eta + \frac{2^2}{2!}\left(\frac{\beta_i}{2}\right)^2\eta^2 - \frac{2^3}{3!}\left(\frac{\beta_i}{2}\right)^3\eta^3 + \frac{2^4}{4!}\left(\frac{\beta_i}{2}\right)^4\eta^4 - \cdots$$

Inlocuind aceste valori și desvoltând după puterile lui η, obținem cu introducerea notației:

$$B_1 = \sum_{i=1}^{n} c_i\left(\frac{\beta_i}{2}\right),\quad B_2 = \sum_{i=1}^{n} c_i\left(\frac{\beta_i}{2}\right)^2,\ \cdots \qquad (97)$$

următoarele valori:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\xi}\left[\sum_{i=1}^{n} c_i I_1(\beta_i\xi)e^{-\beta_i\eta} - \frac{\xi}{2}\sum_{i=1}^{n} c_i\beta_i\right] = &\left[-\frac{B_3}{1!2!}\xi^2 + \frac{B_5}{2!3!}\xi^4 - \frac{B_7}{3!4!}\xi^6 + \cdots\right]\\ &-\frac{2}{1}\left[B_2 - \frac{B_4}{1!2!}\xi^2 + \frac{B_6}{2!3!}\xi^4 - \frac{B_8}{3!4!}\xi^6 + \cdots\right]\eta \qquad (98)\\ &+\frac{2^2}{2!}\left[B_3 - \frac{B_5}{1!2!}\xi^2 + \frac{B_7}{2!3!}\xi^4 - \frac{B_9}{3!4!}\xi^6 + \cdots\right]\eta^2\\ &\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

apoi

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} c_i\beta_i I_1(\beta_i\xi)e^{-\beta_i\eta} &= 2\sum_{i=1}^{n} c_i\left(\frac{\beta_i}{2}\right) I_1(\beta_i\xi)e^{-\beta_i\eta}\\ &= \frac{2}{1}\left[B_2\xi - \frac{B_4}{1!2!}\xi^3 + \frac{B_6}{2!3!}\xi^5 - \cdots\right]\\ &\quad -\frac{2^2}{1}\left[B_3\xi - \frac{B_5}{1!2!}\xi^3 + \frac{B_7}{2!3!}\xi^5 - \cdots\right]\eta \qquad (99)\\ &\quad +\frac{2^3}{2!}\left[B_4\xi - \frac{B_6}{1!2!}\xi^3 + \frac{B_8}{2!3!}\xi^5 - \cdots\right]\eta^2\\ &\quad \cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

și în fine:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i\beta_i I_0(\beta_i\xi)e^{-\beta_i\eta} - \sum_{i=1}^{n} c_i\beta_i = 2\sum_{i=1}^{n} c_i\left(\frac{\beta_i}{2}\right) I_0(\beta_i\xi)e^{-\beta_i\eta} - 2\sum_{i=1}^{n} c_i\left(\frac{\beta_i}{2}\right),$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$=2\left[-\frac{B_3}{1^2}\xi^2+\frac{B_5}{(2!)^2}\xi^4-\frac{B_7}{(3!)^2}\xi^6+\dots\right]$$

$$-\frac{2^2}{1}\left[\frac{B^2}{1}-\frac{B_4}{1^2}\xi^2+\frac{B_6}{(2!)^2}\xi^4-\frac{B_8}{(3!)^2}\xi^6+\dots\right]\eta \qquad (100)$$

$$+\frac{2^3}{2!}\left[\frac{B^3}{1}-\frac{B_5}{1^2}\xi^2+\frac{B_7}{(2!)^2}\xi^4-\frac{B_9}{(3!)^2}\xi^6+\dots\right]\eta^2$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

Fie acum

$$\eta=\sum_{\varkappa=1}^{\infty}\alpha_\varkappa\xi^{2\varkappa} \qquad (101)$$

ecuația conturului bulei cu $\xi<1$ și α pozitiv. Introducem această valoare în (98), (99) și (100), ridicând ultimile două ecuații la pătrat și adunându-le.

Dacă ordonăm cele două relații astfel obținute, după puterile lui ξ, ceea ce este permis datorită convergenței absolute a seriilor, relațiile fundamentale (95) și (96) iau forma:

$$\frac{1}{2}(4B_2\alpha_1-B_3)\xi^2+\frac{1}{12}(B_5-12B_4\alpha_1+24B_3\alpha_1^2+24B_2\alpha_2)\xi^4+\dots=0 \qquad (102)$$

$$B_2^2\xi^2+(-B_2B_4+4B_2^2\alpha_1^2+B_3^2)\xi^4+\dots=\frac{1}{2}(\alpha_1\xi^2+\alpha_2\xi^4+\dots)=. \qquad (103)$$

Determinarea numerilor B_2, B_3, B_4... se face prin comparația coeficienților puterilor ξ din ecuațiile (102 și (103).

Dacă se prescrie α_1, din (103) tragem:

$$B_2^2=\frac{1}{2}\alpha_1.$$

Cu acest B_2 se deduce din (102):

$$B_3=4B_2\alpha_1.$$

Cu aceste valori ale lui α_1, B_2, B_3 ecuația (103) ne dă pentru un α_2, deasemenea prescris:

$$B_4=\frac{1}{B_2}\left[B_3^2+4B_2^2\alpha_1^2=4B_2B_3\alpha_1+B_3^2\ \frac{\alpha_2}{2}\right].$$

Calculând astfel succesiv diversele numere B_2, B_3... B_{n+1}, coeficienții c_i rezultă din următorul sistem de n ecuațiuni liniare cu n necunoscute (vezi 97):

$$\left.\begin{aligned}
&c_1\left(\frac{\beta_1}{2}\right)^2+c_2\left(\frac{\beta_2}{2}\right)^2+\dots+c_n\left(\frac{\beta_n}{2}\right)^2=B_2\\
&c_1\left(\frac{\beta_1}{2}\right)^3+c_2\left(\frac{\beta_2}{2}\right)^3+\dots+c_n\left(\frac{\beta_n}{2}\right)^3=B_3\\
&c_1\left(\frac{\beta_1}{2}\right)^4+c_2\left(\frac{\beta_2}{2}\right)^4+\dots+c_n\left(\frac{\beta_n}{2}\right)^4=B_4\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&c_1\left(\frac{\beta_1}{2}\right)^{n+1}+c_2\left(\frac{\beta_2}{2}\right)^{n+1}+\dots+c_n\left(\frac{\beta_n}{2}\right)^{n+1}=B_{n+1}
\end{aligned}\right\} \qquad (104)$$

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITARĂ LIBRARY

Determinantul acestui sistem, lăsând la o parte un factor constant, este:

$$\begin{aligned}&\beta_1^2\beta_2^2\ldots\beta^2{}_n\,(\beta_1-\beta_2)(\beta_1-\beta_3)(\beta_1-\beta_4)\ldots(\beta_1-\beta_n)\\&(\beta_2-\beta_3)(\beta_2-\beta_4)\ldots(\beta_2-\beta_n)\\&(\beta_3-\beta_4)\ldots(\beta_3-\beta_n)\\&\ldots\ldots\ldots\\&(\beta_{n-1}-\beta_n)\end{aligned}\qquad(105)$$

și cum rădăcinile β_i sunt toate diferite, el nu este nul, sistemul având o soluție determinată. Așa dar constantele c_i sunt funcțiuni ale coeficienților, presupuși până acum arbitrari, α.

Să admitem acum aproximativ că forma meridianei bulei în preajma polului se poate înlocui prin cercul ei osculatar de o anumită rază ϖ, în care caz avem pentru acest cerc:

$$(\varpi-\eta)^2+\xi^2=\varpi^2$$

$$\eta=\varpi\sqrt{1-\left(\frac{\xi}{\varpi}\right)^2}\qquad \xi<\varpi<1$$

sau, desvoltând în serie:

$$\eta=\varpi\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\xi}{\varpi}\right)^2+\frac{1}{8}\left(\frac{\xi}{\varpi}\right)^4+\frac{1}{16}\left(\frac{\xi}{\varpi}\right)^6+\ldots\right\}\qquad(106)$$

In felul acesta, șirul coeficienților α este pentru un anumit ϖ determinat:

$$\alpha_1=\frac{1}{2\varpi},\qquad \alpha_2=\frac{1}{8\varpi^3},\qquad \alpha_3=\frac{1}{16\varpi^5}$$

și găsim coeficienții c_i prin sistemul (104) cu o aproximație cu atât mai mare, cu cât luăm un șir mai mare.

In tabela Nr. 1 se dau pentru patru valori ale lui ϖ: doi (α_1 și α_2) din

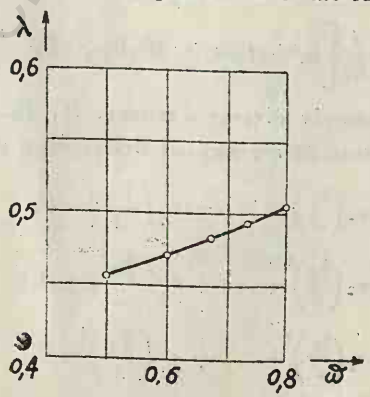


Fig. 53

șirul coeficienților α, cu numerile corespunzătoare E_2. B_3, B_4 și șirul coeficienților c_1, c_2, c_3, în fine λ prin (93), care a permis în fig. 53 trasarea curbei $\lambda = f(\overline{\omega})$.

Tabela Nr. 1. Calculul lui λ în funcție de $\overline{\omega}$.

$\overline{\omega}$	α_1	α_2	B_2	B_3	B_4	c_1	c_2	c_3	λ
0,5	1	1	0,707	2,828	13,435	—0,0940	+0,01678	—0,02197	0,460
0,6	0,833	0,579	0,645	2,151	8,516	—0,0832	—0,00839	—0,00915	0,471
0,7	0,714	0,364	0,597	1,707	5,793	—0,0962	—0,01097	—0,00423	0,488
0,8	0,625	0,244	0,559	1,397	4,148	—0,1140	—0,00613	—0,00251	0,505

Teoria expusă mai sus, cu utilizarea funcțiunilor *Bessel*, s'a folosit, așa dar, numai la întocmirea acestui tablou pentru domeniul curbei bulei din preajma polului, urmând acum a se găsi, care din valorile $\overline{\omega}$ convine problemei.

În acest scop se poate reprezenta aproximativ restul curbei, care este asimptotică la pereții tubului la $+\infty$, exprimând că debitul:

$$Q = \frac{\pi D^2}{4} v_{-\infty}$$

este același pentru orice secție lichidă mărginită între peretele cilindric și bulă, cu admiterea, iarăși aproximativă dar din ce în ce mai exactă cu cât ne depărtăm de calotă, că $\overline{v}$ ar fi vertical și egal, în toată aria secțiunei, cu $\sqrt{2gz}$.

Se obține atunci:

$$\frac{\pi}{4}[(2R)^2 - (2r)^2]\sqrt{2gz} = \frac{\pi}{4}(2R)^2\lambda\sqrt{gR}$$

sau fără dimensii:

$$\eta = \frac{\lambda^2}{2(1-\xi^2)}. \qquad (107)$$

Definitivarea valoarei lui $\overline{\omega}$ se obține, punând condiția, ca reacordarea cercului osculator dela pol să se facă cât mai bine cu ramura asimptotică (107), ceea ce s'a reușit prin încercări pentru $\overline{\omega} = 0{,}75$, care la întâlnirea celor două curbe dă aceiași tangentă pentru ambele curbe (fig. 54). La această soluție corespunde $\lambda = 0{,}496$.

Experiențele au arătat o mare concordanță cu acest calcul, după cum rezultă din figură, care arată curba calculată în comparație cu cea experimentală.

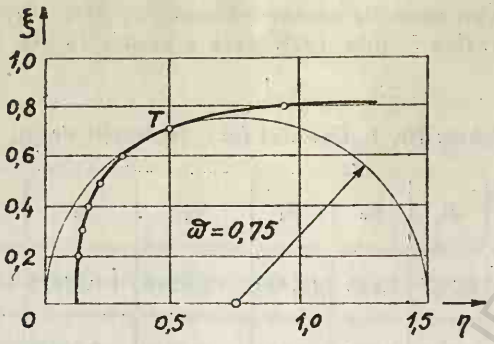


Fig. 54

6. Funcțiuni elipsoidale.

Pentru rezolvirea ecuației lui *Loplace*, metoda funcțiunilor sferice, cari satisfac condițiile la limită pe o sferă, se poate estinde la cazul când aceste condițiuni sunt date pe un elipsoid de rotație.

Elipsoid lungueț. Să luăm mai întâiu cazul elipsoidului de rotație lungueț (după axa z) punând:

$$\left.\begin{aligned} x&=\rho\cos\varphi \\ y&=\rho\sin\varphi \\ z&=k\cos\theta\cosh\eta=k\xi\zeta \\ \text{cu}\quad \rho&=k\sin\theta\sinh\eta=k(1-\xi^2)^{1/2}(\zeta^2-1)^{1/2}. \end{aligned}\right\} \quad (108)$$

Suprafețele $\zeta\equiv\cosh\eta=const$ sunt elipsoide confocale, iar suprafețele $\xi\equiv\cos\theta=const$ hiperbolide cu două pânze, având-și focarele în punctele $(\pm k,\ 0,0)$. Intradevăr, în cazul $\zeta=const$ avem:

$$\xi=\frac{z}{k\zeta}$$

$$\rho=k\left(1-\frac{z^2}{k^2\zeta^2}\right)^{1/2}(\zeta^2-1)^{1/2}$$

și deci:

$$x^2+y^2=\left(k^2-\frac{z^2}{\zeta^2}\right)(\zeta^2-1)$$

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

sau

$$\frac{x^2}{k^2(\zeta^2-1)}+\frac{y^2}{k^2(\zeta^2-1)}+\frac{z^2}{k\zeta^2}-1=0 \qquad (109)$$

şi cum

$$k^2\zeta^2-k(\zeta^2-1)=k^2, \qquad (110)$$

se vede că k este semidistanţa focală.

In cazul $\xi = const$ avem:

$$\zeta=\frac{z}{k\xi}$$

$$\rho=k(1-\xi^2)^{1/2}\left(\frac{z^2}{k^2\xi^2}-1\right)^{1/2}$$

$$x^2+y^2=k^2(1-\xi^2)\left(\frac{z^2}{k^2\xi^2}-1\right)$$

$$\frac{x^2}{k^2(1-\xi^2)}+\frac{y^2}{k^2(1-\xi^2)}-\frac{z^2}{k^2\xi^2}+1=0 \qquad (111)$$

şi cum: $k^2\xi^2-k^2(1-\xi^2)=k^2$, concluzia este aceiaşi.

Valoarea lui $\zeta=\cosh\eta$ poate varia dela 1 la ∞, pe când $\xi=\cos\theta$ între -1 şi $+1$. Coordonatele ξ, ζ şi φ formează un sistem ortogonal, iar elementele liniare ds_ξ, ds_ζ, ds_φ, pe care le descrie punctul $P(x,y,z)$, atunci când variază numai unul din cei trei parametri ξ, ζ şi φ, are drept expresiuni după formulele (2)

$$\left.\begin{aligned} ds_\xi &= k\left(\frac{\zeta^2-\xi^2}{1-\xi^2}\right)^{1/2}d\xi \\ ds_\zeta &= k\left(\frac{\zeta^2-\xi^2}{\zeta^2-1}\right)^{1/2}d\zeta \\ ds_\varphi &= k(1-\xi^2)^{1/2}(\zeta^2-1)^{1/2}\,d\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (112)$$

Pentru a scrie $\Delta\Phi=0$, este destul a exprima că fluxul total prin frontiera elementului paralelipipedic drept $ds_\xi\, ds_\zeta\, ds_\varphi$ este egal cu 0:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial s_\xi}ds_\zeta\, ds_\varphi\right)d\xi+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial s_\xi}\partial s_\xi\, ds_\varphi\right)d\zeta+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial s_\varphi}\,ds_\xi\, ds_\zeta\right)d\varphi=0$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

sau, subtituind valorile de mai sus ale elementelor liniare:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(1-\xi^2)\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right]+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[(\zeta^2-1)\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}\right]+\frac{\zeta^2-\xi^2}{(1-\xi^2)(\zeta^2-1)}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}=0,$$

care se mai poate scrie, desfăcând coeficientul lui $\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}$ în două fracții simple: $\frac{1}{1-\xi^2}+\frac{1}{\zeta^2-1}$,

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(1-\xi^2)\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right]+\frac{1}{1-\xi^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}=\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[(1-\zeta^2)\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}\right]+\frac{1}{1-\zeta^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}. \quad (113)$$

Dacă Φ este o funcție finită de ξ și φ pentru valorile $\xi=-1$ până la $\xi=+1$ și $\varphi=0$ până la $\varphi=2\pi$, el se poate desvolta într'o serie de funcțiuni sferice de ordin întreg de forma (49)' în care coeficienții vor fi evident funcțiuni de ζ, și prin substituire în ecuația (113) se conchide, că fiecare termen al seriei trebue să satisfacă separat această ecuație. Să luăm mai întâiu cazul funcțiunilor sferice zonale și să punem:

$$\Phi=\mathcal{P}_n(\xi)Z. \quad (114)$$

Inlocuind pe Φ prin această valoare în (113) și întrebuințând ecuația zonală, de care ascultă $\mathcal{P}_n(\xi)$, găsim:

$$\frac{d}{d\zeta}\left[(1-\zeta^2)\frac{dZ}{d\zeta}\right]+n(n+1)Z=0, \quad (115)$$

adică aceiași formă de ecuație pentru $z(\zeta)$ ca și ecuația funcțiilor sferice zonale, cum este $\mathcal{P}_n(\xi)$. Vom scrie așa dar (114) sub forma

$$\Phi=\mathcal{P}_n(\xi)\mathcal{P}_n(\zeta) \quad (116)$$

și

$$\Phi=\mathcal{P}_n(\xi)\,Q_n(\zeta) \quad (117)$$

în care:

$$Q_n(\zeta)=\mathcal{P}_n(\zeta)\int\frac{d\zeta}{[\mathcal{P}_n(\zeta)]^2(\zeta^2-1)}$$

adică

$$Q_n(\zeta)=\frac{1}{2}P_n(\zeta)\log\frac{\zeta+1}{\zeta-1}-\frac{2n-1}{1.n}P_{n-1}(\zeta)-\frac{2n-5}{3(1-n)}P_{n-3}(\zeta)-\ldots$$
$$=\frac{n!}{1.3\ldots(2n+1)}\left\{\zeta^{-n-1}+\frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)}\zeta^{-n-3}\right.$$
$$\left.+\frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2.4.(2n+3)(2n+5)}\zeta^{-n-5}+\ldots\right\}. \qquad (118)$$

Soluția (116) este finită pentru $\zeta=1$, pretându-se deci pentru câmpul din interiorul unui elipsoid de rotație, pe când soluția (117) devine infinită pentru $\zeta=1$, anulându-se la $\xi=\infty$, ceea ce o face proprie pentru spațiul exterior. Drept cazuri speciale ale expresiei (118) avem:

$$Q_0(\zeta)=\frac{1}{2}\log\frac{\zeta+1}{\zeta-1}$$
$$Q_1(\zeta)=\frac{1}{2}\log\frac{\xi+1}{\zeta-1}-1 \qquad (119)$$
$$Q_2(\zeta)=\frac{1}{4}(3\zeta^2-1)\log\frac{\zeta+1}{\zeta-1}-\frac{3}{2}\zeta.$$

Din expresia integrală (128) a lui $Q_n(\zeta)$ se obține relația:

$$P_n(\zeta)\frac{dQ_n(\zeta)}{d\zeta}-\frac{dP_n(\zeta)}{d\zeta}Q_n(\zeta)=\frac{1}{\zeta^2-1}. \qquad (120)$$

In privința funcțiunilor de curent, știm că în planul meridian avem:

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial s_\zeta}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi_1}{\partial s_\xi} \qquad (121)$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial s_\xi}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi_1}{\partial s_\zeta}, \qquad (121,1)$$

rezultând:

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial\xi}=k(\zeta^2-1)\frac{\partial\Phi_1}{\partial\zeta}$$

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial\zeta}=-k(1-\xi^2)\frac{\partial\Phi_1}{\partial\xi}.$$

BCU IAȘI / CENTRUL UNIVERSITAR LIBRARY

In cazul soluției (116) avem:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} = k(\zeta^2-1)\,\frac{d\mathcal{P}_n(\zeta)}{d\zeta}\mathcal{P}_n(\xi)$$

sau, întrebuințând ecuația zonală pentru a înlocui pe $\mathcal{P}_n(\xi)$ prin o derivată, în vederea integrării în raport cu ξ:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} = -\frac{k}{n(n+1)}(\zeta^2-1)\frac{d\mathcal{P}_n(\zeta)}{d\zeta}\frac{d}{d\xi}\left[(1-\xi^2)\frac{d\mathcal{P}_n(\xi)}{d\xi}\right],$$

de unde:

$$\psi_1 = -\frac{k}{n(n+1)}(1-\xi^2)\frac{d\mathcal{P}_n(\xi)}{d\xi}(\zeta^2-1)\frac{d\mathcal{P}_n(\zeta)}{d\zeta}, \qquad (122)$$

lăsând la o parte constanta de integrare, funcție de (ξ), după cum dictează relația (121,1).

Pentru a doua soluție găsim:

$$\psi_1 = -\frac{k}{n(n+1)}(1-\xi^2)\frac{d\mathcal{P}_n(\xi)}{d\xi}(\zeta^2-1)\frac{dQ_n(\zeta)}{d\zeta}. \qquad (123)$$

Aplicația Nr. 58. *Să se aplice calculul de mai sus la cazul, când un elipsoid de rotație lunguеț se mișcă în direcția axei lui, într'un fluid indefinit.*

Răspuns. Coordonatele eliptice trebuesc alese astfel, ca elipsoidul să aparțină familiei de elipsoide confocale, având de exemplu valoarea particulară $\zeta=\zeta_0$ a parametrului.

Dacă a și c sunt semi-axele polară și ecuatorială, iar e excentricitatea secțiunii meridiane, ținând seamă că:

$$z = k\cos\theta\,\zeta_0 = k\xi\zeta_0$$

și că, pentru $\cos\theta = 0$, $\sqrt{x^2+y^2} = \rho = k(\zeta^2-1)^{1/2}$ cu $z=a$ pe suprafața ζ_0, vom avea:

$$k = ea, \quad \zeta_0 = \frac{a}{k} = \frac{1}{e}, \quad k(\zeta_0{}^2-1)^{1/2} = c.$$

Condiția la frontieră (teoria lui *Rankine*) este:

$$\psi_1 = \frac{U}{2}\rho^2 + const = \frac{U}{2}k^2(1-\xi^2)(\zeta_0{}^2-1) + const. \qquad (123.1)$$

Dacă în (123) punem $n=1$ și introducem un factor arbitrar A, avem:

$$\psi_1 = -\frac{A}{2}k(1-\xi^2)(\zeta^2-1)\left[\frac{1}{2}\log\frac{\zeta+1}{\zeta-1} - \frac{\zeta}{\zeta^2-1}\right], \qquad (124)$$

condiția (123,1) conducând la:

$$A=\frac{Uh}{\frac{\zeta_0}{\zeta_0^2-1}-\frac{1}{2}\log\frac{\zeta_0+1}{\zeta_0-1}}=\frac{Ua}{\frac{1}{1-e^2}-\frac{1}{2e}\log\frac{1+e}{1-e}}. \tag{125}$$

Expresia corespunzătoare a potențialului este:

$$\Phi=A\mathcal{P}_1(\xi)Q_1(\zeta)=A\xi\left[\frac{1}{2}\zeta\log\frac{\zeta+1}{\zeta-1}-1\right]. \tag{126}$$

Energia cinetică și coeficientul de inerție (masă aparentă), datorat prezenței, fluidului, rezultă din formula stabilită:

$$2T=\frac{\varpi}{g}\oint^{\sigma}\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial n}d\sigma=\frac{\varpi}{g}\int\Phi\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial s}2\pi\rho ds=2\pi\frac{\varpi}{g}\int\Phi d\psi,$$

unde ds este elementul meridianei.

In cazul nesimetriei, dacă Φ este o funcție *teserală* sau *sectorială* în ξ și φ, soluțiile se găsesc printr'o metodă analoagă, având următoarele forme:

$$\Phi=\mathcal{P}_n^s(\xi)\,\mathcal{P}_n^s(\zeta)\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}s\varphi \tag{127}$$

$$\Phi=\mathcal{P}_n^s(\xi)\,Q_n^s(\zeta)\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}s\varphi, \tag{128}$$

unde, precum am văzut:

$$\mathcal{P}_n^s(\xi)=(1-\xi^2)^{s/2}\frac{d^s\mathcal{P}_n(\xi)}{d\xi^s}. \tag{129}$$

Dacă, evitând soluțiile imaginare, punem:

$$\mathcal{P}_n^s(\zeta)=(\zeta^2-1)^{s/2}\frac{d^s\mathcal{P}_n(\zeta)}{d\zeta^s} \tag{130}$$

și

$$Q_n^s(\zeta)=(\zeta^2-1)^{s/2}\frac{d^sQ_n(\zeta)}{d\zeta^s}. \tag{131}$$

se poate arăta că:

$$Q_n^s(\zeta)=(-1)^s\frac{(n+s)!}{(n-s)!}\mathcal{P}_n^{(s)}(\zeta)\int_0^{\infty}\frac{d\zeta}{[\mathcal{P}_n^s(\zeta)]^2(\zeta^2-1)}. \tag{132}$$

De aci rezultă relația:

$$\mathcal{P}_n^s(\zeta)\frac{dQ_n^s(\zeta)}{d\zeta}-\frac{d\mathcal{P}_n^s(\zeta)}{d\zeta}Q_n^s(\zeta)=(-1)^{s+1}\frac{(n+s)!}{(n-s)!}\frac{1}{\zeta^2-1}. \tag{133}$$

Aplicația Nr. 60. *A se studia cazul unui elipsoid de rotație lungueț, care se mișcă în direcția unei axe ecuatoriale, de exemplu a axei y, într'un fluid în repaus la* ∞.

Răspuns. Componenta vitesei fluidului la suprafața elipsoidului, normal pe aceasta (direcția ds_1), este:

BUCUREȘTI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s_\xi} = \frac{\partial \Phi}{e_2 \partial \zeta},$$

deoarece am văzut că

$$ds_\zeta = e_2 d\zeta = \frac{1}{h_2} d\zeta .$$

Proecția vitesei de translație V, cu care este animată în același punct suprafața solidă a elipsoidului (cosinus director al lui ds_ζ în raport cu y este $\frac{1}{e_2}\frac{dy}{d\zeta} = h_2 \frac{dy}{d\zeta}$) este

$$V \frac{1}{e_2} \frac{dy}{d\zeta}.$$

Condiția la frontieră (aplicăm teoria lui *Rankine*) este așa dar:

$$\frac{\partial \Phi}{d\zeta} = V \frac{dy}{d\zeta}$$

sau:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} = V \frac{k\zeta_0}{(\zeta_0^2 - 1)^{1/2}} (1-\xi^2)^{1/2} \sin\varphi. \qquad (134)$$

Această relație este satisfăcută, dacă punem $n=1$, $s=1$ în (128), în care caz se obține:

$$\Phi = A(1-\xi^2)^{1/2} (\zeta^2 - 1)^{1/2} \left[\frac{1}{2} \log \frac{\zeta+1}{\zeta-1} - \frac{\zeta}{\zeta^2-1} \right] \sin\varphi, \qquad (135)$$

constanta A fiind determinată prin (134), în care introducem (135):

$$A \left[\frac{1}{2} \log \frac{\zeta_0 + 1}{\zeta_0 - 1} - \frac{\zeta_0^2 - 2}{\zeta_0(\zeta_0^2 - 1)} \right] = kV.$$

Aplicația Nr. 61. *A se studia aceiași chestiune ca în aplicația precedentă, însă în cazul unei rotațiuni a elipsoidului în jurul axei Oy, cu vitesa unghiulară de rotație* ω_y (ω_z *în jurul axei Oz n'ar turbura evident fluidul*).

Răspuns. Problema se pune la fel; condiția la frontieră constând și aci în egalitatea componentei normale a vitesei fluidului:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s_\zeta} = \frac{\partial \Phi}{e_2 \partial \zeta}$$

cu proecția vitesei periferice $[\overline{\omega}\ \overline{r}]$, ale cărei componente după axele x și z sunt:

$$[\overline{\omega}\ \overline{r}]_x \equiv \omega_y z - \omega_z y = \omega_y z$$

$$[\overline{\omega}\ \overline{r}]_z \equiv \omega_x y - \omega_y x = -\omega_y x$$

și cari, înmulțite respectiv cu cosinusurile directoare ale lui ds_ζ:

$$\frac{1}{e_2}\frac{dx}{d\zeta}=h_2\frac{\partial x}{\partial\zeta},\quad \frac{1}{e_2}\frac{dz}{d\zeta}=h_2\frac{\partial z}{\partial\zeta}$$

și adunate, dau proecția căutată pe direcția normalei ds_ζ:

$$\omega_y\frac{1}{e_2}\left(z\frac{\partial x}{d\zeta}-x\frac{\partial z}{d\zeta}\right).$$

Așa dar, condiția la frontieră este:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}=\omega_y\left(z\frac{\partial x}{\partial\zeta}-x\frac{\partial z}{\partial\zeta}\right). \tag{136}$$

Pentru $\zeta=\zeta_0$ găsim:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}=k^2\omega_y\frac{1}{(\zeta_0-1)^{1/2}}\xi(1-\xi^2)^{1/2}\cos\varphi. \tag{137}$$

Punând $n=2$, $s=1$ (căci este vorba aci de $\cos\varphi$) în expresia (128), găsim:

$$\Phi=A\xi(1-\xi^2)^{1/2}(\zeta^2-1)^{1/2}\left[\frac{3}{2}\zeta\log\frac{\zeta+1}{\zeta-1}-3-\frac{1}{\zeta^2-1}\right]\cos\varphi, \tag{138}$$

constanta A urmând a fi determinată prin (137).

Elipsoid turtit. Coordonatele potrivite în acest caz sunt:

$$x=\rho\cos\varphi$$
$$y=\rho\sin\varphi$$
$$z=k\cos\theta\sin h\eta=k\xi\zeta$$

cu

$$\rho=k\sin\theta\cos h\eta=k(1-\xi^2)^{1/2}(\zeta^2+1)^{1/2}.$$

Aci ζ poate varia dela 0 la ∞ (în unele aplicații dela $-\infty$ la $+\infty$), pe când ξ dela -1 la $+1$. Suprafețele de al doilea grad $\zeta=const$ sunt elipsoide de rotație *turtite* (formă planetară), iar $\xi=const$ hiperboloide de rotație cu o singură pânză, toate având focarele lor pe cercul $z=0$, $\rho=k$. Ca forme limite avem pe de o parte elipsoidul $\zeta=0$. care coincide cu o porțiune a planului $z=0$, pentru care $\rho<h$ și pe de altă parte hiperboloidul $\xi=0$, care coincide cu restul aceluiași, plan.

Găsim ca mai sus:

$$\left.\begin{aligned} ds_\xi &= k\left(\frac{\zeta^2+\xi^2}{1-\xi^2}\right)^{1/2}d\xi \\ ds_\zeta &= k\left(\frac{\zeta^2+\xi^2}{\zeta^2+1}\right)^{1/2}d\zeta \\ ds_\varphi &= k(1-\xi^2)^{1/2}(\zeta^2+1)^{1/2}d\varphi, \end{aligned}\right\} \tag{139}$$

BCU CLUJ CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

iar pentru ecuaţia de continuitate:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(1-\xi^2)\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right]+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[(\zeta^2+1)\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}\right]+\frac{\zeta^2+\xi^2}{(1-\xi^2)(\zeta^2+1)}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}=0.$$

sau

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(1-\xi^2)\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right]+\frac{1}{1-\xi^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}=-\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[(\zeta^2+1)\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}\right]+\frac{1}{\zeta^2+1}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}, \quad (140)$$

care este de aceiaşi formă cu (113), cu înlocuirea lui ζ prin $i\zeta$. Aceiaşi schimbare apare şi în formulele ce urmează.

In cazul simetriei în jurul axei z, avem soluţiile:

$$\Phi=\mathcal{P}_n(\xi)p_n(\zeta) \quad (141)$$

şi

$$\Phi=\mathcal{P}_n(\xi)q_n(\zeta), \quad (142)$$

unde:

$$p_n(\zeta)=\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{n!}\left\{\zeta^n+\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\zeta^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)}\zeta^{n-4}+\ldots\right\} \quad (143)$$

şi

$$q_n(\zeta)=p_n(\zeta)\int_\zeta^\infty\frac{d\zeta}{[p_n(\zeta)]^2(\zeta^2+1)}$$

$$=(-1)^n\left\{p_n(\zeta)\,arc\,cot\,\zeta-\frac{2n-1}{1.n}p_{n-1}(\zeta)+\frac{2n-5}{3(n-1)}p_{n-3}(\zeta)-\ldots\right\}$$

$$=\frac{n!}{1\,3.5\ldots(2n+1)}\left\{\zeta^{-(n+1)}-\frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)}\zeta^{-(n+3)}+\frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2.4.(2n+3)(2n+5)}\zeta^{-(n+5)}-\ldots\right\}, \quad (144)$$

unde totuşi ultima desvoltare este convergentă numai dacă $\zeta>1$.

Ca şi mai sus, soluţia (141) se potriveşte pentru interiorul unui elipsoid din familia $\zeta=const$, iar soluţia (142) pentru spaţiul exterior.

Este de notat că:

$$p_n(\zeta)\frac{dq_n(\zeta)}{d\zeta}-\frac{dp_n(\zeta)}{d\zeta}q_n(\zeta)=-\frac{1}{\zeta^2+1}.$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Drept cazuri speciale ale formulei (114) avem:

$$q_0(\zeta)=arc\,cot\zeta,\quad q_1(\zeta)=1-\zeta\,arc\,cot\,\zeta$$

$$q_2(\zeta)=\frac{1}{2}(3\zeta^2+1)\,arc\,cot\zeta-\frac{3}{2}\zeta.$$

Expresiilor (141) și (142) le corespund funcțiunile de curent:

$$\psi=\frac{k}{n(n+1)}(1-\xi^2)\frac{d\mathcal{P}_n(\zeta)}{d\xi}(\zeta^2+1)\frac{dp_n(\zeta)}{d\zeta} \qquad (145)$$

și

$$\psi=\frac{k}{n(n+1)}(1-\xi^2)\frac{d\mathcal{P}_n(\xi)}{d\xi}(\zeta^2+1)\frac{dq_n(\zeta)}{d\zeta}. \qquad (146)$$

Aplicația Nr. 62. *A se studia cazul cel mai simplu după* (142), *care se întâmplă atunci când* $n=0$:

$$\Phi=A\,arc\,cot\,\zeta,$$

unde ζ *poate primi toate valorile dela* $-\infty$ *la* $+\infty$.

Răspuns. Formula (146) devine atunci nedeterminată, dar, prin metoda dictată de (114)–(123), se găsește

$$\psi=Ak\xi,$$

unde ξ variază între *0* și *1*. Această soluție reprezintă scurgerea unui fluid printr'un orificiu circular, practicat într'un perete plan indefinit; orificiul este anume porțiunea din planul xy, pentru care $\rho>k$. Vitesa într'un punct oarecare al orificiului ($\zeta=0$) este:

$$v_z=\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho}=\frac{A}{(k^2-\rho^2)^{1/2}},$$

deoarece: $k\zeta=\sqrt{k^2-\rho^2}$ pentru $z=0$. Așa dar, vitesele la marginea orificiului devin infinite.

Aplicația Nr. 63. *A se studia mișcarea produsă într'un fluid indefinit de deplasarea unui elipsoid turtit* ($\zeta=\zeta_0$) *cu vitesa U paralel cu axa lui, luată ca axă z.*

Răspuns. Mișcarea este dată de (142) cu $n=1$:

$$\Phi=A\xi(1-\zeta\,arc\,cot\,\zeta). \qquad (147)$$

Aplicând teorema lui *Rankine* la componentele vitesei normale pe suprafața elipsoidului ζ_0 (pentru fluid și corp):

$$\frac{\partial\Phi}{\partial s_\zeta}\equiv\frac{\partial\Phi}{e_2 d\zeta}=U\frac{\partial z}{\partial s_\zeta}\equiv U\frac{\partial z}{e_2 d\zeta}\equiv\frac{kU\xi}{e_2},$$

BCU IAȘI CENTRALA UNIVERSITARĂ LIBRARY

adică

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} = kU\xi ,$$

obținem

$$A = \frac{kU}{arc\,cot\,\zeta - \dfrac{\zeta_0}{1+\zeta_0^{\,2}}} .$$

In ceea ce privește funcția ψ, din (121) tragem:

$$\psi = -\frac{Ak}{2}\xi^2 \left(arc\,cot\,\zeta - \frac{\zeta}{1+\zeta^2}\right)(\zeta^2+1)+f(\zeta)$$

și pentru a se satisface și relația (121,1):

$$\psi = -\frac{Ak}{2}(1-\xi^2)\left[\,[\zeta^2+1]\,arc\,cot\,\zeta - \zeta\,\right] , \qquad (148)$$

Dacă razele la pol și la ecuator sunt a și c iar e excentricitatea secției meridiane: $e = \frac{k}{c}$, avem:

$$a = k\,\zeta_0$$

$$c = k(\zeta_0^2+1)^{1/2}$$

$$e = (\zeta_0^2+1)^{-1/2} .$$

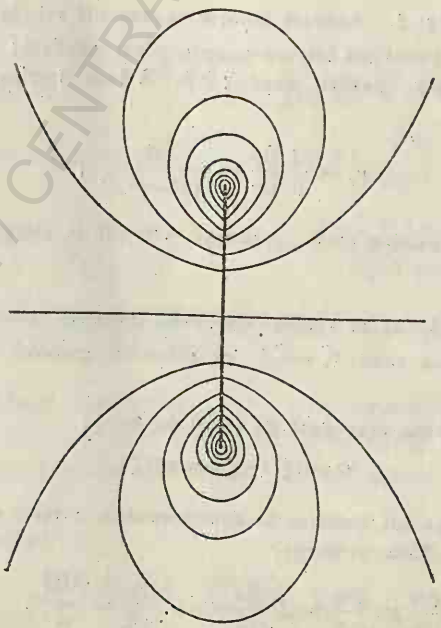


Fig. 55

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Cu aceste mărimi A devine (avem $c^2=a^2+k^2$ și deci $\frac{a}{c}=(1-e^2)^{1/2}$):

$$A=\frac{kU}{\operatorname{arc\,cot}\zeta_0-\frac{ka}{c^2}}=\frac{kU}{\operatorname{arc\,sine}-\frac{ka}{c^2}}=\frac{Uc}{\frac{1}{e}\operatorname{arc\,sine}-(1-e^2)^{1/2}}.$$

In figură se arată liniile de curent pentru salturi egale (valori echidistante) de ψ. Cazul cel mai interesant este acela al unui *disc circular*, pentru care ($\zeta_0=0$) $e=1$ și deci:

$$A=\frac{2Uc}{\pi}.$$

Valoarea lui Φ, având în vedere că $\zeta_0=0$, $k=c$ și $\rho^2=c^2(1-\xi^2)$, devine:

$$\Phi=A\xi=A\left(1-\frac{\rho^2}{c^2}\right)^{1/2}$$

și dacă ne mărginim numai la ξ de pe fața inferioară, luând pentru cea superioară $-\xi$, vom scrie pentru cele două fețe:

$$\Phi=\pm A\left(1-\frac{\rho^2}{c^2}\right)^{1/2},$$

iar pentru componenta normală a vitesei, observăm, că după normala exterioară discului ea este $+U$ pe fața superioară și $-U$ pe cea inferioară, deci respectiv $\pm U$. Formula energiei ne conduce la dublarea integralei, luată de ex. numai pe fața inferioară $\oint_0^\sigma 2\pi\rho d\rho$:

$$2T=2\frac{\varpi}{g}\oint_0^\sigma\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial n}d\sigma=2\frac{\varpi}{g}4U^2c\int_0^c\left(1-\frac{\rho^2}{c^2}\right)^{1/2}\rho d\rho=\frac{8}{3}\frac{\varpi}{g}c^3U^2,$$

ceea ce am găsit pe altă cale la aplicația Nr. 56.

Soluțiuni în funcțiuni teserale. Soluțiile ecuației (140) în funcțiuni teserale, sunt:

$$\Phi=\mathcal{P}_n^s(\xi)p_n^s(\zeta)\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}s\varphi \qquad (149)$$

și

$$\Phi=\mathcal{P}_n^s(\xi)q_n^s(\zeta)\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}s\varphi, \qquad (150)$$

în care:

$$p_n^s(\zeta)=(\zeta^2+1)^{s/2}\frac{d^s p_n(\zeta)}{d\zeta^s}$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

şi

$$q_n^s(\zeta) = (\zeta^2+1)^{s/2}\frac{d^s q_n(\zeta)}{d\zeta^s}$$

$$= (-1)^s\frac{(n+s)!}{(n-s)!}p_n^s(\zeta)\int_\zeta^\infty \frac{d\zeta}{[p_n^s(\zeta)]^2(\zeta^2+1)} \quad (151)$$

Aceste funcţiuni satisfac relaţia:

$$p_n^s(\zeta)\frac{dq_n^s(\zeta)}{d\zeta} - \frac{dp_n^s(\zeta)}{d\zeta}q_n^s(\zeta) = (-1)^{s+1}\frac{(n+s)!}{(n-s)!}\frac{1}{\zeta^2+1}. \quad (152)$$

Aplicaţia Nr. 61. *A se studia mişcarea unui elipsoid turtit* ($\zeta=\zeta_0$) *cu viteza* V *paralelă cu axa y.*

Răspuns. Avem pentru $n=1$; $s=1$:

$$\Phi = A(1-\zeta^2)^{1/2}(\zeta^2+1)^{1/2}\left\{\frac{\zeta}{\zeta^2+1} - arc\,cot\,\zeta\right\}\sin\varphi$$

cu condiţia *(Rankine)*

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta} = V\frac{\partial y}{\partial\zeta}$$

pentru $\zeta=\zeta_0$. Aceasta dă:

$$A\left\{\frac{\zeta_0^2+2}{\zeta_0(\zeta_0^2+1)} - arc\,cot\,\zeta_0\right\} kV.$$

In cazul discului ($\zeta_0=0$) avem $A=0$, ceeace era de aşteptat, căci discul se mişcă atunci chiar în planul său.

Aplicaţia Nr. 65. *A se studia mişcarea unui elipsoid turtit* ($\zeta=\zeta_0$) *în jurul axei y, cu viteza unghiulară de rotaţie* ω_y.

Răspuns. Punând $n=2$; $s=1$, obţinem:

$$\Phi = A\xi(1-\xi^2)^{1/2}(\zeta^2+1)^{1/2}\left\{3\zeta\,arc\,cot\,\zeta - 3 + \frac{1}{\zeta^2+1}\right\}\cos\varphi.$$

Condiţia la frontieră este:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta} = \omega_y\left(z\frac{\partial x}{\partial\xi} - x\frac{\partial z}{\partial\zeta}\right) = -\frac{k^2\omega_y}{(\zeta_0^2+1)^{1/2}}\xi(1-\xi^2)^{1/2}\cos\varphi$$

şi cum:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta} = A\xi(1-\xi^2)^{1/2}\left\{\zeta(\zeta^2+1)^{-1/2}\left(3\zeta\,arc\,cot\,\zeta + 3 + \frac{1}{\zeta^2+1}\right)\right.$$

$$\left. +(\zeta^2+1)^{1/2}\left(3\,arc\,cot\,\zeta - \frac{3\zeta}{\zeta+1} - \frac{2\zeta}{\zeta^2+1}\right)\right\}\cos\varphi.$$

rezultă pentru ζ_0, adică pentru discul circular:

$$\frac{3\pi}{2} A = -k^2\omega_y.$$

Pentru ambele fețe ale discului, observând că ξ pe fața inferioară variază dela -1 la 0, iar pe fața superioară ia aceleași valori cu semn schimbat (între 0 și $+1$), am putea scrie:

$$\Phi = \mp 2A\xi(1-\xi^2)^{1/2}\cos\varphi = \pm\frac{4k^2\omega_y}{3\pi}\xi(1-\xi^2)^{1/2}\cos\varphi,$$

întrebuințând valorile comune cu semn dublu (semnul superior referindu se la fața superioară). Cum

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = \frac{\partial\Phi}{\partial s_\zeta} = \frac{1}{k\left(\frac{\zeta_0^2+\xi^2}{\zeta_0^2+1}\right)^{1/2}}\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta} = \mp\frac{1}{k\xi}k^2\omega_y\,\xi(1-\xi^2)^{1/2}\cos\varphi,$$

adică

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = \mp k\omega_y(1-\xi^2)^{1/2}\cos\varphi,$$

vom scrie pentru ambele fețe, dublând elementul de suprafață $d\sigma = \rho d\rho c\varphi$

$$2T = 2\frac{\varpi}{g}\int_{\rho=0}^{c}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial n}\rho d\rho d\varphi.$$

Cum

$$\xi = (1-\frac{\rho^2}{c^2})^{1/2},\quad (1-\xi^2) = \frac{\rho^2}{c^2},\quad k = c \text{ și } \int_0^{2\pi}\cos^2\varphi = \pi,$$

vom avea

$$2T = \frac{8}{3}\frac{c\omega_y^2}{g}\int_0^c \rho^3(1-\frac{\rho^2}{c^2})^{1/2}\,d\rho,$$

ceea ce, punând de exemplu $1-\frac{\rho^2}{c^2} = t^2$, conduce imediat la:

$$2T = \frac{8}{3}\,c^5\omega_y^2\frac{\varpi}{g}\int_0^1(t^2-t^4)\,dt = \frac{16}{45}\frac{\varpi}{g}\,c^5\omega_y^2.$$

Elipsoid cu toate axele neegale. In problemele cu un astfel de elipsoid se pot întrebuința funcțiunile elipsoidale de formă mai generală, cunoscute sub numele de funcțiuni ale lui *Lamé*, funcții ce intervin în soluțiile ecuației $\Delta\varphi = 0$, exprimată în coordonate eliptice. Fără a ne opri la studiul acestor funcțiuni, vom

căuta unele soluții ale ecuației $\Delta\varphi=0$ în coordonate eliptice, și anume soluții cari sunt analoage cu funcțiunile sferice de prima și a doua speță.

Să presupunem sistemul de coordonate astfel ales, ca axa x să coincidă cu axa cea mai lungă, axa z cu cea mai scurtă a elipsoidului. Semi-axele acestuia fiind $a>b>c$, avem:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (153)$$

Familia de suprafețe ortogonale, care formează aci baza sistemului, constă din suprafețele de al doilea grad, confocale cu elipsoidul (153):

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1 \qquad (154)$$

și cari cuprind și elipsoidul în chestiune (cu $\lambda=0$), λ fiind un parametru real.

Prin orice punct $P(x,y,z)$ al spațiului trec trei asemenea suprafețe. Intradevăr, dacă punem:

$$1-\frac{x^2}{a^2+\lambda}-\frac{y^2}{b^2+\lambda}-\frac{z^2}{c^2+\lambda}=\frac{f(\lambda)}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}, \qquad (155)$$

$f(\lambda)$ va fi un polinom de al doilea grad în λ.

La orice valoare a parametrului λ, care este soluție a ecuației de al treilea grad $f(\lambda)=0$ pentru anumite valori ale lui x, y, z, corespunde o suprafață din familia (154), ce trece prin punctul respectiv $P(x,y,z)$.

Pentru a cunoaște felul acesta de suprafețe, să examinăm funcția $f(\lambda)$. Din (155) rezultă că:

$$f(\lambda)_{\lambda\to-\infty}=-\infty$$
$$f(-a^2) =-x^2(a^2-b^2)(a^2-c^2)$$
$$f(-b^2) =+y^2(a^2-b^2)(b^2-c^2)$$
$$f(-c^2) =-z^2(a^2-c^2)(b^2-c^2)$$
$$f(\lambda)_{\lambda\to-+\infty}=+\infty.$$

Conchidem că $f(\lambda)=0$ are trei rădăcini reale u, v, w, pentru cari $u\geq-c^2\geq v\geq b^2\geq w>-a^2$.

Semnele de egalitate intervin numai atunci când punctul (x,y,z) se găsește într'unul din planurile coordonate. Dacă exclu-

dem acest caz, u ne va da un elipsoid, v un hiperboloid cu o pânză şi w un hiperboloid cu 2 pânze. Fiecărui punct (x, y, z) îi corespunde un grup de valori $(u, v\, w)$.

Având în vedere că λ^3 în $f(\lambda)$ are coeficientul 1, (155) se poate scrie:

$$1-\frac{x^2}{a^2+\lambda}-\frac{y^2}{b^2+\lambda}-\frac{z^2}{c^2+\lambda}=\frac{(\lambda-u)\,\lambda-v)\,(\lambda-w)}{(a^2+\lambda)\,(b^2+\lambda)\,(c^2+\lambda)}. \quad (155.1)$$

Dacă înmulţim succesiv această relaţie cu $a^2+\lambda$, $b^2+\lambda$, $c^2+\lambda$, înlocuind apoi pe λ respectiv prin $-a^2$, $-b^2$, $-c^2$, obţinem:

$$\left.\begin{aligned} x^2 &= \frac{(a^2+u)(a^2+v)(a^2+w)}{(a^2-b^2)(a^2-b^2)} \\ y^2 &= -\frac{(b^2+u)(b^2+v)(b^2+w)}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)} \\ z^2 &= \frac{(c^2+u)(c^2+v)(c^2+w)}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)} \end{aligned}\right\} \quad (156)$$

Aşa dar, fiecărui grup de valori u, v, w, îi corespunde un grup de valori x^2, y^2, z^2, deci în general 8 puncte în fiecare din cele 8 unghiuri triedre drepte, în care se împarte spaţiul prin sistemul planurilor coordonate.

Vom numi pe u, v, w *coordonatele eliptice* ale punctului $P(x, y, z)$, relativ la elipsoidul (153).

Că cuadricele confocale $u=const$, $v=const$, $w=const$ se tae ortogonal, se verifică uşor. Intradevăr, cosinusurile directoare ale celor trei normale respective sunt, după (153), proporţionale cu $\frac{x}{a^2+\lambda}$, $\frac{y}{b^2+\lambda}$, $\frac{z}{c^2+\lambda}$, în care λ ia valorile u, v, w.

Ori, după (156) avem:

$$=\frac{x^2}{(a^2+u)(a^2+v)}+\frac{y^2}{(b^2+n)(b^2+v)}+\frac{z^2}{(c^2+u)(c^2+v)}$$

$$=\frac{a^2+w}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}-\frac{b^2+w}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}+\frac{c^2+w}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}$$

$$=\frac{(b^2-c^2)(a+w)-(a^2-c^2)(b^2+w)+(a^2-b^2)c^2+w)}{(a^2-o^2)(a^2-c^2)(b^2-c^2)}\equiv 0 \quad (157)$$

și cum primul membru reprezintă o cantitate proporțională cu cosinusul unghiului dintre normalele pe suprafețele $u=const$ și $v=const$, nulitatea acestui cosinus arată că cele două normale sunt perpendiculare una pe alta. In același mod se arată că și normala pe suprafața $w=const$ este ortogonală cu celelalte două. Rezultă că suprafețele însăși sunt deasemenea ortogonale între ele.

Dacă diferențiăm logaritmic (156) avem:

$$2\frac{dx}{x}=\frac{du}{a^2+u}+\frac{dv}{a^2+v}+\frac{dw}{a^2+w}$$

$$2\frac{dy}{y}=\frac{du}{b^2+u}+\frac{dv}{b^2+v}+\frac{dw}{b^2+w}$$

$$2\frac{dz}{z}=\frac{du}{c^2+u}+\frac{dv}{c^2+v}+\frac{dw}{c^2+w}.$$

Ridicând la pătrat, după prealabilă înmulțire respectiv cu $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{z}{z}$, și adunând, în care caz produsele duble ca

$$2\,du\,dv\left\{\frac{x}{a^2+u}\,\frac{x}{a^2+v}+\frac{y}{b^2+u}\,\frac{y}{b^2+v}+\frac{z}{c^2+u}\,\frac{z}{c^2+v}\right\}$$

dispar, conform (157), găsim:

$$ds^2\equiv dx^2+dy^2+dz^2=\left(\frac{du}{h_1}\right)^2+\left(\frac{dv}{h^2}\right)^2+\left(\frac{dw}{h^3}\right)^2 \qquad (158)$$

cu

$$\frac{1}{h_1^2}=\frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{(a^2+u)^2}+\frac{y^2}{(b^2+u)^2}+\frac{z^2}{(c^2+u)^2}\right] \text{ etc.} \qquad (159)$$

Acest rezultat era de prevăzut. Intradevăr, din (156) tragem:

$$2x\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{(a^2+v)(a^2+w)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}=\frac{x^2}{(a^2+u)}$$

și deci:

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{1}{2}\,\frac{x}{a^2+u}$$

și tot astfel

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial u}&=\frac{1}{2}\frac{y}{b^2+u}\\ \frac{\partial z}{\partial u}&=\frac{1}{2}\frac{z}{c^2+u}\end{aligned}\right\}, \qquad (159.1)$$

iar după definiția dată lui h_1 la paragraful coordonatelor curbilinii avem:

$$\frac{1}{h_1}=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2}=\frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{(a^2+u)^2}+\frac{y^2}{(b^2+u)^2}+\frac{z^2}{(c^2+u)^2}\right],$$

astfel că h_1 din (158) este chiar cel definit la paragraful coordonatelor curbilinii. Dar atunci (158) se poate scrie:

$$ds^2\equiv dx^2+dy^2+dz^2=ds_u^2+ds_v^2+ds_w^2,$$

ceea ce se știa.

In fine, derivând (155,1) în raport cu λ, în care caz primul membru dă:

$$\frac{x^2}{(a^2+\lambda)^2}+\frac{y^2}{(b^2+\lambda)^2}+\frac{z^2}{(c^2+\lambda)^2},$$

(159) se va putea scrie:

$$\frac{1}{h_1^2}=\frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{(a^2+u)^2}+\frac{y^2}{(b^2+u)^2}+\frac{z^2}{(c^2+u)^2}\right]=\frac{1}{4}\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{(\lambda-u)(\lambda-v)(\lambda-w)}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}\right]_{\lambda=u}$$

$$=\frac{(u-v)(u-w)}{4(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}$$

și tot astfel

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{h_2^2}&=\frac{(v-w(v-u)}{4(a^2+v)(b^2+v)(c^2+v)}\\ \frac{1}{h_3^2}&=\frac{(w-u)(w-v)}{4(a^2+w)(b^2+w)(c^2+w)}\end{aligned}\right\}. \qquad (160)$$

Ori, am văzut că expresia Laplacianului în coordonate curbilinii ortogonale este:

$$\Delta\Phi=\frac{1}{e_1e_2e_3}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{e_2e_3}{e_1}\frac{\partial\Phi}{du}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{e_3e_1}{e_2}\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{e_1e_2}{e_3}\frac{\partial\Phi}{\partial w}\right)\right\}$$

$$=h_1h_2h_3\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_1}{h_2h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h_2}{h_3h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{h_3}{h_1h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial w}\right)\right\}. \qquad (161)$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Introducând valorile (160), obținem:

$$\Delta\Phi=\frac{4}{(u-w)(w-u)(u-v)} \tag{162}$$

$$\times\Big\{(v-w)(a^2+u)^{1/2}(b^2+u)^{1/2}(c^2+u)^{1/2}\frac{\partial}{\partial u}\Big[(a^2+u)^{1/2}(b^2+u)^{1/2}(c^2+u)^{1/2}\frac{\partial\Phi}{\partial u}\Big]$$

$$+(w-u)(a^2+v)^{1/2}(b^2+v)^{1/2}(c^2+v)^{1/2}\frac{\partial}{\partial v}\Big[(a^2+v)^{1/2}(b^2+v)^{1/2}(c^2+v)^{1/2}\frac{\partial\Phi}{\partial v}\Big]$$

$$+(u-v)(a^2+w)^{1/2}(b^2+w)^{1/2}(c^2+w)^{1/2}\frac{\partial}{\partial w}\Big[(a^2+w)^{1/2}(b^2+w)^{1/2}(c^2+w)^{1/2}\frac{\partial\Phi}{\partial w}\Big]\Big\}.$$

Dacă punem $D_\lambda=\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}$, unde λ poate lua valorile u, v, w, vom avea prescurtat:

$$\frac{h_1}{h_2h_3}=\frac{iD_u}{2D_vD_w}(v-w)$$

$$\frac{h_2}{h_1h_2}=\frac{iD_v}{2D_wD_u}(w-u)$$

$$\frac{h_3}{h_1h_2}=\frac{iD_w}{2D_uD_v}(u-v).$$

Cu această relație ecuația $\Delta\Phi=0$ se poate scrie:

$$0=(v-w)D_u\frac{\partial}{\partial u}\Big(D_u\frac{\partial\Phi}{\partial u}\Big)+(w-u)\frac{\partial}{\partial v}\Big(D_v\frac{\partial\Phi}{\partial v}\Big)+(u-w)\frac{\partial}{\partial w}\Big(D_w\frac{\partial\Phi}{\partial w}\Big).$$

Dacă căutăm a satisface această ecuație prin soluțiuni de forma

$$\Phi=L(u)M(v)N(w)$$

și dacă punem:

$$L_1(u)=\frac{D_u}{L}\frac{d}{du}\Big(D_u\frac{dL}{du}\Big)$$

$$M_1(v)=\frac{D_v}{M}\frac{d}{dv}\Big(D_v\frac{dM}{dv}\Big)$$

$$N_1(w)=\frac{D_w}{N}\frac{d}{dw}\Big(D_w\frac{dN}{dw}\Big),$$

ecuația lui *Laplace* de mai sus se scrie:

$$(v-w)L_1+(w-u)M_1+(u-v)N_1=0,$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

de unde rezultă (p şi q fiind două constante arbitrare) forma:

$$L_1 = qu + p$$

$$M_1 = qv + p$$

$$N_1 = qw + p.$$

In consecinţă $L(u)$ va trebui să satisfacă ecuaţia

$$D_u \frac{d}{du}\left(D_u \frac{dL}{du}\right) = (qu+p)L \text{ etc.}$$

Soluţiile acestei ecuaţii, în care $L(u)$ este un polinom în u cu diverse rădăcini, eventual înmulţit cu una sau mai multe din expresiile $\sqrt{a^2+u}$, $\sqrt{b^2+u}$, $\sqrt{c^2+u}$, din care fiecare trebue să apară numai odată, constituesc funcţiunile lui *Lamé*, de care însă nu ne vom ocupa aci, mărginindu-ne, precum am mai spus, la căutarea unor soluţiuni Φ, analoage cu funcţiunile sferice.

Aplicaţia Nr. 66. *A se studia cazul, când Φ depinde numai de u, adică ar fi $= L(u)$.*

Răspuns. Soluţiile particulare ale ecuaţiei lui *Laplace*, cari apar cele mai simple, sunt acele pentru cari Φ este o funcţie numai de una din variabilele u, v, w.

Să presupunem, aşa dar, că Φ este funcţie numai de u. Vom avea

$$(a^2+u)^{1/2}(b^2+u)^{1/2}(c^2+u)^{1/2}\frac{\partial\Phi}{\partial u} = const,$$

de unde:

$$\Phi = C\int_u^\infty \frac{du}{D} \qquad (163)$$

cu

$$D = [(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)]^{1/2},$$

şi constanta aditivă, cuprinsă implicit în Φ, astfel aleasă, ca să se anuleze pentru $u=\infty$ (limitele integralei fiind atunci aceleaşi).

La această soluţie, care corespunde soluţiei $\Phi = \frac{b}{r}$ în cazul funcţiunilor sferice (într'adevăr pentru u mare, a, b şi c se pot neglija şi semi-axele suprafeţelor elipsoidale, egale cu r, devin $u^{1/2}$; ori $c\int_u^\infty u^{-3/2}\,du = \frac{2c}{u^{1/2}} \approx \frac{b}{r}$) suprafeţele echipotenţiale sunt elipsoide confocale, iar mişcarea în spaţiul exterior unui asemenea elipsoid (de ex.: aceluia cu $\lambda=0$) este astfel, ca şi cum ar proveni dintr'o anumită distribuţie de surse simple pe suprafaţă. Vitesa într'un punct este dată de formula:

$$\frac{d\Phi}{ds_u} = \frac{d\Phi}{e_1 du} = h_1\frac{d\Phi}{du} = c\frac{h_1}{D}. \qquad (163.')$$

La mare distanţă de origină elipsoidele $u=const$ devin aproape sfere de rază $\sqrt{u}$ şi viteza devine $-\frac{2c}{r^2}$. Pe fiecare suprafaţă elipsoidală $u=const$, viteza variază proporţional cu perpendiculara dela origină pe planul tangent.

Pentru a găsi repartiţia de surse pe suprafaţa $u=0$, care ar produce în spaţiul exterior mişcarea existentă, să introducem în formula

$$\Phi_P=\frac{1}{4\pi}\oint^{\sigma}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}+\frac{\partial\Phi'}{\partial n'}\right)d\sigma,$$

valoarea (163) a lui Φ, iar pentru Φ' (care se referă la spaţiul interior), să introducem valoarea constantă:

$$\Phi'=c\int_0^{\infty}\frac{du}{D}.$$

In acest caz, formula pentru densitatea superficială a repartiţiei de surse dă valoarea

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n}+\frac{\partial\Phi'}{\partial n'}=\frac{c}{abc}h. \qquad (163.2)$$

Fluid într'un vas elipsoidal. Studiul se poate face în coordonate carteziene. Dacă vasul se mişcă în direcţia x cu viteza U, fluidul închis se mişcă ca un corp rigid, iar potenţialul de viteză este simplu: $\Phi=Ux$.

Să presupunem acum că vasul se învârteşte în jurul uneia din axele principale (de ex. al axei Ox) cu viteza de rotaţie ω_x. Dacă ecuaţia suprafeţei vasului este:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

condiţia la frontieră constă (*Rankine*) în egalitatea componentelor normale. Pentru fluid avem:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}+\frac{d\Phi}{dz}\frac{\partial z}{\partial n}=\frac{d\Phi}{\partial n}, \qquad (164)$$

unde $\frac{\partial x}{\partial n}, \frac{\partial y}{\partial n}, \frac{\partial z}{\partial n}$ sunt cosinusurile directoare ale normalei, ce pot fi înlocuite cu parametrii directori ai normalei suprafeţei vasului

$$\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2}$$

ACADEMIA CENTRALĂ UNIVERSITY LIBRARY

dar atunci, față de expresiile în cosinus care figurează în (164), va rezulta totul înmulțit cu factorul comun

$$\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}=\frac{2}{h_1},$$

(164) egalat cu componenta normală a vitesei suprafeței luând forma

$$\frac{x}{a^2}\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{y}{b^2}\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\frac{z}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial z}=-\frac{y}{b^2}\omega_x z+\frac{z}{c^2}\omega_y y. \qquad (164.1)$$

Putem lua atunci ca funcție potrivită: $\Phi=Ayz$ sau, după aflarea lui A prin identificare cu relația precedentă:

$$\Phi=\frac{b^2-c^2}{b^2+c^2}\omega_x yz.$$

Dacă centrul se mișcă cu vitesa $[U, V, W]$, iar vitesele de rotație în jurul axelor principale sunt componentele lui $\bar{\omega}$ $[\omega_x, \omega_y, \omega_z]$, vom putea scrie prin suprapunere:

$$\Phi=U_x+V_y+W_z+\frac{b^2-c^2}{b^2+c^2}\omega_x yz+\frac{c^2-a^2}{c^2+a^2}\omega_y zx+\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\omega_z zy.$$

Putem considera și cazul când vasul își schimbă nu numai locul dar și forma, totuși astfel ca să rămână un elipsoid.

Dacă axele variază cu vitesele $\dot{a}, \dot{b}, \dot{c}$, condiția generală la limită (Vol. I pag. 47)

$$\frac{dF}{dt}=0$$

se exprimă astfel:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{x^2}{a^3}\dot{a}+\frac{y^2}{b^3}\dot{b}+\frac{z^2}{c^3}\dot{c}+\frac{x}{a^2}\dot{x}+\frac{y}{b^2}\dot{y}+\frac{z}{c^2}\dot{z}\\ &\equiv\frac{x^2}{a^3}\dot{a}+\frac{y^2}{b^3}\dot{b}+\frac{z^2}{c^3}\dot{c}+\frac{x}{a^2}\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{y}{b^2}\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\frac{z}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial z}=0.\end{aligned}\right\}(165)$$

Această ecuație este satisfăcută de funcția

$$\Phi=-\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{a}}{a}x^2+\frac{\dot{b}}{b}y^2+\frac{\dot{c}}{c}z^2\right)$$

și pentru ca Φ să fie o funcție armonică, trebue ca:

$$\frac{\dot{a}}{a}+\frac{\dot{b}}{b}+\frac{\dot{c}}{c}=0,$$

care este de fapt condiția, ca volumul elipsoidului deformabil ($\frac{3}{4}\pi abc$) să rămână același (relația exprimă că suma celor trei dilatații proporționale în unitatea de timp, după direcțiile axelor principale, este nulă).

Notă. Dacă revenim acum la soluția (163) $\Phi = C\int_u^\infty \frac{du}{D}$, dată în aplicația Nr. 66, vedem că și ea poate fi considerată ca reprezentând mișcarea provenită din variația dimensiunilor elipsolidului, în așa fel ca suprafața să rămână asemenea cu ea însăși, axele principale păstrându-și direcțiile. Dacă punem:

$$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{\dot{b}}{b} = \frac{\dot{c}}{c} = k,$$

condiția la frontieră (165) devine:

$$\frac{x^2}{a^3}\dot{a} + \frac{y^2}{b^3}\dot{b} + \frac{z^2}{c^3}\dot{c} + \frac{2}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0$$

(căci am văzut mai sus că, în primul membru (164.1), în loc de cosinurile directoare din (164) s'au luat parametrii directori ai normalei, deci $\frac{\partial\Phi}{\partial n}$ trebue și el înmulțit cu $\frac{2}{h_1}$), sau

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = -\frac{1}{2}kh_1.$$

Această relație devine identică cu (163,1), dacă punem:

$$\frac{C}{D} = -\frac{k}{2}.$$

Aplicația Nr. 67. *A se studia cazul particular al aplicației* Nr. 66, *atunci când elipsoidul se turtește într'o elipsă plană.*

Răspuns. Un caz special al distribuției de surse (163,2) este acela, în care sursele sunt repartizate pe un disc eliptic, pentru care $u = -c^2$ și deci (156) $z^2 = 0$. Acest caz, important și în electrostatică, este o aplicație la scurgerea printr'un *orificiu eliptic.*

Dacă acum planul xy, cu excepția spațiului cuprins în elipsa

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = 0,$$

constă dintr'un perete rigid (lipsit de surse), avem, punând în formulele din aplicația Nr. 66 $c=0$:

$$\Phi = \mp B \int_0^u \frac{du}{(a^2+u)^{1/2}(b^2+u)^{1/2}u^{1/2}}, \tag{166}$$

unde limita superioară este rădăcina pozitivă e ecuației

$$\frac{x^2}{a^2+u}+\frac{y^2}{b^2+u}+\frac{z^2}{u}=1, \tag{167}$$

iar semnul se va lua — sau +, după cum punctul respectiv, la care se referă, este de partea pozitivă sau negativă a planului xy. Aci nu s'a mai pus condiția ca Φ să se anuleze pentru $u=\infty$.

Pe întinderea orificiului eliptic ($u=0$) cele două valori ale lui Φ stau mereu în legătură între ele.

Ca și la aplicația Nr. 66 vitesa la ∞ este aproape egală cu $\frac{2B}{r^2}$. Pentru punctele din orificiu vitesa se poate deduce direct din (166) și (167). Putem pune anume aproximativ, fiindcă u este mic, după (167):

$$\delta z = \pm u^{1/2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^{1/2}$$

și, integrând pe (156) între o și u foarte mic:

$$\delta\Phi = \pm\frac{2Bu^{1/2}}{ab}.$$

Rezultă

$$v_z \equiv \frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{2B}{ab}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b_2}\right)^{-1/2}. \tag{168}$$

Această vitesă, precum se știa de altfel, devine infinită la conturul orificiului (pentru care $1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$). Cazul particular al unui orificiu *circular* a fost studiat mai sus pe altă cale (aplicația Nr. 55 și Nr. 62). La Nr. 62 de ex. aveam:

$$v_z = \frac{A}{(k^2-\rho^2)^{1/2}} = B(k^2-\rho^2)^{-1/2},$$

după cum (168) se mai poate scrie în cest caz ($a=b$ și $x^2+y^2=\rho^2$):

$$v_z = 2B(a^2-\rho^2)^{-1/2}.$$

Elipsoid în mișcare de translație după axa x. Prin analogie cu funcțiunile sferice să încercăm, pentru spațiul exterior, o soluție a ecuației lui *Laplace*, de forma:

$$\Phi = x\chi. \tag{169}$$

Din $\Delta\Phi=0$ rezultă

$$\Delta\chi+\frac{2}{x}\frac{\partial\chi}{\partial x}=0. \tag{170}$$

Să vedem dacă această ecuaţie poate fi satisfăcută cu χ funcţiune exclusivă de u. In această ipoteză vom avea

$$\frac{\partial\chi}{\partial x}=\frac{d\chi}{du}\frac{\partial u}{\partial x},$$

şi cum în teoria cordonatelor curbilinii ortogonale am văzut că avem

$$\frac{1}{h_1}\frac{\partial u}{dx}=h_1\frac{\partial x}{\partial u},$$

vom putea scrie

$$\frac{\partial\chi}{\partial x}=h_1^2\frac{d\chi}{\partial u}\frac{dx}{du}$$

şi, înlocuind pe

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{1}{2}\frac{x}{a^2+u} \quad \text{şi} \quad h_1^2=4\frac{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}{(u-v)(u-w)},$$

găsim pentru a pune în (170):

$$\frac{2}{x}\frac{\partial\chi}{\partial x}=4\frac{(b^2+u)(c^2+u)}{(u-v)(u-w)}\frac{d\chi}{du}.$$

Dacă exprimăm acum şi pe $\Delta\chi$ în funcţie de u, (170) ia forma:

$$(a^2+u)^{1/2}(b^2+u)^{1/2}(c^2+u)^{1/2}\frac{d}{du}\left[(a^2+u)^{1/2}(b^2+u)^{1/2}(c^2+u)^{1/2}\frac{d\chi}{du}\right]$$

$$=-(b^2+u)(c^2+u)\frac{d\chi}{du},$$

deci:

$$\frac{1}{(a^2+u)^{1/2}(b^2+u)^{1/2}(c^2+u)^{1/2}\frac{d\chi}{du}}\frac{d}{du}\left[(a^2+u)^{1/2}(b^2+u)^{1/2}(c^2+u)^{1/2}\right]$$

$$=-\frac{1}{a^2+u},$$

care se reduce la

$$\frac{d}{du}\log\left[(a^2+u)^{1/2}(b^2+u)^{1/2}(c^2+u)^{1/2}\frac{d\chi}{du}\right]=-\frac{1}{a^2+u}. \tag{170.1}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Rezultă imediat:

$$\chi = C\int_u^\infty \frac{du}{(a^2+u)^{3/2}\,(b^2+u)^{1/2}\,(c^2+u)^{1/2}}, \qquad (171)$$

unde constanta ce intervine la a doua integrare s'a ales astfel (luând a doua limită a lui u la ∞) ca χ să se anuleze la ∞.

Soluţia din (169) şi (170) permite a se găsi mişcarea unui fluid în repaos la ∞, care este produsă de un elipsoid ce se mişcă paralel cu una din axele lui principale (de ex. axa x).

Dacă acest elipsoid este

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

şi se mişcă paralel cu axa x cu vitesa U, condiţia la frontieră (*Rankine*) este

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u}=U\frac{\partial x}{\partial u} \qquad \text{pentru} \quad u=0. \qquad (172)$$

Dacă, punând $\left[(a^2+u)\,(b^2+u)\,(c^2+u)\right]^{1/2}=D$, notăm prescurtat

$$abc\int_0^\infty \frac{du}{(a^2+u)D}=\alpha_0, \quad abc\int_0^\infty \frac{du}{(b^2+u)D}=\beta_0, \quad abc\int_0^\infty \frac{du}{(c^2+u)D}=\gamma_0,$$

se poate uşor vedea că, fiind vorbă de integrale definite de dimensiune nulă (u este de gradul al doilea), mărimele α_0, β_0, γ_0 sunt cantităţi numerice. Condiţia la frontieră (172), ţinând seamă că:

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{1}{2}\frac{x}{a^2+u}$$

impune pentru

$$\Phi=x\chi=Cx\int_u^\infty \frac{du}{(a^2+u)D} \qquad (173)$$

valoarea constantei nedeterminate:

$$C=\frac{abc}{\alpha_0-2}U.$$

Soluţiile corespunzătoare pentru mişcarea elipsoidului paralel cu axa y sau z se pot deduce imediat, datorită simetriei, iarprin suprapunere se obţine cazul general al translaţiei în o direcţie oarecare.

La distanţă mare dela origină (173) devine echivalent cu:

$$\Phi=\frac{2}{3}C\frac{x}{r^3},$$

care este funcţia de vitesă a unui dubleu în origină, cu moment $-\frac{8}{3}\pi C$ sau

$$\frac{8}{3}\frac{\pi}{2-\alpha_0}abc\,U. \qquad (174)$$

Energia cinetică a fluidului (ţinând seamă că (173) pentru $u=0$ dă $\Phi\frac{Cx\alpha_0}{abc}$) este dată de

$$2T=\frac{\varpi}{g}\oint^{\sigma}\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial n}d\sigma=\frac{\alpha_0}{2-\alpha_0}\frac{\varpi}{g}U^2\oint^{\sigma}x\,d\sigma_x=\frac{\alpha_0}{2-\alpha_0}\frac{\varpi}{g}\frac{4}{3}\pi abc\,U^2,$$

unde am schimbat semnul pentru a avea în dn normala *interioară* (dela frontieră în spre fluid), adică exterioară elipsoidului, şi a ajunge astfel la expresia volumului, după înlocuirile

$$\frac{\partial\Phi}{dn}=U\frac{\partial x}{\partial n}=Un_x \quad \text{şi} \quad n_x\,d\sigma=\sigma_x.$$

Creşterea aparentă a masei elipsoidului (pentru ca energia lui cinetică să reprezinte şi energia cinetică a fluidului) este, aşa dar, fracţiunea:

$$q=\frac{\alpha_0}{2-\alpha_0}$$

a masei fluidului deslocuit. In cazul sferei ($a=b=c$) găsim $\alpha_0=\frac{1}{3}$ şi $q=\frac{1}{2}$, rezultat găsit şi pe altă cale la aplicaţia Nr. 42 pag. 221. Dacă punem $a=b$, obţinem cazul unui elipsoid de rotaţie, care include şi cazul discului circular cu $c=0$.

Pentru elipsoidul lunguet ($c>a$) cu excentricitatea secţiunei meridiane e (adică, semidistanţa focală la patrat fiind $k^2=c^2-a^2$ $\frac{k}{a}=e$ şi deci $c^2=a^2(1+e^2)$ şi $\frac{c}{a}=\sqrt{1+e^2}$) avem:

$$\alpha_0=\beta_0=\frac{1}{e^2}-\frac{1-e^2}{2e^3}\log\frac{1+e}{1-e},\quad \gamma_0=\frac{2(1-e^2)}{e^3}\left(\frac{1}{2}\log\frac{1+e}{1-e}-e\right).$$

Se verifică că pentru $e=0$ (sfera): $\alpha_0=\alpha_0=\gamma_0=\frac{2}{3}$.

Valorile lui q pentru un asemenea elipsoid

$$q_1=\frac{\gamma_0}{2-\gamma_0},\quad q_2=\frac{\alpha_0}{2-\alpha_0},$$

după cum mișcarea lui de translație se face în direcția axei mici sau a celei mari, sunt următoarele, în legătură cu o serie de valori ale raportului $\frac{c}{a}=\sqrt{1+e^2}$:

$\frac{c}{a}$	q_1	q_2
1	0,5	0,5
1,60	0,305	0,621
2,99	0,122	0,803
6,01	0,045	0,918
9,97	0,021	0,960
∞	0	1 .

Rotația unui elipsoid într'un fluid indefinit. Să încercăm acum soluția:

$$\Phi=yz\chi,$$

cu χ funcție exclusivă de u.

Condiția $\Delta\Phi=0$ conduce la

$$\Delta\chi+\frac{2}{y}\frac{\partial\chi}{\partial y}+\frac{2}{z}\frac{\partial\chi}{\partial z}=0.$$

Ori:

$$\frac{2}{y}\frac{\partial\chi}{\partial y}+\frac{2}{z}\frac{\partial\chi}{dz}=2\frac{dx}{du}\left\{\frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{z}\frac{\partial u}{\partial z}\right\}=2h_1^2\left(\frac{1}{y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial\chi}{du},$$

iar după (159,1) și (160):

$$=4\frac{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}{(u+v)(u-w)}\left(\frac{1}{b^2+u}+\frac{1}{c^2+u}\right)\frac{d\chi}{du}.$$

Folosind (162) pentru a exprima pe $\Delta\chi$ în funcție de u, analog cum s'a procedat pentru ca dela (170) să se treacă la (170,1), găsim:

$$\frac{d}{du}\log\left[(a^2+u)^{1/2}(b^2+u)^{1/2}(c^2+u)^{1/2}\frac{d\chi}{du}\right]=-\frac{1}{b^2+u}-\frac{1}{c^2+u},$$

rezultând:

$$\chi=C\int_u^\infty\frac{du}{(b^2+u)(c^2+u)D},$$

unde de asemenea constanta implicită dela a doua integrare s'a ales stfel, ca χ la infinit să se anuleze.

Pentru un elipsoid solid, care se rotește cu viteza ω_x în jurul axei x, avem condiția la frontieră ($u=0$) (*Rankine*):

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u}=\omega_x\left[y\frac{\partial z}{\partial u}-z\frac{\partial y}{\partial u}\right].$$

Aplicând această condiție funcțiunei

$$\Phi=yz\chi=Cyz\int_u^\infty\frac{du}{(b^2+u)(c^2+u)D},$$

găsim valoarea impusă constantei nedeterminate C:

$$\frac{C}{ab^2c^2}-\frac{C}{2}\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\frac{\gamma_0-\beta_0}{abc(b^2-c^2)}=\frac{1}{2}\omega_x\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right),$$

adică

$$C=-\frac{(b^2-c^2)^2}{2(b^2-c^2)+(b^2+c^2)(\beta_0-\gamma_0)}abc\omega_x.$$

Formulele pentru cazul învârtirei în jurul axei y sau z se pot deduce imediat, grație simetriei.

Energia cinetică este dată de formula (n normala exterioară fluidului, deci interioară elipsoidului):

$$2T=\frac{\varpi}{g}\oint^\sigma\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial n}d\sigma$$

$$=\frac{\varpi}{g}C\omega_x\int_0^\infty\frac{du}{(a^2+u)^{1/2}(b^2+u)^{3/2}(c^2+u)^{3/2}}\oint^\sigma(n_y z-n_z y)yzd\sigma,$$

unde n_x, n_y, n_z sunt acum cosinusurile directoare ale normalei elipsoidului.

Ultima integrală de suprafață se poate scrie și transforma astfel într'o integrală de volum (prin $d\sigma_y$ și $d\sigma_z$ vom însemna acum pe $-n_y d\sigma$, $-n_z d\sigma$, referitoare la normala exterioară elipsoidului):

$$\int\int y^2 z d\sigma_z - z^2 y d\sigma_y = \int\int\int \left(\frac{\partial(y^2 z)}{\partial z} - \frac{\partial(z^2 y)}{\partial y}\right) dxdydz$$

$$= \int\int\int (y^2 - z^2) dxdydz,$$

după teorema lui *Gauss*, şi mai departe:

$$= \frac{1}{5}(b^2 - c^2)\frac{4}{3}\pi abc.$$

Rezultă:

$$2T = \frac{1}{5}\frac{(b^2-c^2)(\gamma_0-\beta_0)}{2(b^2-c^2)+(b^2+c^2)(\beta_0-\gamma_0)} \cdot \frac{4}{3}\pi abc \frac{\varpi}{g}\omega_x^2.$$

Pentru un elipsoid lunguet (după axa z) de rotaţie, care se învârteşte în jurul unui diametru ecuatorial, se găseşte ca raport între momentul de inerţie polar al fluidului şi momentul de inerţie polar fictiv al masei de fluid deslocuite (e fiind excentricitatea curbei meridiane):

$$q' = \frac{e^4(\alpha_0 - \gamma_0)}{(2-e^2)[2e^2 - (2-e^2)(\alpha_0 - \gamma_0)]}.$$

Iată câteva valori ale lui q' în legătură cu raportul $\frac{c}{a} = \sqrt{1+e^2}$:

$\frac{c}{a}$	q'
1	0
2,00	0,240
3,99	0,608
6,01	0,764
9,97	0,883
∞	1 .

Aci s'a tratat numai una din speţele funcţiunilor elipsoidale de ordinul al doilea.

Metodele pentru soluţiile corespunzătoare celorlalte speţe se dicută în cartea lui *Ferrus*. Aceste soluţii ar permite de a exprima mişcarea produsă prin variaţia lungimii axelor unui elip-

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

soid în fluidul înconjurător, în cazul când acesta își menține volumul, adică atunci când:

$$\frac{\dot{a}}{a}+\frac{\dot{b}}{b}+\frac{\dot{c}}{c}=0.$$

Mai sus s'a găsit soluția pentru cazul când un elipsoid se dilată sau se contractă, rămânând asemenea cu el însuși. Prin suprapunere putem obține cazul unei frontiere interioare, care se deplasează și totdeodată își schimbă dimensiunile arbitrar.

In acest capitol s'au tratat exclusiv frontiere interioare de formă sferică sau elipsoidală. Se mai pot găsi, evident, soluții ale ecuației $\Delta\Phi=0$, care să se refere și la alte forme de frontiere, pe o cale mai mult sau mai puțin analoagă. Astfel se poate trata problema torului (*Hiks* și *Dyson*), aceea a unei calote sferice (*Bonet*), etc.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

CAP. V.

ECUAȚIILE GENERALE ALE HIDRODINAMICEI FLUIDELOR PERFECTE.

1. Reamintirea formulelor și stabilirea unor noui variante utile.

In vol. I pag. 55 tratându-se numai despre *fluidele* perfecte, s'a aratat în ce constă și cum se rezolvă problema generală a hidrodinamicei. Această problemă se tratează de altfel în mod analog, cu completările neceaare, și pentru *fluidele viscoase în regim laminar*. Pentru *regimul turbulent* trstarea analitică a problemei este estrem de dificilă și ne mulțumim numai cu formule aproximative.

Deosebirea esențială în ultimele două cazuri este, că în ecuațiile mecanice trebue ținut seama și de eforturile de viscozitate, respectiv de turbulență (eforturi mai greu de precizat), iar pentru condițiile la limită se admite că, datorită viscozității, stratul fluid în contact cu pereții aderă la aceștia, afară dacă întâmplător există *deslipire* sau *decolare*, cu formarea de suprafețe de discontinuitate.

Problema în chestiune constă, precum am văzut, în determinarea celor cinci funcțiuni necunoscute, obișnuit în sistemul variabilelor lui *Euler*: v_x, v_y, v_z, p, ρ (în loc de ρ se poate lua $\varpi = g\rho$) în funcție de x, y, z, t. Pentru aceste funcțiuni dispunem de cinci ecuații: 3 *mecanice*, 1 *geometrică* sau cantitativă, numită *ecuație de continuitate* și 1 *fizică* (sau două fizice dacă intervine și funcțiunea: *temperatură*, fiind atunci 6 funcțiuni necunoscute). *Condițiile inițiale* sau *condițile la limită*, servesc la determinarea *constantelor de integrare*.

Ecuațiile mecanice după cele trei axe se pot contopi într'o

singură ecuație vectorială, variabilele independente fiind atunci $\bar{r}[x, y, z]$ și t, adică 2 în loc de 5, din care însă una vectorială ceea ce revine la același lucru.

In privința *ecuației fizice*, zisă și *caracteristică* (a proprietăților fizice principale ale materiei), cazurile mai ușor de tratat sunt acelea în cari ρ (sau ϖ) este constant, cum este cazul lichidelor sau chiar al gazelor în mișcările, la care fluidul nu se comprimă sau se comprimă foarte puțin, sau, în fine, cum este cazul gazelor, când ele evoluează după legea $\frac{p}{\varpi^{\varkappa}} = const$, cu $\varkappa = 1$ în evoluția *izotermă*, $\varkappa = \gamma$ în cea *adiabatică*, și $\varkappa \neq \gamma$ în evoluția *politropică*, constanta respectivă fiind determinată de condițiile inițiale ale problemei. In asemenea probleme nu este nevoie în general a se cerceta temperatura.

Dacă totuși cercetăm simultan și funcțiunea *temperatură*: $T = \theta + 273$, pe lângă menționata ecuație fizică, adecuată cazului particular studiat, trebue să facem uz și de ecuația fizică *generală* $\frac{p}{\varpi} + RT$, unde în cazul izoterm T este în general dat dela început, iar în celelalte cazuri T este variabil, având în momentul inițial o anumită valoare, care determină constanta ecuației fizice particulare arătată mai sus, după cazuri.

Revenind la *ecuațiile mecanice* și aceea de *continuitate*, reamintim că forma lor diferă, după cum ele sunt exprimate în sistemul lui *Euler* sau în acela al lui *Legrange*. Ecuațiile mecanice, pe lângă formele considerate la început pentru *echilibrul dinamic* (echilibru convențional, în care termenul cu accelerația luat cu semn invers este interpretat ca forță de inerție, exprimându-se astfel o relație numai între forțe), pot îmbrăca și forma scalară, cu dimensia lucrului mecanic, la care se ajunge prin înmulțirea lor respectiv cu dx, dy, dz și adunare. O asemenea ecuație diferențială se poate în anumite condițiuni integra, fără a constitui însă totdeauna ecuația forțelor vii (a energiei), care pentru aceasta cere, ca dx, dy, dz, ce înmulțesc forțele, să fie drumuri parcurse de punctele de aplicație ale forțelor.

Sistemul lui Euler.

a) **Ecuațiile mecanice.** In sistemul lui *Euler*, cel mai maniabil și mai utilizat în practică, avem, raportate la unitatea de-

masă, cele trei ecuaţii mecanice (relaţii între forţe), stabilite după trei axe dreptunghiulare arbitrare:

$$\left.\begin{aligned} F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{dv_x}{dt} \equiv \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x}v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y}v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z}v_z \\ F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{dv_y}{dt} \equiv \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial v_y}{\partial x}v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y}v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z}v_z \\ F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{dv_z}{dt} \equiv \frac{\partial v_z}{dt} + \frac{\partial v_z}{\partial y}v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y}v_y + \frac{\partial v_z}{\partial z}v_z \end{aligned}\right\}, \quad (1)$$

iar înmulţind respectiv cu vectorii unitari **x**, **y** şi **z** şi adunând ecuaţia vectorială:

$$\overline{F} - \frac{1}{\rho} grad\, p = \frac{d\overline{v}}{dt} \equiv \frac{\partial \overline{v}}{dt} + \overline{v}\, grad.\overline{v} \qquad (1.1)$$

sau, ţinând seama de *Cap. II* (27), varianta:

$$\overline{F} - \frac{1}{\rho} grad\, p = \frac{d\overline{v}}{dt} \equiv \frac{\partial \overline{v}}{dt} + grad\frac{v^2}{2} - [\overline{v}\, rot\, \overline{v}] \cdot \quad (1.2)$$

Forma aceasta din urmă, dacă $\overline{F} = -grad\, U$ şi $\rho = \rho(p)$ (în care caz avem $\frac{\partial}{\partial x}\int \frac{dp}{\rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$), devine:

$$-grad\left(U + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2}\right) = \frac{\partial \overline{v}}{dt} - [\overline{v}\, rot\, \overline{v}], \quad (1,3)$$

având în cazul *mişcărilor potenţiale* ($rot\, \overline{v} = 0$ şi deci $\overline{v} = grad\, \Phi$) avantajul, de a se integra imediat sub forma scalară menţionată.

Intradevăr, în cazul unei mişcări potenţiale (1.3) se reduce la:

$$-grad\left(U + \int \frac{\partial p}{\rho} + \frac{v^2}{2}\right) = \frac{\partial (grad\, \Phi)}{\partial t} = grad\, \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (1.3.1)$$

de unde, trecând totul în membrul ântâi şi integrând în raport cu spaţiul (x, y, z), când apare o constantă arbitrară de integrare, ce poate fi funcţie de t, şi punând (cu introducerea factorului constant g pentru ca H ză reprezinte o lungime):

$$U + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2} = gH,$$

obţinem

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + U + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2} \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial t} + gH = f(t). \qquad (2)$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Evident că Φ poate conține orice funcție arbitrară de t, căci aceasta nu schimbă valoarea vitezelor, cari sunt derivatele lui Φ în raport cu spațiul. Funcțiunea arbitrară $f(t)$ din membrul al doilea ar putea deci lipsi, înlocuindu-se în membrul al doilea prin zero. Am preferat însă a lăsa să figureze $f(t)$, pentru ca, în cazul mișcării permanente sau staționare, să nu fim tentați de a pune zero în locul lui $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$, fără constantă absolută arbitrară, când în realitate trebue să punem o astfel de constantă tocmai din cauza prezenței în Φ a unei funcții arbitrare de t, care în cazul mișcării staționare devine o constantă absolută, ce urmează a fi determinată de condițiile inițiale. Vom scrie deci imediat, în cazul mișcării permanente, cu o constantă absolută în membrul al doilea (iar nu zero):

$$U+\int \frac{dp}{\rho}+\frac{v^2}{2} \equiv gH = c^{tă}. \qquad (3)$$

Aceasta este ecuația lui *Bernoulli* din cazul mișcărilor potențiale (aplicabilă la întreaga masă) și în care avem obișnuit $\bar{F}=\bar{g}$.

Dacă luăm atunci axa z verticală ascendentă, avem $U=gz+c^{tă}$ sau simplu gz; întradevăr constanta explicită din (3) poate îngloba și constantele implicite din membrul întâiu, cum este aceea subînțeleasă în U, de altfel și aceia pe care o comportă $\int \frac{dp}{\rho}$ (integrală indefinită cu limita inferioară arbitrară, p_0 și ρ_0 respective fiind în orice caz legate între ele prin relație $\rho=f(p)$, după cum am precizat mai sus).

Este ușor de constatat că cei trei termeni ai trinomului lui *Bernoulli*, cari însumează gH, pot fi interpretați ca energii ale unității de masă. Astfel $\frac{v^2}{2}$ reprezintă, pentru unitatea de masă, energia cinetică, $U=gz$ energia potențială față de planul de referință xy, $\int \frac{dp}{\rho}$ [în cazul $\rho=f(p)$] energia elastică acumulată în unitatea de masă, atunci când dela $\rho_0=f(p_0)$ s'a trecut la $\rho=f(p)$. Numai când am avea un fluid riguros incompresibil ($\rho=const$) expresia corespunzătoare $\frac{p}{\rho}$ nu poate reprezenta o energie elastică acumulată, tocmai din cauza lipsei de elasticitate a

a unui asemenea fluid (ipotetic); întradevăr presiunea s'ar putea modifica teoretic fără nici o cheltuială de energie (de ex. cu o presă hidraulică ce ar acționa asupra unei mase incompresibile, presiunea s'ar putea urca la orice valoare, fără desvoltare de lucru mecanic).

Totuși nu se poate spune dela început că (3) ar fi ecuația conservării energiei, fiindcă această relație, provenind dintr'o integrare de spațiu (sub t constant) exprimă numai că energia totală a unității de masă în orice punct al fluidului este aceiași. Dacă însă se consideră una și aceiași moleculă (ori care dealtfel), cum gH în (3) (nu însă evident și în (2)), este constant nu numai în spațiu dar și în *timp* (mișcare permanentă), se poate spune că (3) exprimă totodată și conservarea energiei moleculei particulare considerată, întru cât la deplasarea acesteia gH rămâne același.

Dacă mișcarea nu este permanentă, ecuația (2), ca integrală de spațiu, arată în fiecare moment t, numai distribuția în spațiu a lui gH, adică a energiei totalizate pe unitatea de masă.

Cazul general (mișcare rotațională) al ecuației mecanice-scalare se va desvolta mai departe.

b) **Ecuația de continuitate.** Se numește astfel, deoarece-această ecuație nu este valabilă decât atunci când fluidul este *continuu*, adică fără goluri. In sistemul lui *Euler* această ecuație, *în lipsă de surse*, exprimă, că creșterea în unitatea de timp a masei cuprinsă în unitatea de volum (infinitezimală) *presupus fix*, și anume $\frac{\partial \rho}{\partial t}$, se *compensează* (adică însumează zero) cu excesul masei ești asupra celei intrate prin toate fațetele volumului (presupus, la demonstrație, pentru ușurința calculului, paralelipipedic):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0 \qquad (4)$$

sau în notație vectorială:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\,(\rho \bar{v}) = 0. \qquad (4.1)$$

Bine înțeles, dacă există *surse repartizate volumic* (*pozitive* când *alimentează*, *negative* când *absorb* sau *derivă*) cu un debit de masă μ pe unitatea de volum, membrul al doilea, care în cazul menționat al compensării era nul, va fi acum egal cu μ, adică

cu contribuția maselor, care va servi parte la creșterea masei din interior, parte la masa eșită (adică la debitul de masă *eșind* sau *divergent* din volumul unitar infinitezimal, deci debit raportat la unitatea de volum):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\,(\rho \bar{v}) = \mu \qquad (4.2)$$

Cu alte cuvinte, debitul μ al sursei pe unitatea de volum, minus creșterea masei din interior în unitatea de timp, adică creștera densității: $\frac{\partial \rho}{\partial t}$, reprezintă masa eșind în total din volumul unitar în unitatea te timp, adică *divergența vectorului* $\rho\bar{v}$ (= *fluxul eșind* = *fluxul divergent al vectorului* $\rho\bar{v}$, prin suprafața limitativă a unității de volum).

Sistemul lui Lagrange.

Ecuația mecanică scalară. In sistemul variabilelor *Lagrange* ecuațiile mecanice și (acea de continuitate) au forma expusă în *Partea Introductivă*, putând primi și forma scalară particulară (stabilită acolo deasemenea), la care conduce transformarea lui *Weber* cu introducerea unei funcțiuni auxiliare $\chi(x, y, z)$, ce pentru $t=0$ se anulează.

Această formă interesantă (Volumul I pag. 54 jos) a ecuațiilor lui *Lagrange*, în notație vectorială, în care: $d\bar{s}\,[dx, dy, dz] = d\bar{r}$, $\bar{r}(x, y, z)$ fiind raza vectoare a punctului (x, y, z), este:

$$\bar{v}\,d\bar{r} - \bar{v}_0 d\bar{r}_0 = -d\chi. \qquad (5)$$

De câte ori va fi nevoie, spre a evita unele confuzii, vom nota cu δ *diferențialele substanțiale*, adică acele corespunzătoare creșterii $d\bar{r}_0[dx_0, dy_0, dz_0]$ (cuprinzând anumite molecule) a variabilei lui *Lagrange* $\bar{r}_0$, fără variația timpului.

Astfel, pentru a desemna un element de *linie fluidă* (compus în orice moment t din aceleași molecule ca elementul $d\bar{r}_0$ în $t_0=0$) vom utiliza notația $\delta\bar{r}$, de câte ori va fi nevoie a-l deosebi net de $d\bar{r}$ *drum parcurs*.

Tot astfel pentru funcția auxiliară

$$\chi = \int_0^t \left(U + \int \frac{dp}{\rho} - \frac{v^2}{2}\right) dt \equiv \int_0^t gh\,dt \qquad (5.1)$$

cu notația prescurtată

$$gh \equiv U + \int \frac{dp}{\rho} - \frac{v^2}{2} \equiv gH - v^2, \qquad (5.2)$$

prin $\delta\chi$ vom înțelege *diferențiala substanțială* a acestei funcțiuni în momentul t, adică creșterea lui χ aferent moleculei $\bar{r}_0\,[x_0, y_0, z_0]$, atunci când dela aceasta trecem la molecula $\bar{r}_0 + d\bar{r}_0$ sub t constant, adică, în spațiu, dela $\bar{r}$ la $\bar{r} + \delta\bar{r}$ (puncte ocupate în momentul t respectiv de menționatele molecule).

Pentru variabila independentă $\bar{r}_0$ se poate scrie indiferent $d\bar{r}_0$ sau $\delta\bar{r}_0$.

Vom scrie deci (5), în cazurile când altfel s'ar putea face confuzia la care facem aluzie:

$$\bar{v}\,\delta\bar{r} - \bar{v}_0\,\delta\bar{r}_0 = -\delta\chi. \qquad (5.3)$$

Introducerea noțiunii de *linie fluidă* și *punct fluid* sau *moleculă*, la care se referă, în orice moment t, funcțiunile $r, U, \rho, p, \bar{v}, \chi$, implicând constanța în timp a parametrului $\bar{r}_0\,[x_0, y_0, z_0)$, adică identitatea moleculei (pentru care motiv am putea numi aceste funcțiuni *substanțiale*, adică referitoare la *substanță*, iar nu la punctul din spațiul absolut (x, y, z)), echivalează cu înlocuirea implicită în formule a variabilelor lui *Euler* prin acelea ale lui *Lagrange* (Vol. I pag. 52), la care dealtfel s'a recurs formal și pentru transformarea lui *Weber* (Vol. I pag. 53).

Forma (5) sau (5,3) a ecuației mecanice scalare (cu dimensii de lucru mecanic pe unitatea de masă, fără a fi însă vorba de lucru mecanic) se poate obține mai simplu din ecuația vectorială (1.2) a lui *Euler*, scrisă pentru un câmp de forță exterior ce derivă dintr'un potențial U:

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = -\,grad\,(U + \int \frac{dp}{\rho}), \qquad (6)$$

prin aceleași operațiuni ca și transformarea lui *Weber* (integrare prin părți), întrebuințată și atunci pentru aflarea acesteia.

Simplificarea adusă aci o datorim numai limbajului vectorial și introducerii noțiunilor de *punct*, de *linie fluide* și de *funcțiuni substanțiele*: $\bar{r}, U, \rho, p, \bar{v}, \chi$, care sunt funcțiuni explicite sau implicite de x_0, y_0, z_0 și t, fără a mai fi nevoie a se vorbi de variabilele lui *Lagrange*, cari sunt subînțelese.

Intradevăr, funcțiunea substanțială χ din momentul t (a se vedea (5.1) pag. 304) este de fapt o integrală *definită* de timp între 0 și t, aferentă moleculei, care în acest interval s'a deplasat din poziția $\bar{r}_0$ (ocupată în $t_0=0$) în poziția $\bar{r}$ (ocupată în t), iar molecula $\bar{r}_0+d\bar{r}_0$ s'a deplasat în poziția $\bar{r}+\delta\bar{r}$, în care timp deci și ansamblul de molecule $d\bar{r}_0\equiv\delta\bar{r}_0$ s'a transportat și s'a transformat în $\delta\bar{r}$.

Este clar acum că $\frac{\delta\bar{r}}{dt}$ nu reprezintă o vitesă, fiindcă $\delta\bar{r}$ nu este în general un drum parcurs (în direcția vitesei). Chiar dacă luăm în mod expres pe $\delta\bar{r}$ în direcția vitesei, $\delta\bar{r}_0\equiv d\bar{r}_0$ reprezentând atunci și drumul parcurs în dt, astfel ca:

$$\frac{d\bar{r}_0}{dt}=\bar{v}_0,$$

$\delta\bar{r}$ nu va fi în general în direcția vitesei $\bar{v}$ și nici parcurs în același interval dt ca și $\delta\bar{r}_0$, decât dacă mișcarea este permanentă, după cum se va preciza mai departe.

Să înmulțim, așa dar, scalar la un moment oarecare t ecuația (6) cu un element fluid $\delta\bar{r}$, în general diferit de drumul parcurs. Obținem

$$\frac{d\bar{v}}{\partial t}\delta\bar{r}=-\delta\left(U+\int\frac{dp}{\rho}\right) \qquad (6.1)$$

și deci

$$\int_0^t\frac{d\bar{v}}{dt}\delta\bar{r}\,dt=-\delta\int_0^t\left(U+\int\frac{dp}{\rho}\right)dt,$$

iar integrând primul membru prin părți în raport cu t, ca și la transformarea lui *Weber*, și trecând din acest membru integrala rămasă în membrul al doilea, găsim

$$\bar{v}\,\delta\bar{r}-v_0\delta\bar{r}_0=\int_0^t\bar{v}\frac{d(\delta\bar{r})}{dt}dt-\delta\int_0^t\left(U+\int\frac{dp}{\rho}\right)dt.$$

Ori, integrala în chestiune se poate scrie și:

$$\int_0^t\bar{v}\,\delta\left(\frac{d\bar{r}}{dt}\right)dt\equiv\int_0^t\bar{v}\,\delta\bar{v}\,dt\equiv\delta\int_0^t\frac{v^2}{2}dt,$$

astfel că, în definitiv:

$$\bar{v}\,\delta\bar{r} - \bar{v}_0\delta\bar{r}_0 \equiv -\delta\int_0^t \left\{U + \int\frac{dp}{\rho} - \frac{v^2}{2}\right\} dt = -\delta\chi, \quad (6.2)$$

calculul de mai sus fiind reproducerea fidelă a transformării lui *Weber* în limbajul vectorial. Ecuaţia (6.1) nu este neapărat o ecuaţie de energie, fiindcă $\delta\bar{r}$ nu este în general un drum parcurs de moleculă (punctul de aplicaţie al forţelor). Numai în cazul când $\delta\bar{r}_0$ şi $\delta\bar{r}$ sunt luate în chiar direcţia vitesei, în care caz le vom nota $d\bar{r}_0$ şi $d\bar{r}$, ecuaţia (6.2) poate primi uneori (mişcare permanentă) interpretarea unei ecuaţii de energie.

2. Cazul existenţei unei funcţiuni de vitesă (mişcări potenţiale), integrarea ecuaţiilor lui Euler devenind posibilă.

Vom trata această chestiune importantă şi direct, pentru a ajunge la ecuaţia scalară (2), stabilită mai sus pe cale indirectă.

La o mişcare potenţială existând o funcţie de vitesă Φ (sau un potenţial de vitesă $\varphi = -\Phi$), vom avea prin definiţie

$$\bar{v} = grad\,\Phi. \quad (7)$$

Ecuaţiile diferenţiale ale liniilor de curent devenind

$$\frac{dx}{\frac{\partial\Phi}{\partial x}} = \frac{dy}{\frac{\partial\Phi}{\partial y}} = \frac{dz}{\frac{\partial\Phi}{\partial z}},$$

arată că liniile de curent şi suprafeţele echipotenţiale $\Phi = const$ sunt ortogonale, întrucât derivatele dela numitor sunt parametrii directori ai normalei în punctul (x, y, z) al suprafeţei respective.

Dacă din acest punct ducem un element de linie $d\bar{s} \equiv d\bar{r}$ într'o direcţie oarecare $\bar{s}$, proecţia v_s a vitesei sau a gradientului de Φ după această direcţie:

$$\bar{v}\frac{d\bar{s}}{ds} \equiv grad\,\Phi\,\frac{d\bar{s}}{ds}$$

are drept expresie analitică

$$v_s \equiv \frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{dz}{ds} \equiv \frac{\partial\Phi}{\partial s}\ ^*).$$

---

*) De câte ori direcţia $\bar{s}$ este definită, putem scrie şi $\frac{d\Phi}{ds}$, de ex. (în cazul normalei $\bar{n}$) $\frac{d\Phi}{dn}$, dacă constanţa cu timpul $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0\right)$ este subînţeleasă.

BCU IAŞI CENTRALĂ UNIVERSITARĂ LIBRARY

Cu alte cuvinte proecția în chestiune este derivata lui Φ în menționata direcție (analog cu „panta", dacă, în două dimensiuni, Φ ar reprezenta o cotă de nivel și $\Phi = const$ o curbă de nivel). Această valoare (compară: pantă) este evident maximă în direcția *gradientului*, ceea ce și justifică denumirea acestui vector.

In fine, diferențiala de linie este:

$$\bar{v}\,\bar{ds} \equiv \bar{v}\,\bar{dr} = \bar{dr}\,grad\,\Phi \equiv \frac{\partial\Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\Phi}{\partial z}dz \equiv d\Phi \quad (8)$$

sau, pentru a se evita uneori confuzia, în cazul diferențialelor substanțiale:

$$\bar{v}\,\delta\bar{s} = \delta\Phi. \quad (8.1)$$

Dacă ne închipuim o serie de suprafețe echipotențiale cu valori $\Phi = const$, prezentând același salt $d\Phi$, iar într'un punct oarecare al uneia luăm $\bar{ds} = \bar{dn}$ pe normala ei până la suprafața vecină, vedem că vitesa în acel punct va fi invers proporțională cu distanța dn dintre cele două suprafețe echipotențiale vecine. Mai rezultă că, dacă o suprafață se taie cu ea însăși, vitesa la orice punct al intersecției, neputând avea două direcții diferite (după cele două normale), trebue să fie nulă. Din contra la întretăierea a două suprafețe echipotențiale distincte, dn dintre ele într'un punct al intersecției fiind nul, vitesa pe această linie va fi infinită.

Pentru a integra acum direct ecuațiile lui *Euler* în cazul existenței unei funcțiuni de vitesă (mișcare potențială), folosim cele trei relațiuni, care caracterizează o asemenea mișcare:

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial z},$$

spre a scrie ecuațiile lui *Euler* (1), trecând totul în membrul întâiu:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial\Phi}{\partial t} + U + \int\frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2}\right\} = 0$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\,\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_y\frac{\partial v_y}{dy}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial u}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\equiv\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial\Phi}{\partial t}+U+\int\frac{dp}{\rho}+\frac{v^2}{2}\right\}=0$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\,\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial z}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial z}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}+\frac{\partial U}{\partial z}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\equiv\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\partial\Phi}{\partial t}+U+\int\frac{dp}{\rho}+\frac{v^2}{2}\right\}=0.$$

Inmulţindu-le pe acestea respectiv cu dx, dy, dz, iar după adunarea lor integrând în raport cu spaţiul (sub t constant), obţinem:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}+U+\int\frac{dp}{\rho}+\frac{v^2}{2}\equiv\frac{\partial\Phi}{\partial t}+gH=f(t), \qquad (9)$$

adică ecuaţia (2) menţionată. De altfel ne puteam mărgini a constata că cele trei ecuaţii, scrise în forma de mai sus, arată: $grad\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}+gH\right)=0$, care se integrează imediat în (9).

In cazul $\rho=const$ avem $gH\equiv U+\frac{p}{\rho}+\frac{v^2}{2}$.

Totodată, am văzut (pag. 107), că pentru fluidele cu $\rho=const$ funcţiunea Φ satisface ecuaţia lui *Laplace*:

$$\Delta\Phi=0. \qquad (10)$$

După cum din ecuaţia vectorială (6) a lui *Euler*, aplicabilă în cazul general al fluidelor perfecte, am trecut la ecuaţia scalară (6.2) sau (5.3), obţinută de *Weber* din sistemul echivalent al ecuaţiilor lui *Lagrange*, tot astfel şi chiar mai uşor, în cazul mişcărilor potenţiale putem efectua acum o trecere dela ecuaţia scalară integrală a lui *Euler*, la ecuaţia (6.2) aplicabilă mişcărilor potenţiale, servindu-ne de notaţia (5.2): $gH\equiv gh+v^2$.

Intradevăr din (9), scrisă

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}+v^2+gh\equiv\frac{\partial\Phi}{\partial t}+v\,grad\,\Phi+gh\equiv\frac{d\Phi}{dt}+gh=f(t),$$

integrând în raport cu timpul dela $t_0=0$ la t, obţinem:

$$\Phi-\Phi_0=-\int_0^t gh\,dt+\int_0^t f(t)dt=-\chi+\int_0^t f(t)dt$$

şi diferenţiind apoi în raport cu spaţiul fluid $d\bar{r}_0\equiv\delta\bar{r}_0$ sau $\delta\bar{r}$ sub t constant), obţinem întradevăr:

$$\delta\Phi-\delta\Phi_0=-\delta\chi,$$

care nu este altceva decât (6.2) sau (5.3), aplicat la mișcările potențiale.

Ecuațiile (9) și (10) sunt folosite în teoria undelor, care se propagă în sânul unei mase lichide.

Funcțiunea arbitrară $f(t)$ din (9) sau (2), introdusă prin integrare, reprezintă, pentru orice moment t, o constantă absolută, arătând că expresia

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + gH \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial t} + U + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2} \quad \textit{la gaze}$$

sau

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + gH \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial t} + U + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \quad \textit{la fluidele cu } \rho \textit{ constant}$$

are în orice moment t aceiași valoare în toate punctele fluidului.

Dacă, după cum se întâmplă des, condițiile la limită sunt pur cinematice, rezolvarea problemei pentru un fluid cu ρ constant constă, în a găsi o funcțiune Φ, care să satisfacă ecuația (10) precum și condițiile la suprafață.

Presiunea este dată apoi de (9) cu aproximația unei funcțiuni arbitrare $f(t)$, care este complet determinată atunci când, în cel puțin un punct al fluidului, p este cunoscut în orice moment.

Prezența funcțiunii arbitrare $f(t)$ arată că, în cazul lichidelor, presiunile pot crește sau descrește simultan cu aceiași cantitate arbitrară, eventual variabilă cu timpul, însă *simultan* în toate punctele, fără a se influența fenomenul cinematic. Astfel, de ex., dacă un corp sau mai multe se mișcă într'un lichid ermetic închis, iar presiunea ar crește simultan cu aceiași cantitate în tot spațiul (cum s'ar întâmpla bunăoară cu mare aproximație printr'un piston, acționând într'un anumit punct al frontierei), mișcarea nu ar fi deloc influențată.

In realitate, dacă modificăm presiunea într'un punct al lichidului, transmiterea acestei modificări în toată masa, după legea lui *Pascal*, nu se face instantaneu, ci cu o vitesă (a sunetului) foarte mare dar finită, care, precum vom vedea, depinde de modulul de elasticitate și de densitatea fluidului.

3). Teorema lui Lagrange.

Formula scalară (5.3) sau (6.2), care a fost stabilită în ipoteza că fluidul este *perfect*, pune în evidență, deocamdată pentru ase-

menea fluide, o proprietate importantă a mişcărilor potenţiale sau nerotaţionale, cunoscută sub numele de teorema lui *Lagrange*, care, precum vom demonstra mai târziu, se extinde şi la fluidele viscoase incompresibile.

Să presupunem că, la un moment dat $t_0=0$, luat ca origină (arbitrară) a timpului, o masă fluidă, lipsită de discontinuităţi de vitesă, posedă o funcţie (sau potenţial) de vitesă *continuă* Φ_0. Să mai presupunem că ea este supusă exclusiv acţiunii unor forţe exterioare *conservative* (derivând dintr'un potenţial *uniform* U) şi că densitatea fluidului $\rho(x,y,z)$ este o *funcţie exclusivă* a funcţiei $p(x,y,z)$. Teorema lui *Lagrange* enunţă că, în asemenea condiţiuni, caracterul de nerotaţionalitate, deci şi existenţa unei funcţiuni de vitesă, este *permanentă*, extinzându-se atât în trecut (t negativ) cât şi în viitor (t pozitiv).

Vom avea, cu alte cuvinte, o funcţiune Φ variabilă cu timpul, deci $\Phi(x,y,z,t)$, care în momentul iniţial $t_0=0$, deci $\Phi(x_0,y_0,z_0,0)$, este funcţia menţionată Φ_0.

Intradevăr, în momentul $t_0=0$ vom avea după (8) sau (8,1), introducând şi aci notaţia δ:

$$\bar{v}_0\,\delta\bar{r}=\delta\Phi_0.$$

Ecuaţia (5.3) sau (6.2) (în care se consideră şi un alt moment oarecare t), devine atunci:

$$\bar{v}\,\delta\bar{r}=-\delta\chi+\delta\Phi_0\equiv\delta(\Phi_0-\chi)\equiv\delta\Phi, \qquad (11)$$

punând $\Phi_0-\chi\equiv\Phi$, ceea ce denotă că $\bar{v}\,\delta\bar{r}$ este integrabil în o funcţie $\Phi(x,y,z,)\equiv\Phi(x_0,y_0,z_0,0)-\chi(x,y,z,t)$, în care χ este exprimat în variabilele lui *Euler*, fiind nul pentru $t=0$.

Dela această formă diferenţială scalară concentrată a ecuaţiei mecanice, a unei mişcări potenţiale, putem trece înapoi la ecuaţia integrală a lui *Euler* pentru acest gen de mişcare, adică la (2) sau (9).

Intradevăr, integrând (11) pe o linie fluidă între două puncte fluide A şi B (molecula A şi molecula B), obţinem

$$-[\chi]_B^A+[\Phi_0]_B^A=[\Phi]_B^A$$

sau

$$-\int_0^t[gh]_A^B\,dt+\Phi_{0B}-\Phi_{0A}=\Phi_B-\Phi_A, \qquad (11.1)$$

relație, care, derivând-o substanțial (asupra aceloraşi molecule) în raport cu timpul, ne dă:

$$-[gh]_A^B = \frac{d[\Phi]_A^B}{\partial t} \equiv [\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \bar{v}\, grad \Phi]_A^B \equiv [\frac{\partial \Phi}{\partial t} + v^2]_A^B, \quad (11.2)$$

ceeace revine a scrie pentru linia fluidă arbitrară AB:

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + gH\right]_A^B = 0.$$

Aceasta arată că, la orice moment t, expresia $\frac{\partial \Phi}{\partial t} + gH$ în orice punct fluid sau moleculă, deci în toată masa, are aceiaşi valoare, care poate însă varia dela un moment la altul, fiind prin urmare funcție de timp:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + gH = f(t). \quad (11.3)$$

Aceasta este tocmai ecuația (2) sau (9), în care dela caz la caz putem atribui lui Φ o formă de funcție precisă, fără funție arbitrară de timp, întrucât aceasta este explicitată în membrul al doilea. Chiar atunci când am admite, după cum am mai atras atenția, că Φ conține implicit o funcție arbitrară de timp, este bine a pune în membrul al doilea cel puțin o constantă absolută, pentru ca, în cazul mişcărei permanente, să nu fim tentați a suprima complet pe $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$, uitând că el ar conține în funcțiunea arbitrară de timp şi o constantă aditivă arbitrară, care rămâne şi se determină ulterior din condițiile inițiale.

Evident că, la un moment oarecare t, Φ şi H se referă la aceeaşi moleculă (x_0, y_0, z_0) din $t_0 = 0$ sau (x, y, z) din t.

Formula (11.1) arată că, dacă Φ_0 este funcție *uniformă* (adică avem, atunci când, integrând pe un contur închis, B vine în coincidență cu A: $\Phi_{0B} \equiv \Phi_{0A}$), Φ va şi fi el uniform (adică vom avea şi $\Phi_B \equiv \Phi_A$), cu condiția numai ca U, conținut în h, să fie uniform, căci celelalte două mărimi $\int \frac{dp}{\rho}$ şi $\frac{v^2}{\rho}$, conținute în h, sunt mărimi fizice forțat uniforme. Aşa dar, în cazul unei funcțiuni Φ continue, numai eventuala neuniformitate a lui U poate să facă pe Φ multiform (cazul rotațiilor electromagnetice).

Pentru fluidele viscoase vom demonstra la *Cap. VII* că, în cazul unei mişcări la un moment dat *potențiale* şi deci *nerotaționale*, ecuațiile mecanice stabilite pentru acel moment $t_0 = 0$

în ipoteza că fluidul este perfect, de ex. sub forma ecuației mecanice vectoriale a lui *Euler*, se aplică întocmai și fluidului viscos, *dacă acesta este incompresibil* (ρ const).

Aceasta se explică prin faptul că în acest caz ($div\,\bar{v}=0$ și $rot\,\bar{v}=0$) eforturile de viscozitate, de care trebue ținut seamă în completarea ecuațiilor mecanice ale lui *Euler*, precum vom vedea, se echilibrează reciproc asupra oricărei particule și, în consecință, ele nu apar în aceste ecuații (apărând însă în ecuația energiei la expresia lucrului mecanic intern al viscozității.

Așa dar, ecuațiile mecanice ale fluidului perfect, din care s'a dedus teorema lui *Lagrange*, nefiind întru nimic modificate prin prezența viscozității în cazul considerat, orise consecință ce s'ar putea deduce din acele ecuații, în speță teorema lui *Lagrange*, va fi aplicabilă cazului, adică fluidelor viscoase incompresibile, a căror mișcare la un moment dat t_0 se constată a fi potențială.

Dacă însă fluidul viscos considerat este cu ρ variabil, ecuația vectorială a lui *Euler* (care reprezintă la un loc pe cele trei ecuații după x, y, z) primește un termen adaos, care nu se poate integra spațial (ca $\int \frac{dp}{\rho}$ bunăoară când $\rho=f(p)$).

Urmând deci în acest caz raționamentul făcut pentru fluidele perfecte și extins la cele viscuase incompresibile, nu putem deduce la fel valabilitatea teoremei lui *Lagrange* și pentru acest caz.

Așa dar, în ipoteza că nu avem discontinuități (cari implică rotaționalitate), că forțele exterioare sunt conservative (cu U uniform), în fine că $\rho=f(p)$ în absența viscozității, raționamentul, prin care de la ecuația (9) s'a ajuns la (6.2) și apoi la (11), se mai poate aplica numai în cazul fluidelor viscoase cu ρ constant, pentru a constata că și aci teorema lui *Lagrange* este exactă.

Conchidem că, în cele două cazuri considerate, acela al unei mase de fluid perfect sau acela al unei mase viscoase incompresibile, animată la un moment dat t_0 de o mișcare nerotațională, numai apariția unor discontinuități în viteză (de ex. punerea în coincidență a două suprafețe limitative cu vitese diferite, anterior despărțite), sau forțe de câmp neconservative sau acționând la suprafață (de ex. frecările exercitate pe o frontieră solidă) ar putea introduce în acea masă rotaționalitate, care ulterior se poate răspândi în interiorul masei potențiale, considerată în momentul t_0, fără însă a-i putea schimba, în părțile *conexe* în acel moment, caracterul de nerotaționalitate.

Cum proprietatea analitică a existenței unei funcțiuni Φ aparține, precum am văzut, substanței, un spațiu ocupat de o masă fluidă potențială poate fi ulterior ocupat de o altă masă rotațională, care poate să fi fost și ea anterior potențială, dar a pierdut acest caracter printr'una din causele menționate (producerea de discontinuități, intervenirea unor forțe neconservative, amestecarea cu straturi de fluid anterior în contact cu o suprafață de perete sau variața lui ρ în prezența viscozității).

Dacă mișcarea unui fluid cu ρ const pornește din repaus sub acțiunea exclusivă a unor forțe conservative (de ex. a gravității), mișcarea, în masa care nu vine în contact cu pereții, este potențială. Intradevăr, în cazul repausului orice constantă poate fi luată drept funcție de vitesă Φ_0, vitesele fiind nule. Masa în chestiune nu va putea deci niciodată deveni rotațională, însă se va putea amesteca ulterior cu stratul rotațional provenit de lângă pereți.

Printre condițiile impuse pentru ca starea de nerotaționalitate să fie menținută, s'a mai relevat o restricție și cu privire la ρ, anume ca densitatea să fie ori constantă ori funcție exclusivă de p și să nu fie viscozitate. Această condiție din urmă nu este îndeplinită de ex.: în cazul lipsei de continuitate a lui ρ în fluid, apoi în cazul curenților de convecțiune, care s'ar naște prin încălzirea neuniformă a fluidului, în cazul iarăși al micărilor ondulatoare ale unui fluid *neomogen* incompresibil, care la origină (în repaus) a fost stratificat în straturi orizontale de egală densitate (cum impune starea de echilibru), etc.

Repetăm că prezența unor suprafețe de discontinuitate a vitesei echivalează (vezi mai târziu) cu existența de rotaționalitate, o suprafață de discontinuitate în vitesă putându-se asimila cu un strat rotațional subțire, care la limită se subțiază la zero.

4. Interpretarea mecanică a potențialului de vitesă.

a) **In spații simplu convexe.** Comparând, în cazul fluidelor incompresibile, formulele de definiție ale potențialului de vitesă $\varphi(x,y,z) = -\Phi(x,y,z)$ cu ecuațiile (12) stabilite în *Vol. I, pag 52* pentru producerea instantanee de mișcare prin *impulsiuni de presiune* $\int_0^\tau pdt = p'$ (față de care forțele exterioare și presiunile obicinuite se pot neglija), aplicate de ex. pe frontieră și transmise (datorită incompresibilității) aproape instantaneu în întreaga masă, ecuațiuni care sunt:

$$v_x - v_{x_0} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x}$$

$$v_y - v_{y_0} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial y} \qquad (12)$$

$$v_z - v_{z_0} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial z}$$

și presupunând $v_{x_0}=v_{y_0}=v_{z_0}=0$, ajungem la următoarea interpretare fizică a lui φ: orice stare de mișcare reală a unui fluid incompresibil, *posedând un potențial de viteză uniform*, poate lua naștere din repaus sau intra în repaus prin aplicarea unui sistem potrivit de presiuni de impulsiune p', dat de ecuațiile (12).

Intradevăr, existența funcțiunii p' în cazul $\rho=const$ rezultă din (12), făcând $v_{x_0}=v_{y_0}=v_{z_0}=0$ și înlocuind v_x, v_y, v_z în funcție de φ, ceeace ne dă

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial z}$$

sau vectorial:

$$grad\,\varphi = \frac{1}{\rho}\,grad\,p'$$

adică

$$\rho d\varphi = dp'$$

sau:

$$\rho\varphi + const = p'. \qquad (13)$$

Sistemul de impulsiuni de presiune cu sensul schimbat

$$p' = -\rho\varphi + const \qquad (13.1)$$

poate, invers, reduce brusc la repaus mișcarea potențială existentă.

Prezența constantei arbitrare arată, ceea ce s'a semnalat și mai înainte, că o presiune uniformă, aplicată în *întreaga masă fluidă*, nu are nici o influență asupra mișcării.

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

O mișcare potențială mai poate lua naștere sau intra în repaus tot așa de bine prin acționarea exclusivă a unui câmp de forță exterioară de impulsiune $F'=\int_0^\tau F dt$, atât în cazul fluidelor incompresibile, cât și în acela al fluidelor elastice. In acest caz intră în considerație ecuațiile (1) de la pag. 51 Vol. I, în care păstrăm numai forțele exterioare de impulsiune, făcând și aci $v_{x_0}=v_{y_0}=v_{z_0}=0$:

$$v_x = F'_x$$

$$v_y = F'_y$$

$$v_z = F'_z,$$

deci

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial x}=F'_x$$

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial y}=F'_y,$$

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial z}=F'_y.$$

Așa dar, φ poate fi oricând interpretat ca potențialul unor forțe masice de impulsiune, prin care poate lua instantaneu naștere din repaus mișcarea considerată, sau, schimbându-li-se sensul, prin care acea mișcare se poate reduce la repaus.

O stare de mișcare, pentru care nu există un potențial de vitesă, nu poate lua naștere și nici fi oprită prin acțiunea unor impulsiuni de presiune sau a unui câmp de forță masică de impulsiune, derivând dintr'un potențial (sau prin ambele aceste mijloace).

Dacă Φ și Φ_1 sunt funcțiunile de vitesă a două mișcări nerotaționale diferite ale aceluiași fuid incompresibil, avem (p. 120)

$$\oint \Phi \frac{\partial\Phi_1}{\partial n} d\sigma = \oint \Phi_1 \frac{\partial\Phi}{\partial n} \partial\sigma$$

precum și interpretarea dată în nota p. 121 (ambii membri înmulțiți cu $\frac{\rho}{2}$ exprimă energiile cinetice din mișcările respective).

b) **In spații multiplu conexe ale unui fluid incompresibil.** Dacă $f=\Phi$ și $f_1=\Phi_1$ sunt funcțiunile de viteză a două mișcări diferite ale unui fluid incompresibil ($\Delta\Phi=0$, $\Delta\Phi_1=0$), aplicând formulele (17) și (18) din *Cap. III*, rezultă:

$$\oint^{\sigma}\Phi\frac{\partial\Phi_1}{\partial n}\,d\sigma+\Gamma'\int^{\sigma'}\frac{\partial\Phi_1}{\partial n}\,d\sigma'+\Gamma''\int^{\sigma''}\frac{\partial\Phi_1}{\partial n}\,d\sigma''+\ldots$$

$$=\oint^{\sigma}\Phi_1\frac{\partial\Phi}{\partial n}\,d\sigma+\Gamma'_1\int^{\sigma'}\frac{\partial\Phi}{\partial n}\,d\sigma'+\Gamma''\int^{\sigma''}\frac{\partial\Phi}{\partial n}\,d\sigma''+\ldots \qquad (14)$$

unde, luând $\rho=1$, de ex. $\Phi\frac{\partial\Phi_1}{\partial n}\,d\sigma=\varphi\frac{\partial\Phi_1}{\partial(-n)}\,d\sigma$ este puterea impulsiunii $\varphi d\sigma$ (pozitivă înspre interior) și, în mod analog pentru suprafețele σ', σ'', ... ale tăieturilor: $-\Gamma'\frac{\partial\Phi_1}{(\partial-n)}\,d\sigma'\ldots$ etc, unde $\bar{n}$ este normala exterioară pe $d\sigma$, respectiv pe fața $d\sigma'$ de sosire (echivalent cu normala interioară pe fața $d\sigma'$ de plecare), etc.

Lordul *Kelvin* a dat următoarea metodă sau interpretare mecanică, prin care mișcarea nerotațională ciclică a unui lichid incompresibil poate lua naștere într'un domeniu multiplu conex și care conduce la generalizarea teoremei dinamice $\Sigma p'_n q_{1n}=\Sigma p'_{1n}q'_n$ (vezi nota pag. 121) pentru cazul mișcărilor multiplu conexe.

Să presupunem că lichidul se găsește închis într'o membrană complet netedă și flexibilă, care înlocuește frontiera. Deasemenea pentru a transforma domeniul în simplu conex, să ducem cele n tăieturi convenabile σ', $\sigma''\ldots\sigma^{(n)}\ldots$, înlocuite și ele prin membrane (ce se pot privi duble, ca având două fețe în contact cu lichidul) infinit de subțiri și lipsite de inerție. Pe când fluidul se găsește la început în repaus, să presupunem că fiecare element al primei membrane (frontieră) s'ar pune brusc în mișcare prin impulsiuni de presiune $\rho\varphi=-\rho\Phi$ în sensul vitesei intrânde, și anume cu componentele normale $-\frac{\partial\Phi}{\partial n}\equiv\frac{\partial\Phi}{\partial(-n)}$ ale vitesei ($\bar{n}$ către exterior) și că tot odată s'ar exercita impulsiuni de presiune uniform distribuite pe fețele de intrare și de eșire ale membranelor tăieturilor, ale căror diferențe sunt: $-\rho\Gamma'$, $-\rho\Gamma''$, ..., $-\rho\Gamma^{(n)}$.

Mișcarea generală, astfel produsă, a unei mase simplu conexe, ar fi caracterizată prin următoarele proprietăți: Ar fi nerotațională ca provenită din repaus; componenta normală a vitezei ar avea, în fiecare punct al frontierei inițiale, valoarea prescrisă;

valorile impulsiunilor de presiune în două puncte vecine de pe ambele fețe ale unei tăieturi diferind cu valoarea respectivă $-\rho\Gamma$, valorile potențialelor de viteză ar diferi cu valoarea $-\Gamma$; în fine, mișcarea de ambele părți ale unei tăieturi s'ar racorda cu continuitate. Aceasta, este mai întâiu evident pentru componenta normală a vitesei, deoarece, în orice punct al tăieturii, de ambele părți ale acesteia componentele normale vor fi egale, ca fiind ambele egale cu componenta normală a vitesei elementului dublu de membrană respectiv. In ceea ce privește componenta tangențială a vitesei, să considerăm două puncte vecine P și Q pe oricare din tăieturi, numind Φ_P, Φ_Q valorile corerespunzătoare ale lui Φ pe fața de plecare, iar Φ_P^*, Φ_Q^* pe acelea de pe fața de sosire; vom avea

$$\Phi_P^* - \Phi_P = \Phi_Q^* - \Phi_Q$$

de unde:

$$\Phi_Q - \Phi_P = \Phi_Q^* - \Phi_P^*$$

și, dacă în tăietură luăm la limita $PQ = ds$, aceasta ar însemna:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} = \frac{\partial \Phi^*}{\partial s},$$

adică concordanța și a componentelor tangențiale ale vitesei pe cele două fețe ale tăieturii.

Dacă, așa dar, imediat după impulsiune am presupune că membranele la tăieturi au devenit fluide, se obține în acest mod mișcarea nerotațională, care ne interesează.

După această expunere apare înțelesul fizic al ecuației (14), multiplicată cu $\frac{\rho}{2}$, la care s'a făcut mai sus aluzie, exact ca și în cazul domeniului simplu conex.

Valorile $-\rho\Gamma$ sunt componentele impulsiilor de presiune adiționale, iar valorile $\int^{\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial n} d\sigma$ (= debitele prin diferitele secțiuni) dau vitesele generalizate respective. Avem astfel egalitatea energiilor cinetice în două mișcări diferite (nota din pag. 121) în cazul când aceste mișcări ale aceluiași fluid incompresibil sunt potențiale, generalizată aici asupra unui fluid multiplu conex.

Dacă în (17) sau (18), multiplicat cu $\frac{\rho}{2}$, punem $\Phi_1 = \Phi$ și

admitem că Φ este potențialul de viteză al unui fluid incompresibil, iar $\bar{n}$ normala exterioară, avem:

$$\frac{\rho}{2}\int\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right]d\tau=T$$

$$=\frac{2}{\rho}\left[\oint^{\sigma}\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial n}\,d\sigma+\Gamma'\int^{\sigma'}\frac{\partial\Phi}{\partial n}\,d\sigma'+\Gamma''\int^{\sigma''}\frac{\partial\Phi}{\partial n}\,d\sigma''+\ldots\right]. \quad (15)$$

In primul membru apare explicit energia cinetică a fluidului, iar în ultimul membru echivalentul său: lucrul mecanic efectuat, în metoda de producerea mișcării nerotaționale a fluidului multiplu conex, a lordului *Kelvin*.

Primul termen anume din ultimul membru reprezintă, precum s'a mai spus în cazul domeniului simplu conex, lucrul mecanic pe care presiunea de impulsie $-\rho\Phi$ îl execută asupra tuturor părților frontierelor inițiale. Aici intervin însă și termeni cu impulsiile de presiune $-\rho\Gamma'$, $-\rho\Gamma''\ldots$, cari lucrează asupra membranelor din tăieturile respective și cari de fapt sunt rezultantele impulsiilor de presiune de pe fețele duble $d\sigma'$, ... ce apar aci în plus, prin intervenirea tăieturilor ce transformă fluidul multiplu în simplu conex.

Expresia acestor termeni:

$$\frac{1}{2}\int^{\sigma'}\rho\Gamma'\frac{\partial\Phi}{\partial n}\,d\sigma, \text{ etc}$$

este aceia a lucrului mecanic exercitat de aceste presiuni.

Este evident că adaosul acestor noui termeni era necesar, fiindcă, dacă am avea de ex. un tor (masă dublu conexă) și impulsiunile de presiune pe suprafața torului ar fi de ex. nule (tor fix), nu putem conchide că energia cinetică a fluidului ar fi nulă, fiind clar că aceasta ar depinde tocmai de impulsiunea ce s'ar da pe membrana din tăietură. Intradevăr, această impulsiune ar determina evident debitul inițial în metoda de producere a mișcării, expusă mai sus.

Dacă aplicăm (15) la cazul când fluidul se întinde la ∞, fiind acolo în repaus, putem înlocui prima integrală de suprafață prin:

$$\frac{\rho}{2}\oint^{\sigma}(\Phi-c)\frac{\partial\Phi}{\partial n}\,d\sigma, \quad (15.1)$$

integrarea întinzându-se numai asupra frontierei *inferioare* (repetăm raționamentul făcut anterior pentru un domeniu simplu

conex). Dacă fluxul vitesei prin această frontieră interioară este nul (de ex. în cazul particular al unei frontiere rigide, când $\frac{\partial \Phi}{\partial n}=0$) (15.1) se simplifică ca și atunci în:

$$\frac{\rho}{2}\oint^{\sigma}\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial u}\partial\sigma,$$

la care se adaogă celelalte integrale din (15), pentru a da energia cinetica T.

In fine, se poate demonstra, că teorema energiei cinetice minime, stabilită de *Lordul Kelvin*, se extinde și asupra domeniilor multiplu conexe, însă cu enunțul următor, care diferă puțin de cel dat pentru domeniile simplu conexe:

Mișcarea nerotațională a unui fluid incompresibil într'un domeniu multiplu conex posedă o energie cinetică mai mică, decât oricare altă mișcare cu aceleași componente normale ale vitesei pe frontieră și cu aceleași valori pentru fluxul (sau debitul) total prin fiecare din tăieturile (efectuate la canalele) domeniului. Astfel, de ex., dacă frontiera solidă ar fi un tor fix, deci cu $\frac{\partial\Phi}{\partial n}=0$ peste tot, energia cinetică ar depinde desigur de vitesele printr'o secțiune (tăietură), adică de debit.

5. Integrare spațială (sub t constant) a ecuațiilor lui Euler pe o linie de curent.

Inmulțind ecuațiile lui *Euler*

$$\frac{\partial U}{dx}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}=0 \quad \text{etc}$$

respectiv cu dx, dy, dz și adunând, obținem, dacă se ține seamă că pe o linie de curent avem: $\frac{dx}{v_x}=\frac{dy}{v_y}=\frac{dz}{v_z}$, adică $v_y dx=v_x dy$ etc:

$$\left.\begin{aligned} dU+\frac{dp}{\rho}+\frac{\partial\bar{v}}{\partial t}d\bar{r}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}dx+v_x\frac{\partial v_x}{\partial y}dy+v_x\frac{\partial v_x}{\partial z}dz \\ +v_y\frac{\partial v_y}{\partial x}dx+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}dy+v_y\frac{\partial v_y}{\partial z}dz \\ +v_z\frac{\partial v_z}{\partial x}dx+v_z\frac{\partial v_z}{\partial y}dy+v_z dz=0 \end{aligned}\right\}. \quad (16)$$

Diferențialele fiind socotite toate sub t constant, iar ultimii 9 termeni din membrul întâi putându-se concentra în $d\frac{v_x^2}{2}+d\frac{v_y^2}{2}+d\frac{v_z^2}{2}=d\frac{v^2}{2}$, vom avea în cele din urmă (introducând un produs scalar pentru simplificarea scrierei):

$$dU+\frac{dp}{\rho}+\frac{\partial\bar{v}}{\partial t}d\bar{r}+d\frac{v^2}{2}=0.$$

Integrând pe o linie de curent obținem:

$$\int\frac{\partial\bar{v}}{\partial t}d\bar{r}+U+\int\frac{dp}{\rho}+\frac{v^2}{2}\equiv\int\frac{\partial\bar{v}}{\partial t}d\bar{r}+gH=f(t). \qquad (17)$$

Evident că, în cazul mișcărilor potențiale ($\bar{v}=grad\,\Phi$), vom regăsi în (17) forma generală

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}+gH=f(t),$$

care știm însă că se aplică nu numai ca aci pe fie ce linie de curent dar și în întreaga masă. Formula (17) este foarte utilă, aplicându-se nu numai la mișcările potențiale ci și la cele rotaționale, însă în ultimul caz numai pe aceeași linie de curent, funcția $f(t)$ diferind de la o linie de curent la alta.

Se poate ajunge mai repede la formula (17) pe cale pur vectorială. Intradevăr, integrala de linie de curent AB, a ecuației vectoriale a lui *Euler*, este:

$$\int_A^B gradU.d\bar{r}+\int_A^B\frac{grad\,p}{\rho}dr+\int_A^B\frac{\partial\bar{v}}{\partial t}d\bar{r}+\int_A^B(\bar{v}\,grad.\bar{v})d\bar{r}=0, \qquad (18)$$

în care:

$$\int_A^B grad\,U.d\bar{r}\equiv\int_A^B dU\equiv U+const \quad \text{(căci } U \text{ nu variază cu timpul)},$$

$$\int_A^B\frac{grad\,p}{\rho}d\bar{r}\equiv\int_A^B\frac{dp}{\rho}\equiv\int\frac{dp}{\rho}+F(t) \quad \text{(căci } p \text{ și } \rho \text{ pot varia cu timpul)},$$

$$\int_A^B\frac{\partial\bar{v}}{\partial t}d\bar{r}=\left[\frac{v^2}{2}\right]_A^B,$$

iar din

$$d\bar{r}\,(\bar{v}\,grad.\bar{v})\equiv\bar{v}(d\bar{r}\,grad.\bar{v})=\bar{v}\,d\bar{v}\equiv\frac{dv^2}{2} \quad \text{(căci aci } d\bar{r}\parallel\bar{v})$$

rezultă

$$\int_A^B (\bar{v}\,grad.\bar{v})d\bar{r} = \left[\frac{v^2}{2}\right]_A^B \equiv \frac{v^2}{2} + F_1(t)$$ (căci v poate varia cu timpul).

Așa dar (18) este echivalent cu (17).

Transformarea lui $(\bar{v}\,grad.\bar{v})d\bar{r}$ se mai putea obține, scriind

$$(\bar{v}\,grad.\bar{v})d\bar{r} \equiv (\mathrm{x}v_x + \mathrm{y}v_y + \mathrm{z}v_z)\left(\mathrm{x}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \mathrm{y}\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \mathrm{z}\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right).d\bar{r},$$

sau (ceea ce de altfel s'ar fi putut scrie de la început, efectuând prealabil produsul scalar $\bar{v}\,grad \equiv \bar{v}\nabla$ și apoi înmulțind scalar simbolic cu $\bar{v}$):

$$(\bar{v}\,grad.\bar{v})d\bar{r} \equiv \left(v_x\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + v_y\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + v_z\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right)d\bar{r},$$

care, înlocuind $\bar{v} = \mathrm{x}v_x + \mathrm{y}v_y + \mathrm{z}v_z$ și $d\bar{r} = \mathrm{x}dx + \mathrm{y}dy + \mathrm{z}dx$, ne dă cei 9 termeni din urmă din membrul întâi (16).

Vom demonstra mai târziu (teorema lui *Thomson*), că pe orice linie fluidă (substanțială) AB avem, pentru expresia variației integralei de linie a vitesei în unitatea de timp

$$\frac{d}{dt}\int_A^B \bar{v}d\bar{r} \equiv \int_A^B \frac{d(\bar{v}d\bar{r})}{dt},$$

următoarea relație:

$$\int_A^B \frac{d(\bar{v}d\bar{r})}{dt} = -\left[U + \int\frac{dp}{\rho} - \frac{v^2}{2}\right]_A^B \equiv -\left[gh\right]_A^B, \quad (19)$$

care pentru $B \equiv A$ exprimă conservarea circulațiunei (în cazul când aceasta este nulă avem teorema lui *Lagrange*). Or, este ușor de văzut că (17) este un caz particular al acestei relațiuni și anume, cazul când linia AB este chiar linie de curent, adică $d\bar{r} \parallel \bar{v}$.

Intradevăr, din

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v}\,grad.\bar{v}$$

și

$$\int_A^B \frac{d(\bar{v}d\bar{r})}{dt} \equiv \int_A^B \frac{d\bar{v}}{dt}d\bar{r} + \int_A^B \bar{v}\frac{d\bar{r}}{dt}$$

$$\equiv \int_A^B \frac{\partial \bar{v}}{\partial t}d\bar{r} + \int_A^B (\bar{v}\,grad.\bar{v})\,d\bar{r} + \int_A^B \bar{v}\frac{d\bar{r}}{dt}$$

deducem pentru (19) în acest caz particular (al liniei de curent), când ultimii doi termeni se transformă ca mai sus, forma

$$\int_A^B \frac{d(\bar{v}\,d\bar{r})}{dt} = \int_A^B \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} d\bar{r} + \left[\frac{v^2}{2}\right]_A^B + \left[\frac{v^2}{2}\right]_A^B = -\left[gh\right]_A^B,$$

adică

$$\int_A^B \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} d\bar{r} + \left[gH\right]_A^B = 0,$$

echivalent cu (17).

Aplicația Nr. 68. *A se stabili pentru un fluid incompresibil în mișcare potențială, definită de funcția*

$$\Phi = ax + by + cz$$

(vezi aplicația Nr. 27), *ecuația mecanică sub ambele ei forme: scalară și vectorială, în următoarele ipoteze: 1) a, b, c: constante absolute; 2) a, b, c, funcțiuni exclusive de timp.*

Răspuns. Avem în ambele cazuri:

$$v_x = a \qquad v_y = b \qquad v_z = c \qquad \Delta\Phi = 0,$$

deci translație cu $\bar{v}$ *constant* în cazul 1), *funcție de timp* în cazul 2).

1) În primul caz: $\bar{v}$ constant, avem mișcare potențială *permanentă*, la care se aplică teorema lui *Bernoulli* în întreaga masă:

$$\frac{p}{\rho} + gz + \frac{v^2}{2} \equiv \frac{p}{\rho} + gz + \frac{a^2+b^2+c^2}{2} = const$$

sau

$$\frac{p}{\rho} + gz = const,$$

2) În al doilea caz: $\bar{v} = f(t)$, avem mișcare potențială *variată*, la care se aplică ecuația:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gz + \frac{v^2}{2} = F(t), \qquad (20)$$

sau

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gz = F_1(t). \qquad (20.1)$$

în care se va pune:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = x\frac{\partial a}{\partial t} + y\frac{\partial b}{\partial t} + z\frac{\partial c}{\partial t}.$$

BCU IAȘI / CENTRUL UNIVERSITY LIBRARY

Ca verificare, trecând de la ecuația scalară la forma vectorială, trebue să găsim ecuația lui *Euler*: luând gradientul (*derivată vectorială* în raport cu spațiul) lui (20.1) și ținând seamă că

$$grad\Phi \equiv \mathbf{x}\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\mathbf{y}\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\mathbf{z}\frac{\partial\Phi}{\partial z} \quad \text{și că} \quad \frac{\partial\Phi}{\partial x}=v_x=a \text{ etc.}$$

vom avea astfel din (20.1)

$$\mathbf{x}\frac{\partial a}{\partial t}+\mathbf{y}\frac{\partial b}{\partial t}+\mathbf{z}\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{1}{\rho}\,grad\,p-\bar{g}=0. \tag{20.2}$$

și cum la început avem expresia lui $\frac{\partial\bar{v}}{\partial t}=\frac{d\bar{v}}{dt}-\bar{v}\,grad.\bar{v}$, iar aci $\bar{v}\,grad.\bar{v}$ este nul, căci $\bar{v}=f(t)$, (20.2) este de fapt ecuația lui *Euler*:

$$\frac{d\bar{v}}{dt}+\frac{1}{\rho}\,grad\,p-\bar{g}=0, \tag{20.3}$$

pe care am fi putut-o scrie dela început, introducând în ea valoarea lui $\frac{d\bar{v}}{dt}$, specială problemei, pentru a găsi (20,2). Astfel, plecând de la (20 3), care în problema de față devine (20.2), ajungem imediat la (20.1) prin *integrare spațială*.

Aplicația Nr. 69. *A se studia în aceleași condițiuni ca mai sus partea dinamică a aplicației* Nr. 28 *cu* $\Phi=\frac{1}{2}(ax^2+by^2+cz^2)$, *neglijând gravitatea (gaze), în ipoteza* 1): $b=-a$ *și* $c=0$, *adică* $\Phi=\frac{a}{2}(x^2-y^2)$ cu $v_x=ax$, $v_y=-ay$, $v_z=0$ *și în ipoteza* 2): $b=a$ *și* $c=-2a$, *când mișcarea este potențială.*

Răspuns. 1) presupunând pe a constant (mișcare permanentă), vom scrie ecuația lui *Bernoulli*:

$$\frac{p}{\rho}+\frac{v^2}{2}\equiv\frac{p}{\rho}+\frac{a^2}{2}(x^2+y^2)=const$$

și, dacă eliminăm constanta, introducând presiunea p_0 din axa $Oz(x=0,\ y=0)$, unde vitesa este nulă:

$$p_0-p=\rho\frac{a^2}{2}(x^2+y^2)\equiv\rho\frac{a^2}{2}r^2.$$

Mișcarea este plană, având de ex. planul Oxy ca plan director. Curbele isobare (de egală presiune) din plan constau din o familie de cercuri concentrice, presiunea descrescând dela origină în toate direcțiile radiale.

Se verifică astfel, că maximul de p coincide cu minimul de v^2, care este 0 (anume în origină).

2) In cazul $b=a$ și $c=-2a$, când:

$$\Phi=\frac{a}{2}(x^2+y^2-2z^2),$$

cu a deasemenea constant (mișcare permanentă), avem ecuația lui *Bornoulli*:

$$\frac{p}{\rho}+\frac{a^2}{2}(x^2+y^2+4z^2)=const,$$

suprafețele isobare fiind elipsoizi, cu lungimi de axe în proporțiile $1:1:\frac{1}{2}$.

Dacă însă a este funcție exclusivă de timp, vom avea o mișcare variabilă (totuși *semipermanentă*, după cum s'a arătat la aplicația Nr. 28) și vom aplica ecuația

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{p}{\rho}+\frac{v^2}{2}=f(t)$$

de unde:

$$\frac{p}{\rho}=f(t)-\frac{1}{2}\left[\frac{da}{dt}(x^2+y^2-2z^2)+a^2(x^2+y^2+4z^2)\right],$$

unde $f(t)$ se va determina prin presiunea (variabilă cu timpul), cunoscută într'un anumit punct.

Aplicația Nr. 70. *A se studia problema reducerei unei bule de gaz sferice în interiorul apei.*

Răspuns. Fie R_0 raza inițială a bulei și R raza în momentul t. Mișcarea va fi caracterizată prin funcția de vitesă

$$\Phi=-\frac{R^2}{r}\frac{dR}{dt}\equiv-\frac{R^2\dot{R}}{r},$$

deoarece pentru $r=R$ avem

$$v_R\equiv\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)_R=\dot{R}.$$

Dacă aplicăm ecuația mișcărei nepermanente (în absenta gravitațiunei: $U=0$)

$$\frac{p}{\rho}+\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{v^2}{2}=const,$$

avem

$$\frac{p-p_0}{\rho}=\frac{R^2\ddot{R}+2R\dot{R}^2}{r}-\frac{R^4\dot{R}^2}{2r^4},$$

unde p_0 este presiunea la $r=\infty$. Dacă punem $r=R$ și neglijăm presiunea interioară, obținem

$$R\ddot{R}+\frac{3}{2}\dot{R}^2=-\frac{p_0}{\rho}.$$

Integrând o primă dată în raport cu timpul, găsim

$$R^3\dot{R}^2=\frac{2}{3}\frac{p_0}{\rho}(R_0^3-R^3).$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Integrarea acestei ecuațiuni este dificilă, însă timpul t_1 în care se reduce la 0 bula (neglijând, precum am spus, presiunea interioară a bulei) se poate determina.

Dacă punem anume $R = R_0 x^{1/3}$, găsim $\left(dt = -\frac{dR}{\dot{R}}\right)$:

$$t_1 + R_0\sqrt{\frac{\rho}{6p_0}}\int_0^1 x^{1/6}(1-x)^{-1/2}\,dx = R_0\sqrt{\frac{\rho}{6p_0}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} = 0.915\,R_0\sqrt{\frac{\rho}{p_0}},$$

unde Γ sunt funcțiile lui *Euler* de a doua speță

$$\Gamma(a) \equiv \int_0^\infty e^{-x}\,x^{a-1}\,dx,$$

de ex.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \equiv \int_0^\infty e^{-x}\,\frac{dx}{\sqrt{x}} \quad \text{și, cu } x = t^2, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \equiv 2\int_0^\infty e^{-t^2}dt,$$

iar

$$B(a,b) \equiv \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

funcțiunile lui *Euler* de prima speță, aci având $a = \frac{5}{6}$ și $b = \frac{1}{2}$, adică $B\left(\frac{5}{6}, \frac{1}{2}\right)$.

Dacă, așa dar, $\rho = 1$, $R_0 = 1$ *cm* și $p_0 = 10^6$ *c. g. s.* (*1 atmosferă*), se obține

$$t_1 = 0{,}000915 \text{ sec.}$$

Energia cinetică într'un moment oarecare t este (p. 126)

$$T = -\frac{\rho}{2}\oint^\sigma \Phi\,\frac{\partial\Phi}{\partial R}\,d\sigma \qquad (\text{căci } dn = -dR)$$

$$= 2\pi\rho R^3\dot{R}^2 = \frac{4}{3}\pi p_0(R_0^3 - R^3),$$

ceea ce se putea prevede, fiind egală cu lucrul efectuat de presiunea exterioară, asupra suprafeței unei cantități foarte mari de lichid, deci p_0 înmulțit cu volumul generat de aceea suprafață $= \frac{4}{3}\pi R_0^2 - \frac{4}{3}\pi R^2$.

La dispariția golului energia cinetică desvoltată și transformată în alte forme de energie este egală cu $\frac{4}{3}\pi p_0 R_0^3$, astfel că pentru $R_0 = 1$ și $p_0 = 10^6$ avem $4{\cdot}18.\ 10^6\ erg \simeq 0{,}0426\ kgm$.

Aplicația Nr. 71. *In cazul unei surse punctiforme negative* (vezi aplicația Nr. 29) *în absența gravitațiunei, a se studia legea de repartiție a presiunii.*

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Răspuns. Presiunea descrescând prin substracțunea, din o constantă, a unui termen proporțional cu pătratul vitesei, iar aceasta din urmă crescând invers proporțional cu pătratul distanței la sursă, rezultă o descreștere a presiunii prin substracțiunea unui termen invers proporțional cu puterea 4-a a distanței.

Cu alte cuvinte, o apropiere la jumătatea distanței și anume de la r_1 la $r_2=\frac{r_1}{2}$, aduce o sporire cuadruplă a vitesei și deci o substracțiune, din presiunea de la ∞ (unde $v=0$) de 16 ori mai mare decât aceea ce intervine la distanța r_1.

Bineînțeles în apropierea imediată a orificiului, care în realitate nu este punctiform, legea de mai sus nu se aplică riguros.

In cazul mișcării convergente a lichidului spre un mic orificiu (în orice caz finit), practicat într'un perete plan (Fig. 27), vitesele în amonte de orificiu, ceva mai departe de acesta, sunt radiale, presiunea descrescând cu destulă aproximație după legea de mai sus. In modul acesta se verifică, că minimul de presiune se găsește la frontiera domeniului.

Aplicația Nr. 72. *A se calcula vitesa de scurgere sub nivel constant, printr'un ajutaj cilindric orizontal, după deschiderea bruscă a gurei ajutajului.*

Răspuns. Vom neglija frecarea dealungul tubului, de care totuși trebue ținut seamă, dacă lungimea lui este mare.

Mișcarea fiind la început potențială și transitorie, vom aplica ecuația:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{p}{}+gz+\frac{v^2}{2}=f(t)\ .$$

Știm că primul termen a provenit din integrarea (cu $v_x=\frac{\partial\Phi}{\partial x}$ etc):

$$\int\frac{\partial v_x}{\partial t}dx+\frac{\partial v_y}{\partial t}dy+\frac{\partial v_z}{\partial t}dz=\int\frac{\partial\bar{v}}{\partial t}d\bar{r}$$

și dacă urmărim o linie de curent, putem scrie

$$\int\frac{\partial v}{\partial t}ds.$$

Fie Ω_1 secțiunea terminală a ajutajului și Ω secțiunea în orice alt punct al curentului, putând varia de la un punct la altul al firului mijlociu. Ecuația de continuitate dă:

$$v=\frac{\Omega_1}{\Omega}v_1,$$

$\frac{\Omega_1}{\Omega}$ fiind o funcție de s, $F(s)$, astfel că:

$$v=F(s)\,v_1.$$

Vom avea așa dar:

$$\frac{\partial v}{\partial t}=F(s)\frac{dv_1}{dt}$$

și

$$\int \frac{\partial v}{\partial t} ds = \frac{dv_1}{dt} \int F(s)\, ds.$$

Secțiunile Ω se pot trasa, după apreciere, după curbele arătate în fig. 56, normal pe liniile de curent, deci după suprafețele echipotențiale, înaintând pe o distanță oarecare în interiorul vasului, până când $\frac{\Omega_1}{\Omega} = F(s)$ devine neglijabil față de unitate. Curba $F(s)$ va avea aproximativ forma din josul figurei 56, iar prin integrare grafică se obține integrala $\int F(s)\, ds = l$, care, dacă ajutajul este destul de lung, nu diferă mult de lungimea lui: l_1, la care se poate adăoga o mică corecție după indicația construcției grafice menționate.

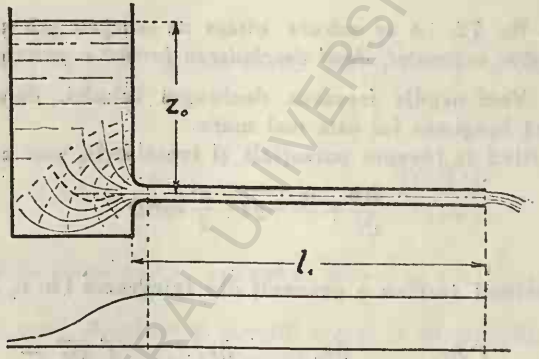


Fig. 56.

Ecuația dela care am plecat devine astfel, scrisă pentru centrul gurei ajutajului:

$$l_1 \frac{dv}{dt} + \frac{p_0}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} = f(t).$$

Pentru punctul de la suprafața liberă din rezervor, unde vitesa și accelerația se pot neglija, avem:

$$\frac{p_0}{\rho} + g z_0 = f(t),$$

astfel că, prin eliminarea lui $f(t)$, obținem

$$l_1 \frac{dv}{dt} + \frac{v_1^2}{2} = g z_0 .$$

Aceasta este ecuația diferențială a lui v_1.

La începutul mișcării, când v_1 este încă mic, derivata $\frac{dv_1}{dt}$ este mare (aproape de $\frac{g z_0}{l_1}$ și, dacă $z_0 = l_1$, aproximativ egală cu g). Cu creșterea lui v_1, $\frac{dv_1}{dt}$ scade

treptat la 0, mișcarea devenind după un timp, teoretic infinit, permanentă, cu $v_{1\infty}=\sqrt{2gz_0}$.

Ecuația diferențială de ordinul întâiu, la care am ajuns, se mai poate scrie și altfel, dacă introducem vitesa $v_{1\infty}$ dela $t=\infty$, care este vitesa $\sqrt{2gz_0}$ a regimului permanent:

$$\frac{dv_1}{dt}=\frac{v_{1\infty}^2-v_1^2}{2l_1}$$

sau

$$\frac{dv_1}{v_{1\infty}^2-v_1^2}=\frac{dt}{2l_1}$$

și de aci:

$$v_1=v_{1\infty}\,tgh\,\frac{v_{1\infty}t}{2l_1}\,.$$

Rezultă că vitesa la gura ajutajului crește ca tangenta hiperbolică, adică la început aproape liniar, puțin înaintea atingerei vitesei finale ceva mai încet și, în urmă, tinde foarte încet (asimptotic) către această vitesă. Durata T a regimului transitor (până la atingerea aproximativ a regimului permanent) se poate evalua practic, dacă admitem o accelerație medie $\frac{v_{1\infty}}{T}$ în locul lui $\frac{dv_1}{dt}$, în care caz găsim

$$T=\frac{2l_1}{v_{1\infty}}\,.$$

Dacă nivelul nu se menține constant, suprafața liberă se scoboară cu vitesa:

$$\Omega_0\frac{dz}{dt}=-\Omega_1 v_1$$

și combinarea acestei ecuațiuni cu ecuația de mai sus conduce la o ecuație diferențială de al doilea ordin.

Aplicația Nr. 73. *A se studia oscilațiile lichidului dintr'un tub în formă de V, de secțiune constantă, unghiurile de înclinare a celor două brațe față de orizontală fiind α și β.*

Răspuns. Fie l lungimea coloanei lichide, măsurată în axă, și s elongația momentană, măsurată în axă și evident egală la ambele capete.

Accelerația va fi peste tot $\frac{d^2s}{dt^2}\equiv\frac{dv}{dt}=\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial s}$ și cum $\frac{\partial v}{\partial s}=0$, vom avea $\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{d^2s}{dt}$.

Unul din capete va prezinta o înălțare de nivel $h_1=s\sin\alpha$, celalt o scoborâre de nivel $h_2=s\sin\beta$, astfel că diferența de nivel va fi $(\sin\alpha+\sin\beta)s$.

Ecuația de mișcare pe un fir de curent (cel mijlociu) va fi, analog ca la aplicația precedentă,

$$\int\frac{d^2s}{dt^2}ds+gz+\frac{p}{\rho}+\frac{v^2}{2}=f(t),$$

sau, aplicând-o la cele două capete și eliminând pe $f(t)$ comun, cu care ocazie se elimină și $\frac{p_0}{\rho}$ și $\frac{v^2}{2}$, cari sunt aceleași la ambele capete:

$$l\frac{d^2s}{dt^2}+g(\sin\alpha+\sin\beta)s=0$$

sau, punând $\frac{g(\sin\alpha+\sin\beta)}{l}\equiv\omega^2$:

$$\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{g(\sin\alpha+\sin\beta)}{l}s\equiv\frac{d^2s}{dt^2}+\omega^2s=0.$$

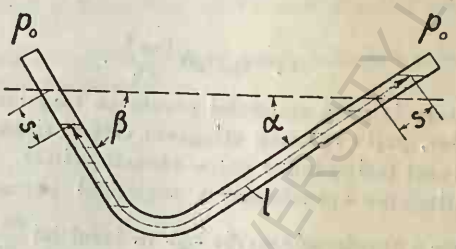


Fig. 57

Aceasta este ecuația unei mișcări pendulare, a cărei soluție este

$$s=A\cos(\omega t+\gamma),\quad \text{cu}\quad \omega=\sqrt{\frac{g(\sin\alpha+\sin\beta)}{l}},$$

durata de oscilație fiind $T=\frac{2\pi}{\omega}$.

Dacă ambele brațe sunt verticale, avem $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}$, adică durata de oscilație a unui pendul simplu de lungimea $\frac{l}{2}$.

Aplicația Nr. 74. *Două vase prizmatice cu secțiuni orizontale Ω_1 și pline cu lichid la înălțimi diferite (fig. 58 arătând poziția inițială), sunt legate între ele prin o conductă de secțiune ω, purtând un robinet R. La deschiderea robinetului lichidul intră în mișcare de oscilație în jurul unei poziții de echilibru. Până la ce înălțime se va ridica nivelul Ω_1 și cu ce viteză va trece prin poziția lui de echilibru, depășind-o? Se vor neglija rezistențele (frecările).*

Răspuns. Poziția de echilibru este atinsă atunci, când suprafețele sunt la aceeași distanță h de fund, iar din această condiție:

$$(h-h_1)\Omega_1=h_2-h)\Omega_2$$

rezultă

$$h=\frac{\Omega_1h_1+\Omega_2h_2}{\Omega_1+\Omega_2}. \qquad a)$$

DUKE CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Să presupunem că, în momentul t, ordonatele celor două suprafețe față de nivelul de echilibru sunt z_1 și z_2 în mărime și semn ($z'_1 = h_1 - h$ și $z'_2 = h_2 - h$ fiind valorile lor inițiale).

Vom avea pentru elongație

$$\Omega_1 z_1 + \Omega_2 z_2 = 0 \qquad b)$$

și dacă: $v_1 = \frac{dz_1}{dt}$, $v_2 = \frac{dz_2}{dt}$ u sunt vitesele verticale și orizontală, respectiv în

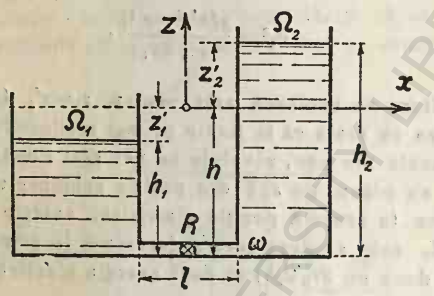


Fig. 58

cele două vase și în conductă, primele două fiind socotite pozitive în sus și negative în jos, iar u pozitiv spre dreapta și negativ spre stânga, vem avea pentru vitese

$$\Omega_2 v_2 = \omega u = -\Omega_1 v_1 . \qquad c)$$

Masele de lichid în cele două vase și în conductă vor fi respectiv:

$$M_1 = \frac{\varpi}{g}\Omega_1 (h - z_1), \quad M_2 = \frac{\varpi}{g}\Omega_2 (h + z_2), \quad m = \frac{\varpi}{g}\omega l$$

și cum creșterea energiei cinetice în dt va fi egală cu lucrul elementar al gravitației:

$$\frac{1}{2} d(M_1 v_1^2 + m u^2 + M_2 v_2^2) = \varpi \Omega_1 dz_1 (z_2 - z_1)$$

sau, înlocuind M_1, m, M_2 și eliminând pe z_2, v_2, u cu ajutorul celor 3 relații b) și c):

$$\frac{1}{2}\frac{\varpi}{g} d\left\{ v_1^2 \left[\Omega_1 (h + z_1) + \omega l \left(\frac{\Omega_1}{\omega}\right)^2 + \Omega_2 \left(h - z_1 \frac{\Omega_1}{\Omega_2} \right) \left(\frac{\Omega_1}{\Omega_2}\right)^2 \right] \right\}$$

$$= -\varpi \Omega_1 z_1 dz_1 \left(1 + \frac{\Omega_1}{\Omega_2} \right),$$

ceea ce, dacă punem:

$$a \equiv h + \frac{l\frac{\Omega_1}{\omega}}{1 + \frac{\Omega_1}{\Omega_2}} \quad \text{și} \quad b \equiv 1 - \frac{\Omega_1}{\Omega_2}$$

devine:

$$\frac{1}{2} d\left[v_1^2 (a + bz_1) \right] = - g z_1 dz_1.$$

Integrând dela origină $z_1 = z'_1$ cu $v_1 = 0$, găsim

$$v_1^2 (a + bz_1) = g(z'^2_1 - z_1^2)$$

sau

$$v_1^2 = \frac{g(z'^2_1 - z_1^2)}{a + bz_1}.$$

Se vede că vitesa se anulează atât pentru $z_1 = z'_1$ (poziția inițială), cât și pentru $z_1 = -z'_1$, ceea ce arată că la finele primei semioscilații, când vitesele, nule la plecare, se vor anula din nou, nivelele se vor găsi simetric așezate față de cele primitive în raport cu planul de apă din poziția echilibrului; aceasta era evident și a priori, deoarece în această poziție simetrică, energia potențială a lichidului, de ex. față de fund, este evident aceiași (crescută la prima coloană cu $-2z'_1 \Omega_1 h$ și descrescută la a doua cu $2z_2' \Omega_2 h$) și deci energia cinetică va fi ca și la origină nulă *).

Dacă secțiunile celor două vase diferă puțin între ele, sau sunt egale, în care caz $b = 0$, sau dacă amplitudinea z_1 este mică, pentru ca bz_1 să poată fi neglijat față de $a > h$, vom avea cu aproximație, respectiv cu exactitate sau iarăși aproximativ:

$$v_1^2 = \frac{g}{a}(z'^2_1 - z_1^2),$$

de unde

$$dt = \sqrt{\frac{a}{g}} \frac{dz_1}{\sqrt{z'^2_1 - z_1^2}}$$

$$t\sqrt{\frac{g}{a}} + C = \arcsin \frac{z_1}{z'_1}$$

și cum la $t = 0$ avem $z_1 = z'_1$, rezultă valoarea constantei $C = \frac{\pi}{2}$. In cele din urmă avem:

$$z_1 = z'_1 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{a}} t\right).$$

Mișcarea este deci pendulară, adică armonică simplă, $\sqrt{\frac{g}{a}}$ fiind pulsația. Durata unei oscilațiuni complete este:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

*) In contazicere cu rezultatul dat în *Wittenbauer*.

Se vede că rezultatul este același ca la aplicația precedentă, în cazul ramurilor verticale cu $a = \frac{l}{2}$.

Aceasta arată că și aplicația precedentă se putea trata pe aceași cale, adoptată aci, a mecanicei generale, fără întrebuințarea ecuației hidrodinamicei.

Aplicația Nr. 75. *Într'un vas prizmatic de lungime a și secțiune dreptunghiulară cu baza 2b (figură) se găsește lichid la înălțimea h. În cazul când lichidul intră în mișcare de oscilație, astfel ca suprafața liberă să se încline în jurul unei axe longitudinale de înclinație cu unghiuri mici φ față de orizont, a se găsi perioada T a oscilațiilor.*

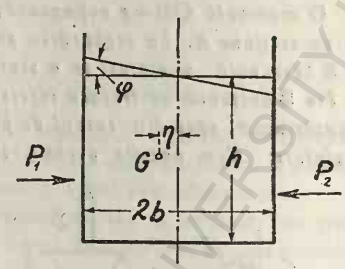


Fig. 59

Răspuns. La unghiul de înclinare φ centrul de greutate G al lichidului se deplasează (în figură, la stânga) cu:

$$\eta = \frac{b^2}{3h} tg\varphi$$

în sens orizontal, în care sens vom studia oscilațiile.

Forțele orizontale, cari lucrează asupra masei lichide, deplasând centrul ei de greutate, sunt presiunile laterale din partea pereților și anume:

$$P_1 = \frac{\varpi}{2} a(h + b\, tg\varphi)^2, \qquad P_2 = \frac{\varpi}{2} a(h - b\, tg\varphi)^2,$$

cari dau o rezultantă:

$$P = 2\varpi abh\, tg\varphi$$

Vom avea deci:

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = -\frac{P}{M},$$

unde M este masa lichidului $= \frac{\varpi}{g} 2abh$.

Ori,

$$-\frac{P}{M} = -g\, tg\varphi = -\frac{3gh}{b^2}\eta \quad \text{și, punând } \frac{3gk}{b^2} = \omega^2,$$

putem scrie:

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = -\omega^2\eta.$$

Soluția acestei ecuații este

$$\eta = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

cu

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi b}{\sqrt{3gh}}.$$

Aplicația Nr. 76. *O manivelă OM=r acționează, cu o viteză unghiulară ω dată, o pompă cu piston de secțiune A. La scoborârea pistonului supapa S' rămâne închisă, pe când supapa S (desenată și alături la o scară mai mare) în momentul t se află ridicată cu x. Fie Ω secțiunea de trecere corespunzătoare supapelor, presupuse identice, p suprapresiunea apei din corpul de pompă față de spațiul din racordul conductei de refulare. Vom admite această suprapresiune constantă, în*

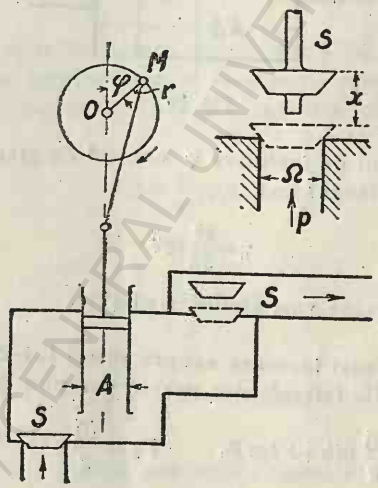


Fig. 60

timpul ridicării supapei S, și egală cu suprapresiunea din racordul conductei de aspirație față de depresiunea creată în corpul de pompă în timpul aspirației, adică când se ridică supapa S, supapa S' rămânând închisă.

A se stabili ecuația mișcării supapelor, găsindu-se apoi unghiul de decalaj φ_0 al acestei mișcări față de aceea a manivelei, precum și viteza w_0 cu care supapele se înapoiază la sediul lor. (M. Westphal. Z.V.D.I. 1893).

Răspuns. In timpul când, supapa S' fiind pe sediul ei, manivela la o învârtire elementară $d\varphi$ scoboară pistonul cu aproximativ

$$ds = r\, d\varphi \sin\varphi,$$

un volum Ads de apă se deplasează sub piston. In același interval supapa S se ridică cu dx, pe de o parte făcând loc unui volum de apă Ωdx, iar pe de altă parte scurgând prin orificiul inelar de arie χx (unde χ este perimetrul supapei) un volum, dat de formula orificiilor. Vom avea deci:

$$Ads = \Omega dx + m\chi x \sqrt{2g\frac{p}{\varpi}}\, dt \qquad (a)$$

sau, punând

$$Ar \equiv a \quad \text{și} \quad \frac{m\chi}{\omega}\sqrt{\frac{2gp}{\varpi}} \equiv b$$

și observând că $\omega \equiv \frac{d\varphi}{dt}$:

$$(a \sin\varphi - bx)\, d\varphi = \Omega dx. \qquad (a')$$

Ecuația (a) se aplică nu numai supapei S în timpul când ea funcționează, S' rămânând pe sediu, dar și supapei S' când S este pe sediu, existând simetrie perfectă în mișcarea lor, însă cu intrare în funcțiune alternativă.

Pentru a nu avea discontinuitate în formule, ne putem închipui că există o singură supapă, care în o primă semiperioadă a manivelei joacă rolul lui S eșind din corpul de pompă, iar în a doua semiperioadă joacă rolul lui S' intrând în corpul de pompă; sediul este astfel înlocuit pentru studiu printr'un orificiu de liberă trecere, suprapresiunea inversându-se în momentul când supapa trece prin acest orificiu, în care moment îl închide complet.

Din punctul de vedere al ecuației (a) avem astfel un fenomen *continuu*, fără schimbări brusce (inversarea suprapresiunei se face în momentul când debitul orificiului este nul) și mișcarea unui aceluiași corp, o supapă (neglijindu-i conicitatea și grosimea). Este evident că, la a doua semiperioadă, x trebue considerat negativ, ecuația (a) verificându-se întocmai.

Acest artificiu nu modifică condițiile de mișcare ale pompei și suprimă numai efectul ei util (aceiași apă eșind și intrând alternativ în corpul de pompă), ceea ce din punct de vedere cinematic n'are importanță.

Soluțiunea ecuațiunei diferențiale (a') este:

$$x = Ce^{-\frac{b}{\Omega}} + \frac{a}{b^2+\Omega^2}(b \sin\varphi - \Omega\cos\varphi).$$

Cum x nu poate fi în regim permanent decât o funcțiune periodică de φ, va trebui să avem după stabilirea regimului $C = 0$.

Deschiderea sau închiderea supapei se va produce la $x = 0$.

Fie φ_0 valoarea lui φ la origina timpului, când vom presupune că φ este în creștere (supapa de refulare se deschide).

Vom avea: $tg\,\varphi_0 = \frac{\Omega}{b}$ și ecuația de mișcare se poate scrie:

$$x = \frac{a}{\sqrt{b^2+\Omega^2}} \sin(\varphi - \varphi_0), \qquad (b)$$

de unde:

$$w=\frac{dx}{dt}=\frac{a\omega}{\sqrt{b^2+\Omega^2}}\cos(\varphi-\varphi_0).$$

Vitesa cu care supapa trece prin orificiu, ceea ce se produce în momentele când $\varphi=\varphi_0+k\pi$, este $w=\pm\frac{a\omega}{\sqrt{b^2+\Omega^2}}$, după cum k este *par* sau *impar*.

Cum în realitate sediul formează un obstacol, avem o mișcare cu lovituri brusce la închiderea supapelor și cu pornire bruscă la deschidere, vitesa de ciocnire sau pornire (neglijând inerția supapei) fiind în valoare absolută;

$$\frac{a\omega}{\sqrt{b^2+\Omega^2}}.$$

Fenomenul se complică în realitate prin intervenția compresibilității lichidului și a inerției supapelor.

Dacă supapele nu sunt egale, să examinăm ce condițiuni trebuesc îndeplinite, pentru ca modul de funcționare a pompei, dat de ecuația de mai sus, să nu se modifice. Se poate arăta că această condiție este, ca decalajul φ_0 să fie același pentru ambele supape (ceea ce implică și o anumită relație între suprapresiunile dela refulare și aspirație).

Mai întâi se vede ușor că aceasta condiție este *necesară*, deoarece numai astfel se asigură alternarea precisă a funcționării celor două supape, ipoteză în care s'a stabilit ecuația (a). Altfel am avea porțiuni de perioadă (ambele supape deschise), când ecuația (a) nu s'ar aplica și modul de funcționare s'ar schimba.

In al doilea rând, condiția este *suficientă*, fiindcă asigură și egalitatea debitelor celor două supape în semiperioadele succesive $\varphi_0 \to (\varphi_0+\pi)\to(\varphi_0+2\pi)\to$ etc, când câte una din supape este în funcțiune.

Intradevăr, egalitatea decalajului se introduce prin:

$$\frac{\Omega'}{b'}=\frac{\Omega}{b}, \qquad (c)$$

ceea ce antrenează, numind k raportul ariilor supapelor (v fiind vitesa de scurgere prin orificiul inelar cilindric):

$$\Omega'=k\Omega$$

$$\chi'=\sqrt{k}\,\chi$$

și după (c)

$$b'=kb,$$

iar din relația de definiție a lui b:

$$\sqrt{p'}=\sqrt{kp}$$

adică $p'=kp$ și

$$v'=\sqrt{k}\,v,$$

în fine pentru amplitudini (cursele supapelor):

$$x'_{max}=\frac{a}{\sqrt{b'^2+\Omega'^2}}=\frac{1}{k}x_{max},$$

același raport existând evident și între elongațiile respective, la aceași valoare a argumentului.

Debitul momentan prin orificiul cilindric al supapei S' (a cărui arie crește dela zero la $\chi' x'_{max}$ și apoi descrește la zero) va fi deci (cu un coeficient numeric n, comun ambelor supape):

$$q' = n \chi' x' v' = q,$$

adică egal, antrenând și egalitatea debitului în timpul unei semiperioade.

Se vede deci că ecuația (*b*) se aplică cu caracteristici diferite, dar cu același φ_0, la ambele supape, în semiperioadele respective de funcționare.

Dacă de ex. $\Omega' = 2\Omega$, curba elongației supapei în funcțiune, compusă din semiunde sinusoidale $x(\varphi)$ și $x'(\varphi)$ succesive, are forma din fig. 61.

Elongațiile lui S' vor fi de 2 ori mai mici, suprapresiunea însă de funcționare la aspirație va trebui să fie dublă.

In ceea ce privește vitesa de ciocnire la închidere: $(w' = \frac{dx'}{dt})$, ea va fi pe jumătate cât aceea dela refulare, după cum se vede și în figură (coeficienții unghiulari ai tangentei).

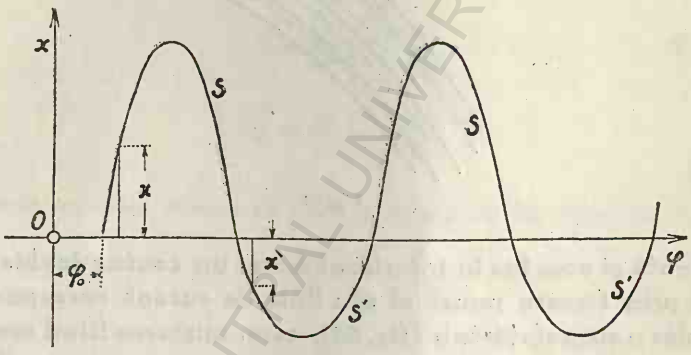


Fig. 61

Pentru a se evita ciocnirile supapelor pe sediul lor, permițând și un mers mai repede la pompele cu piston rapide sau „exprese" (*Riedler*), supapele sunt conduse (cârmuite) de arborele pompei ca la distribuțiunile de aburi. Prin acest procedeu vitesa de închidere se poate anula, semiundele diagramei devenind tangente la axa φ, însă această modificare în mersul supapelor implică și o modificare a condițiunilor de mers ale pompei, p și p' nemaifiind constante ci variabile în timpul unei semiperioade; suprapresiunea anume va crește aproape de închidere, micșorându-se vitesa (și suprimându-se ciocnirea).

6. Studiu general al unui curent sau al unui fir în mișcare semipermanentă.

După cum s'a spus în capitolul cinematicei fluidelor, *mișcarea semipermanentă* este caracterizată prin aceia că, în fiecare punct al spațiului ocupat de fluid, vitesa poate varia numai ca

mărime, păstrând *aceiași direcție*. Liniile de curent rămân, așa dar, invariabile. Moleculele, situate la un moment dat pe o asemenea linie, se mișcă pe ea neputând-o părăsi, căci altfel am avea în același punct la două diferite momente două direcțiuni de vitesă, contrar definiției mișcării semipermanente. De aci reese că, la aceeastă mișcare, liniile de curent coincid cu traectoriile, constatare făcută și anterior.

Mișcarea semipermanentă, în cazul și mai particular, în care vitesa în orice punct rămâne *constantă și ca mărime*, am numit-o *permanentă* sau *staționară*, și despre ea vom vorbi mai pe larg sub titlul corespunzător. Aci vom considera o mișcare de fluid semi-

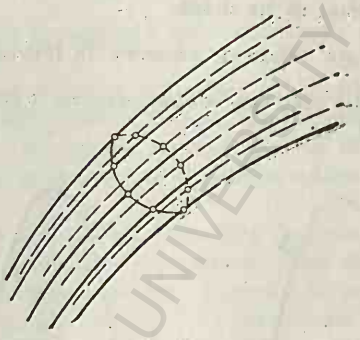


Fig. 62

permanentă și vom lua în interiorul masei un contur închis (fig. 62), trasând prin fiecare punct al său linia de curent corespunzătoare. Va rezulta o suprafață-tub (fig. 62), care, mișcarea fiind semipermanentă, va fi fixă. Această suprafață desparte masa fluidă din interior de cea din afară, astfel că între aceste două mase nu poate interveni nici un amestec.

In suprafața tubulară fixă se va mișca un *curent* sau o *vână fluidă*, invariabilă ca formă, deși vitesa moleculelor poate varia cu timpul.

Dacă secțiunea dreaptă a tubului este foarte mică, vâna ia numele de *fir fluid*.

Traectoria ce trece prin mijlocul firului este axa acestuia. Dacă mișcarea nu este semi-permanentă, liniile de curent vor diferi de traectorii și forma suprafeței-tub, și deci a curentului sau firului fluid, va varia în fiece moment.

Curent rectiliniu și curent curbilniu. Să considerm un curent cu secțiunea dreaptă constantă sau foarte puțin variabilă

dealungul curentului, astfel ca, între două secțiuni apropiate, să avem fire paralele sau aproape paralele.

Mai întâiu să presupunem curentul *rectiliniu* (exact sau cu suficientă aproximație), raportat la un sistem de axe dreptunghiulare (fig. 63), una x' paralelă cu direcția mișcării, în care direcție molecula (x', y, z') ar avea accelerația $j_{x'}$, în celelalte direcțiuni având evident

$$j_{y'}=0,\ j_{z'}=0.$$

(Vom rezerva litera z pentru ordonata verticală, adică altitudinea unui punct în raport cu un plan de referință orizontal inferior).

Pentru molecula de masă 1 considerată vom avea ecuațiile:

$$\begin{aligned} j_{x'} &= F_{x'} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x'} \\ 0 &= F_{y'} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y'} \\ 0 &= F_{z'} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z'}. \end{aligned} \qquad (20)$$

Prima este ecuația mecanică (sau a mișcării) în direcția x. Ea ne

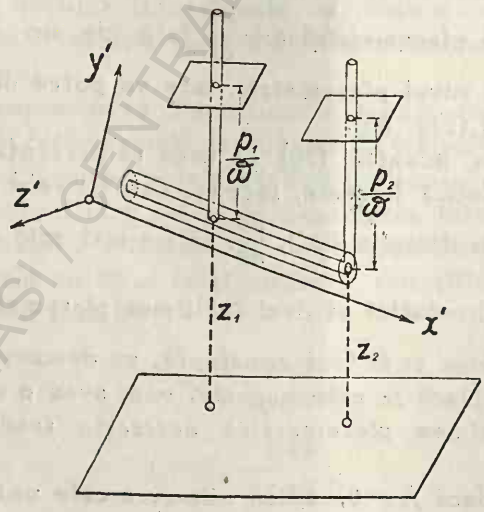


Fig. 63

va da legătura dintre viteză și presiune în câmpul forței exterioare $\overline{F}$.

BCU IAȘI / CENTRALA UNIVERSITARĂ

Celelalte două ecuaţii, fiind identice ca în Hidrostatică, vor da repartiţia presiunii într'o secţie transversală, definită prin abscisa x'.

Intradevăr, înmulţind pe a doua cu dy' şi pe a treia cu dz' şi adunând, obţinem

$$F_{y'}dy'+F_{z'}dz'=\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial y'}dy'+\frac{\partial p}{\partial z'}dz'\right).$$

Considerând pe dy' şi dz' drept componente ale unui element ds, cuprins în secţiunea transversală x' la momentul t, membrul al doilea va fi diferenţiala totală corespunzătoare dp a presiunii în numita secţiune.

Vom scrie deci

$$F_{y'}dy'+F_{z'}dz'=\frac{dp}{\rho}$$

ca şi în cazul echilibrului.

Aşa dar, într'un curent rectiliniu, la orice moment t, legea de repartiţie a presiunii într'o secţie transversală este aceiaşi ca în Hdrostatică.

Dacă este vorba de un lichid, iar $\overline{F}=\overline{g}$, legea hidrostatică conduce, pentru toate punctele dintr'o secţie transversală, la aceiaşi înălţime piezometrică $z+\frac{p}{\varpi}$ faţă de un plan orizontal adică la acelaşi nivel piezometric, care va putea diferi numai dela o secţie la alta (Fig. 63).

Din prima ecuaţie (20) se vede că prezenţa lui $j_{x'}$, care în ecuaţia hidrostatică lipseşte, face ca, dacă j_x este pozitiv (mişcare acceleratoare în direcţia $+x'$), $\frac{\partial p}{\partial x'}$ să fie mai mic decât ar fi fost după legea hidrostatică şi deci înălţimea piezometrică $z+\frac{p}{\varpi}$, care după această lege ar fi fost constantă, va descreşte în sensul $+x'$ ca în figură. Dacă j_x ezte negativ, vom avea o variaţie contrară. Aşa dar, înălţimea piezometrică descreşte totdeauna *în sensul acceleraţiei.*

In fine, dacă $j_x=0$, adică mişcarea este uniformă, ecuaţiile mecanice fiind identice ca în hidrostatică, repartiţia presiunilor în întreaga masă fluidă, animată în asemenea condiţii de o vitesă de translaţie constantă în direcţia x, va fi conformă legei hidrostatice, deci sub acelaşi plan piezometric.

Să presupunem în al doilea rând curentul *curbiliniu* şi să luăm origina axelor în punctul de pe traectoria mijlocie, din secţiunea care cuprinde molecula unitară considerată la momentul t, iar drept axe instantanee de referinţă, ca *reper mobil*, axele intrinseci: *tangenta*, *normala principală* (din planul oscilator) îndreptată spre centrul de curbură, şi *binormala* acestei traectorii, duse din

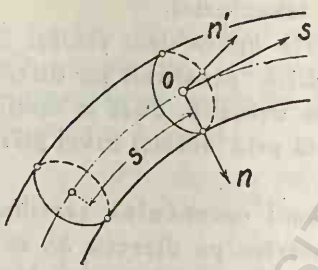


Fig. 64

origină, ultima aleasă astfel, ca triedrul $Osnn'$ să fie *drept* (cu sensurile legate ca la mişcarea burghiului).

Punctele din secţiunea menţionată vor fi raportate la normală şi bi-normală, iar poziţia secţiuni va fi definită prin lungimea s a firului mijlociu dintre acea secţiune şi o altă secţiune, luată ca reper fix. Astfel, în locul coordonatelor obişnuite, orice punct, dintr'o secţiune transversală oarecare a curentului, va fi determinat prin s (poziţia secţiunii), n şi n' (cooordonatele punctului în secţiune).

Dacă presupunem că dimensiunile transversale ale secţiunii sunt relativ mici faţă de razele de curbură ale traiectorii mijlocii şi că traiectoriile sunt aproape paralele (adică secţiunea dreaptă aproape constantă dealungul lor), astfel ca depărtarea între două secţiuni transversale vecine, măsurată pe orice traiectorie, să poată fi considerată egală cu ds al celei mijlocii, ecuaţiile mecanice vor rămâne de aceiaşi formă:

$$j_s = F_s - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s}$$

$$j_n = F_n - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} \qquad (21)$$

$$j_{n'} = F_{n'} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n'};$$

în care acum, v fiind vitesa punctului și r raza de curbură a traectoriei, vom avea:

$$j_n = \frac{v^2}{r} \quad \text{și} \quad j_n = 0,$$

deoarece acceleraţia totală are drept componente j_s și j_n, situate în planul osculator al traectoriei.

A treia ecuaţei (21) apare deci aceiaşi ca și în cazul echilibrului, astfel că repartiţia presiunii pe direcţia binormalei va fi ca în hidrostatică, orice dreaptă, dusă în secţiune paralel cu binormala, fiind caracterizată prin acelaşi nivel piezometric (linie piezometrică orizontală).

Observaţia din cazul curentului rectiliniu, cu privire la variaţia înălţimii piezometrice pe direcţia x', se poate repeta și aici, relativ la direcţia s a acceleraţiei tangenţiale, adică nivelul piezometric va scădea în sensul acestei acceleraţii. Acelaşi lucru se poate spune și pentru direcţia normalei principale și anume, că înălţimea piezometrică va descreşte în direcţia acceleraţiei *centripete*, care este totdeauna în sensul precizat mai sus pentru axa n (în spre centrul curburei).

De aceia, de ex., la partea curbată a unui curs de apă, nivelul liber, care dă măsura înălţimii piezometrice, scade în direcţia centrului de curbură, adică se înalţă la malul concav. Dacă curbura este foarte mică (r foarte mare) cădem, la limită, peste cazul precedent cu $j_n = 0$.

Ecuţiile unui fir fluid semi-permanent. Cazul unui fir fluid, adică al unui curent sau unei vine de secţiune transversală foarte mică, constantă sau uşor variabilă dealungul firului și cu axa rectilinie sau curbilinie, prezintă, faţă de cazurile studiate mai sus, simplitatea că, datorită micimii secţiunii, putem admite la orice moment t *presiunea*, *vitesa* și *densitatea* aceleaşi în toată întinderea unei secţiuni.

Fie (Fig. 65) $A_0 B_0$ o secţiune luată ca origine și s, măsurat pe axa firului, abscisa curbilinie a unei alte secţiuni oarecare AB. Valoarea scalară v în momentul t a vitesei unei molecule în secţia, definită prin abscisa curbilinie s, este funcţie de t, însă, pentru diversele puncte fixe ale axei (după sistemul lui *Euler*) v va depinde în afară de t și de s:

$$v = f(s,t).$$

Deasemenea și p și ρ vor fi funcții numai de aceste două variabile independente.

Ecuația mișcării dealungul firului, în sistemul lui *Euler*, este prima din (21):

$$j_s = F_s - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s}.$$

Fiind vorba de un fir, în a cărui secțiune foarte mică v, p, ρ sunt considerate constante, *independent de curbura firului*, facem abstracție de ecuațiile pe celelalte două axe, din secțiune.

In prima ecuație putem înlocui:

$$j_s = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial s},$$

unde $\frac{dv}{dt}$ este derivata substanțială a lui v față de t, iar al doilea membru este expresia echivalentă în variabilele lui *Euler*.

In sistemul *Euler* vom scrie deci acea ecuație:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial s} = F_s - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s}. \qquad (22)$$

Ecuația (22) are trei funcțiuni scalare necunoscute: v, ρ și p în funcție de s și t. Pentru determinarea acestor funcțiuni mai dispunem de ecuația fizică și ecuația de continuitate.

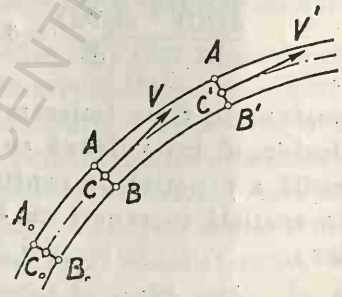


Fig. 65

Această din urmă ecuație, în cazul unui fir, este susceptibilă de o formă particulară, ce se stabilește în sistemul lui *Euler*, în mod analog ca pentru cazul general, dar mai simplu, fiindcă intrarea și eșirea moleculelor în volumul elementar considerat se face numai după o singură direcție, aceea a tangentei la axa firului.

Să luăm într-adevăr două secțiuni fixe, distanțate între ele cu ds, măsurat pe axa firului. Volumul dintre secțiuni are ca expresie Ωds, unde secțiunea $\Omega(s)$, dacă mișcarea n'ar fi riguros semi-permanentă, ar fi funcțe și de t, fiind însă independentă de t în cazul mișcării riguros semi-permanente sau permanente. Variația în unitatea de timp a masei conținute, adică

$$\frac{\partial(\rho\Omega)}{\partial t} ds,$$

va fi egală cu excesul masei intrate asupra celei eșite din volumul considerat.

Secțiunea firului fiind destul de mică, am admis v constant în întinderea ei. Masa ce intră prin una din secțiuni în unitatea de timp este $\rho v\Omega$; aceia ce iese prin cealaltă în aceași unitate de timp va fi $\rho v\Omega$ plus diferențiala sa pentru variația ds a lui s, care este

$$\frac{\partial(\rho v\Omega)}{\partial s} ds.$$

Masa intrată în plus este, așa dar,

$$-\frac{\partial(\rho v\Omega)}{\partial s} ds,$$

astfel că egalitatea, enunțată mai sus, revine la

$$\frac{\partial(\rho\Omega)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v\Omega)}{\partial s} = 0. \qquad (23)$$

Dacă Ω este constant în timp (mișcare riguros semi-permanentă) și totodată dealungul lui s (vână cu secțiune constantă), regăsim forma obișnuită a ecuației de continuitate, în care figurează numai derivata spațială în raport cu s, singura direcție de mișcare a moleculelor:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial s} = 0. \qquad (24)$$

In cazul lichidelor incompresibile ρ fiind constant, ecuația (23) se reduce la

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t} + \frac{\partial(v\Omega)}{\partial s} = 0. \qquad (25)$$

iar dacă şi Ω este constant în timp (mişcare riguros semi-permanentă a unui fluid incompresibil), la:

$$\frac{\partial(v\Omega)}{\partial s} = 0, \qquad (26)$$

adică $v\Omega$ constant dealungul lui s (nu însă şi în timp).

In fine, dacă totodată Ω este constant delungul lui s, ecuaţia de continuitate se reduce la:

$$\frac{\partial v}{\partial s} = 0, \qquad (27)$$

adică v este constant delungul lui s (nu însă şi în timp).

Formula (23) se aplică, evident cu arecare aproximaţie, şi la un curent cu secţiune ceva mai mare, constantă sau variabilă cu timpul (tub cu pereţii deformabili), luându-se axa lui geometrică ca linie de referinţă, iar drept ρ şi v valorile medii din secţiune.

Ecuaţiile (22) şi (23) dimpreună cu ecuaţia fizică permit aflarea funcţiilor v, ρ şi p la un fir rectiliniu sau curbiliniu, indiferent de gradul de curbură, dacă secţiunea este mică faţă de raza de curbură.

7. Propagarea unei perturbaţiuni printr'un mediu fluid într'un tub drept perfect rigid (principiul transmisiunii sonice).

Să aplicăm ecuaţiile (22), (24) şi cea fizică la propagarea unei perturbaţiuni printr'un mediu fluid *compresibil* într'un tub cilindric rigid de o lungime indefinită. Vom avea o mişcare care, dacă se neglijează deformaţia pereţilor, este o mişcare riguros semi-permanentă, deoarece moleculele se mişcă într'o direcţie constantă, paralelă cu axa tubului. Vom lua această dreaptă ca axă x.

Ipoteza, că tubul ar fi absolut rigid, este foarte aproape de realitate dacă presiunile sunt mici. In această ipoteză Ω va fi constant, atât în raport cu x cât şi cu t.

Ca să ne dăm seamă de mecanismul acestei mişcări, să considerăm că perturbaţia în tub este produsă de un piston (fig. 66), care în intervalul $t_0 \to t_1$ se deplasează, cu faţa lui din dreapta dela A la a. Pistonul va comprima primul strat elementar de fluid în contact, care, tinzând a reveni la starea lui primitivă, va comprima stratul al doilea şi aşa mai departe. Comprimarea se întinde astfel în intervalul menţionat numai pe o lungime oarecare AH,

care va depinde de mărimea intervalului $t_1—t_0$, în care s'a făcut deplasarea Aa, constituind lungimea *undei comprimate*. Vitesa primului strat al acestei unde este în orice moment vitesa pistonului, crescând dela zero (în A) până la un maximum şi apoi descrescând pentru a reveni la zero (în a). Celelalte straturi ale acestei unde au în momentul t_1 vitese (în sensul $+x$) şi supradensităţi (faţă de densitatea normală) diferite, figurate grafic pe fig. 66, prin curba aproximativă, trasată plin dasupra axei. Deşi curbele $\rho—\rho$ şi $p—p_0$ diferă în general ca formă de aceia a vitesei, ele au o formă analoagă şi de aceia, pentru simplitate, s'a trasat în figură o singură curbă notată t_1, pentru a reprezenta atât pe $v—v_0$ (v_0 iniţial fiind aci nul în toate secţiunile) cât şi pe $\rho—\rho_0$ şi pe $p—p_0$ în momentul t_1.

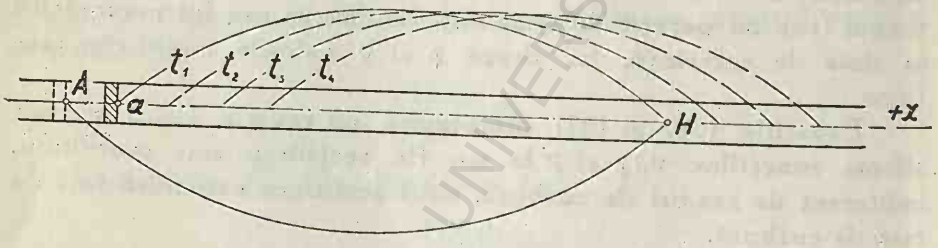


Fig. 66

Privitor la această curbă notăm că, pistonul sosind în a în momentul t_1, intră în repaus, vitesa stratului de fluid în contact (coada undei) v (sau mai general $v—v_0$, în vederea cazului când v_0 iniţial n'ar fi nul) devenind deasemenea nulă, iar densitatea recapătă valoarea ei iniţială: $\rho—\rho_0=0$. In aceleaşi condiţiuni se va găsi în momentul t_1 şi stratul elementar din H (frontul undei). In acel moment t_1, când primul strat (dela coadă) al porţiuni aH a intrat în repaus, primul strat al porţiunii următoare HH' (Fig. 66) porneşte; când al doilea strat al porţiunii aH a intrat în repaus, al doilea strat al porţiunii HH' se pune în mişcare ş. a. m. d. Unda comprimată înaintează aşadar în tub, luând succesiv în momentele $t_2=t_1+\Delta t$, $t_3=t_2+\Delta t$ ... poziţiile marcate t_2, t_3, ... (punctate), astfel că fiecare strat de fluid trece succesiv prin aceleaşi faze de vitesă şi densitate (deci şi de presiune).

Unda comprimtă se deplasează dealungul tubului cu o vitesă c, numita *vitesă de propagare* a undei.

Aceasta nu are evident nimic de a face cu vitesele efective

ale moleculelor, cari sunt de același ordin de mărime cu vitesa liniară a pistonului.

Am putea să ne oprim aici, aplicând tot calculul ce urmează la perturbația, a cărui *sursă* a fost mișcarea Aa a pistonului și care, odată produsă, se deplasează indefinit, lăsând în urma ei fluidul în repaus.

Este totuși interesant de examinat sumar și cazul unei *vibrațiuni a pistonului.*

Să presupunem deci că pistonul, în loc de a se opri în a, se rentoarce în A, într'un interval de timp egal cu primul $(t_1—t_0)$. Pe fața din dreapta a pistonului tinde a se produce vid, în care se dilată mai întâiu primul strat de fluid în contact, după care urmează dilatarea stratului al doilea, primul tinzând a reveni la starea primitivă, etc.

In intervalul în care s'a înapoiat pistonul (în care timp unda comprimată a trecut la HH') zona care a participat la dilatație s'a întins pe porțiunea AH (aA este neglijabil față de AH), formând în momentul $t=2(t_1—t_0)\equiv T$ unda dilatată, cu repartiția de vitese inversate și de subdensități (adică diferențe față de vitesa inițial nulă și de densitatea normală), arătată aproximativ prin linia plină, trasată sub axa tubului pe fig. 66.

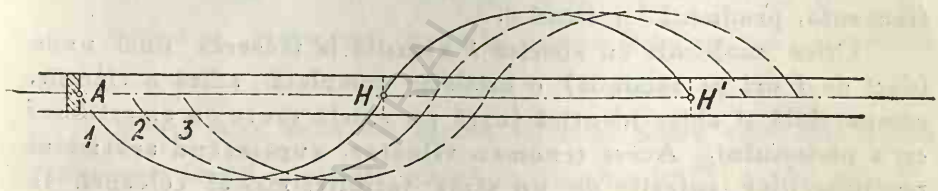


Fig. 67

Pentru suprapresiuni și depresiuni $(p—p_0)$ vom avea forme de curbă analoage. La finele intervalului menționat $T\equiv 2(t_1—t_0)$ cele două unde, comprimată și dilatată, vor forma o *undă complexă*, reprezentată grafic pe fig. 67, în comun (spre a nu complica figura) pentru variațiile celor trei cantități $v—v_0$, $\rho—\rho_0$, $p—p_0$, prin o linie plină *1*, care ia succesiv în momentele $T+\Delta t$, $T+2\Delta t$... pozițiile punctate *2, 3, ...*, propagându-se în sens longitudinal. Vitesa de propagare (independentă de felul perturbației, după cum se va demonstra) este aceiași cu vitesa, cu care s'ar propaga singură, fie unda comprimată fie cea dilatată, ambele formând de fapt semiundele undei complete.

Așa dar, unda completă reprezintă aci lungimea porțiunii de fluid din tub, a cărei stare s'a modificat în timpul T al unei oscilațiuni complete a pistonului; ea este evident cu atât mai scurtă cu cât această oscilație durează mai puțin. Dacă intervalele de timp pentru cursa înainte și înapoi nu sunt egale, lungimile semiundelor vor fi și ele neegale

Dacă, imediat după prima oscilație a pistonului urmează o a doua etc (*oscilații înfreținute*), unda AH' va fi imediat urmată de o a doua etc, formându-se un *tren de unde*, care se propagă cu aceiași vitesă c.

Această vitesă de propagare, după cum vom vedea, depinde numai de proprietățile fizice ale mediului și anume de *densitatea* și *de modulul său de elasticitate*.

Dacă f este frecvența oscilațiilor pe secundă (durata în secunde a unei oscilații este $T=\frac{1}{f}$), cum spațiul parcurs de o perturbație într'o secundă este c, el va cuprinde f unde complete, a căror lungime va fi deci

$$\lambda=\frac{c}{f}=cT.$$

Așa dar, lungimea unei unde va fi invers proporțională cu frecvența, produsul lor fiind c.

Orice moleculă cu abscisa x execută la trecerea unei unde (deci de f ori pe secundă) o oscilație completă, adică o *vibrație*, comparabilă și chiar identică (dacă nu există cauze de amortizare) cu a pistonului. Acest fenomen vibrator, cuprinzând ansamblul perturbațiilor suferite de un strat infinitezimal al coloanei, se propagă cu vitesa c.

Cazul vibrării pistonului fiind un caz particular de perturbație, să aplicăm acum ecuațiile mișcării semipermanente, a unei vine de secțiune relativ mică, la mișcarea de propagare a unei perturbații *de orice natură*.

Intr'un mediu gazos, atunci când variațiunile de presiune sunt mici, iar într'un lichid (greu compresibil), chiar atunci când este vorba de variațiuni mari de presiune, valoarea instantanee ρ a densității într'un punct al mediului diferă puțin de cea inițială ρ_0.

Pe de altă parte, vitesele v ale moleculelor fiind mici (neglijabile față de vitesa de propagare c), $v\frac{\partial v}{\partial x}$ este neglijabil față de

$\frac{\partial v}{\partial t}$ *) și putem scrie cu destulă aproximație ecuația mecanică:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = F_x - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} \qquad (28)$$

sau, cum pentru un tub *orizontal* $F_x = g = 0$:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x}. \qquad (29)$$

Ecuația de continuitate (24), sau (23) după suprimarea constant Ω, devine la rândul ei factorului

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \rho}{\partial t}. \qquad (30)$$

Ecuația fizică, atât în cazul lichidelor (când temperatura influențează puțin) cât și în cazul gazelor în evoluție *adiabatică*

*) Se poate face următorul raționament, bazat pe cunoștința faptului că unda directă se deplasează cu o anumită vitesă c. Variația dv, pe care o obținem pe loc în dt, este aceiași și de sens contrar cu variația ce se atribue moleculei la deplasarea undei cu $dx = cdt$. Așa dar,

$$dv = \frac{\partial v}{\partial t}dt = -\frac{\partial v}{\partial x}dx = -\frac{\partial v}{\partial x}cdt \text{ sau } \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial x}c, \text{ de unde } v\frac{\partial v}{\partial x} : \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{v}{c}.$$

Evident că, pentru unda înapoiată trebuind să punem $-dx$, raportul va fi: $\frac{v}{c}$.

Dealtfel se va vedea mai departe că, de ex. pentru unda directă, după introducerea acestei aproximații, adică după înlocuirea lui $\frac{\partial v}{\partial t}\left(1 - \frac{v}{c}\right)$ prin $\frac{\partial v}{dt}$, găsim $v - v_0 = \frac{g}{c}F(t - \frac{x}{c})$, de unde raportul dintre $v\frac{\partial v}{\partial x}$ și $\frac{\partial v}{dt}$ rezultă: $-\frac{v}{c}$; pentru unda înapoiată aproximația constând din înlocuirea lui $\frac{\partial v}{\partial t}(1 + \frac{v}{c})$ prin $\frac{\partial v}{\partial t}$, găsim $v - v_0 = \frac{g}{c}f(t + \frac{x}{c})$, rezultând raportul $\frac{v}{c}$.

In cazul general, când unda directă se suprapune cu unda înapoiată, menționatul raport se găsește pe aceiași cale a fi $\frac{F' + f'}{F' - f'} \cdot \frac{v}{c}$, care depinde și de valoarea lui $\frac{F' + f'}{F' - f'}$. Faptul însă că, la suprapunerea celor două valori $\frac{\partial v}{\partial t}$, a undei directe cu a celei înapoiate, se neglijează în fiecare componentă $\pm \frac{v}{c}$ pe lângă l, arată că și atunci aproximația proporțională este admisibilă, dacă valorile, ce rezultă prin suprapunere, n'ar fi prea mici (componenții fiind de semn contrar), caz evident fără interes.

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

(ipoteză ce se poate admite, vitesa de propagare fiind mare), exprimă că presiunea este funcție exclusivă de ρ. Putem deci desvolta creșterea lui p în serie *Taylor* și, însemnând cu p' derivata $\frac{dp}{d\rho}$ a lui p în raport cu ρ, păstra numai termenul de primul ordin, scriind:

$$\left.\begin{aligned} p &= p_0 + p'_0(\rho - \rho_0) \\ \frac{\partial p}{\partial x} &= p'_0 \frac{\partial \rho}{\partial x} \\ \text{și} \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= p'_0 \frac{\partial \rho}{\partial t}, \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

sau în general, $dp = p'_0 d\rho$, ceea ce permite a se elimina ρ din (36):

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_0 p'_0}\frac{\partial p}{\partial t}. \quad (32)$$

Acestă ecuație împreună cu (29) constitue un sistem de de două ecuațiuni cu două necunoscute, v și p, în funcție de două variabile independente, x și t. Eliminând pe v între ele și punând $p'_0 = c^2$ (p'_0 este totdeauna pozitiv), obținem ecuația:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2},$$

care admite ca soluție, precum ușor se verifică *), o funcție de forma

$$p - p_0 = \varpi F(t - \frac{x}{c}) + \varpi f(t + \frac{x}{c}), \quad (33)$$

unde am pus în evidență factorul constant ϖ spre a simplifica în urmă scrierea (deoarece mai târziu, la problema practică a loviturilor de berbec, vom considera *înălțimea piezometrică* sau *sarcina statică* $y = \frac{p}{\varpi}$, în locul presiunii p), iar F și f sunt func-

*) Se face schimbarea de variabilă $\xi = t - \frac{x}{c}$, $\eta = t + \frac{x}{c}$, ecuația devenind $\frac{\partial p}{\partial \xi \partial \eta} = 0$, a cărei integrală este: $p = F(\xi) + f(\eta)$ etc.

țiuni arbitrare de argumentul respectiv, dar cari indeplinesc condiția inițială de a se anula pentru $t=0$, oricare ar fi x.

Derivând (33) în raport cu x și înlocuind în (29), obținem, prin integrare în raport cu t:

$$v-v_0=\frac{g}{c}\left[F(t-\frac{x}{c})-f(t+\frac{x}{c})\right], \qquad (34)$$

unde, în exemplul luat mai sus, am presupus $v_0=0$ și deci $v=0$ pentru $t=0$.

In cazul când fluidul în momentul perturbației, în loc de fi în repaus, ar fi circulat cu o vitesă uniformă v_0, cum este cazul conductelor care alimentează turbinele, avem $v_0 \neq 0$.

Prima formă a ecuației de continuitate (31) procură în fine prin (33):

$$\rho-\rho_0=\frac{\varpi}{c^2}(F+f). \qquad (35)$$

In modul acesta, cu ajutorul celor trei ecuații am găsit forma generală a funcțiunilor necunoscute, p, v și ρ, funcții de x și de t. In ceea ce privește pe c:

$$c^2 \equiv p'_0 \equiv \frac{dp}{d\rho},$$

el se deduce ușor din ecuația fizică.

De exemplu în cazul gazelor întrebuințăm legea lui *Laplace* (adiabatică)

$$\frac{p}{\rho^\gamma}=\frac{p_0}{\rho_0{}^\gamma},$$

care dă

$$p'_0=\gamma\rho^{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0{}^\gamma},$$

sau aproximativ:

$$p'_0=\gamma\frac{p_0}{\rho_0}=\gamma g\frac{p_0}{\varpi_0}.$$

Dacă luăm cazul obișnuit $\gamma=1{,}4$ (gaze biatomice) și admitem o temperatură $\theta=15^0$, avem în unități practice: $p_0=10.336\ kg/m^2$,

$$\rho_0=0{,}124498\,\frac{kg\,sec^2}{m^4} \quad \text{și} \quad \varpi_0=1{,}2255\ kg/m^3.$$

Cu aceste date obținem valoarea aproximativă cunoscută

$$c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\gamma g \frac{p_0}{\varpi_0}} = 340 \text{ m/sec.}$$

a vitesei sunetului, acesta fiind deasemenea o formă de perturbație (vibratorie).

Pentru apă aplicăm legea fizică (legea compresibilității, care pentru mici variațiuni este generală, aplicându-se și la gaze):

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_0}[1 - \varkappa(p - p_0)],$$

de unde, ținând seama că $\rho \cong \rho_0$:

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho} = \frac{1}{\rho_0}\frac{1}{\varkappa} = \frac{g}{\varpi_0 \varkappa}$$

sau, cum

$$g = 981 \text{ cm/sec}^2, \quad \varpi_0 = \frac{1 \text{ kg}}{1000 \text{ cm}^3} \quad \text{și} \quad \varkappa = 0{,}00005 \text{ cm}^2/\text{kg}:$$

$$c = 1.400 \text{ m/sec.}$$

In realitate, din cunoașterea lui c, măsurat pe altă cale mai directă, s'a dedus valoarea lui $\varkappa$ în mod mai precis. Cum $\varkappa$ este inversul modulului de elasticitate ε al fluidului, putem scrie:

$$c = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}}.$$

Comparând cu cazul gazelor, vedem că pentru acestea, la o evoluare adiabatică avem $\varepsilon = \gamma p$; la o evoluare izotermă (adică după legea lui *Mariotte*, la a cărei formulă se reduce aceea a lui *Laplace*, punând $\gamma = 1$) vom avea $\varepsilon = p$. Cum fenomenul propagării este foarte rapid, el evoluează adiabatic, astfel că prima expresie a lui ε, adică γp este cea exactă.

Să discutăm forma generală a funcțiunilor $p - p_0$, $v - v_0$ și $\rho - \rho_0$, presupunând mai întâiu $f = 0$, adică reținând numai funcțiunea $F(t - \frac{x}{c})$ în formule.

Se vede că pentru $x = ct + x_0$ cele trei funcțiuni p, v și ρ rămân constante, ceea ce înseamnă că un observator ce s'ar mișca în tub după această lege, adică cu vitesa uniformă c, ar întâlni molecule având aceleași caracteristice p, v și ρ.

Rezultă că, în fenomenul de propagare a unei perturbațiuni, orice valori particulare ale lui p, v sau ρ se propagă cu vitesa

$$c=\sqrt{p'_0}=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}}.$$

Așa dar, c este vitesa undei, adică aceia cu care se deplasează părțile ei caracteristice, cum sunt de ex. frontul și coada (cu $p=p_0$, $v=v_0$, $\rho=\rho_0$) sau orice alt punct al undei.

Soluția cu $F=0$ și păstrarea numai a lui $f(t+\frac{x}{c})$ corespunde unei unde ce s'ar propaga cu vitesa $-c$, iar soluția în forma completă (33), (34), (35) corespunde cu două unde suprapuse, ce se propagă în sens invers.

Prima undă, care este *centrifugă* (față de sursă, adică de centrul perturbației) se mai numește undă *progresivă* sau *directă*, analog cu unda sonoră de emisiune.

Cea de a doua (*centripetă*) în cazul unui tub indefinit nu corespunde cu o realitate fizică și nu trebue luată în considerație. Ea devine realitate numai, când tubul este finit și de ex. închis la extremitate, reprezentând atunci unda *reflectată*. Reflexia se produce (în condițiuni bineînțeles diferite) și în cazul când capătul tubului este deschis într'un mediu de presiune constantă.

Undele se pot suprapune. Un tren de unde directe și un tren de unde reflectate produc prin suprapunerea lor fenomenul *interferenței*, formând *unde staționare* cu *noduri de vitesă* (unul se formează totdeauna la obstacolul *fix* întâlnit, care a produs reflexia) și *umflături de vitesă*, precum și cu *noduri de presiune* (unul se formează totdeauna la extremitatea cu presiune constantă) și *umflături de presiune*. Nodurile sunt puncte (sau secții) unde aceste funcțiuni sunt constante, iar umflăturile puncte unde ele variază alternativ, adică pulsează cu *amplitudinea maximă* (vezi acustica).

Reflexia unei unde ce se înapoiază se poate produce și la sursa perturbației (în exemplul luat, pe pistonul considerat aproximativ ca fix, deoarece deplasarea lui este neglijabilă față de deplasarea undei). Unda directă și cele succesiv reflectate la fiecare din cele două capete ale unei conducte, dacă perturbația emanată dela sursă a durat un timp, se suprapun la orice moment în diferitele secții în așa mod, că o valoare a undei directe actuale se adună algebric cu valorile undelor reflectate, fie care provenită din o undă directă anterior emisă.

Același rezultat se obține dacă, în locul suprapunerei descrise, compunem separat toate undele ce merg într'un sens și toate undele ce merg în sensul opus, iar în urmă suprapunem *unda rezultantă în sens direct* cu unda rezultantă *de înapoiere*.

In cazul undelor întreținute, amplitudinea vitesei și aceea a presiunii cresc mereu prin suprapunerea noilor unde emise.

De aceia, dacă concomitent cu afluența energiei emisă de sursă (de ex. piston, *generator* de unde, mișcat de un motor primar) această energie nu s'ar consuma, fie în mod util la vreun punct al conductei (unde ar fi branșat un *receptor*), fie prin frecări dealungul conductei cu transformarea energiei în căldură, vibrațiile, intensificându-se mereu, ar putea să producă ruperea conductei. Chiar la un tub de oțel, cât de gros, se pot produce asemenea accidente, dacă printr'un mediu lichid se transmit cantități importante de energie, neconsumate altfel pe drum.

Funcția F, care la început dă într'un punct oarecare x numai unda directă emisă, exprimă apoi în orice moment *rezultanta directă*, adică suma valorilor date de undele directă și reflectate ce se deplasează în sensul $+x$, iar funcția f, care începe prin a exprima într'un punct x prima undă reflectată, corespunde ulterior *rezultantei de înapoiere*, adică a tuturor undelor reflectate care în momentul t se deplasează în sensul $-x$. Această distincție concordă cu al doilea procedeu de suprapunere, descris mai sus.

Dacă într'o conductă cu lichid (pusă prealabil sub presiune statică, pentru a se evita discontinuități în zonele dilatate) producem la un capăt vibrațiuni puternice cu un piston în mișcare alternativă (*generator*), putem realiza transmiterea de putere motrice la un *receptor*, instalat la celalt capăt, prin unde analoage cu cele acustice.

Fenomenul acesta a fost studiat de *Ing. Gogu Constantinescu* prin alte metode de calcul (bazate pe comparația cu curentul electric alternativ) și folosit la construcția de mașini generatoare, zise *sonice*, comparabile cu alternatorii electrici, pentru transmiterea sonică a energiei la o serie de receptoare sau motoare sonice, care imită motoarele electrice sincrone și asincrone.

O aplicație analoagă a ecuațiilor mișcării semi-permanente, a unui fir sau curent de secțiune relativ mică, este studiul *loviturilor de berbec* (vezi mai departe), în conductele ce alimentează turbinele (*conducte motrice*), studiu în care se ține în plus seamă și de deformabilitatea pereților.

8. Mişcare permanentă (staţionară). Studiu general al unui fir în mişcare permanentă.

Mişcare permanentă. Mişcarea permanentă este cea mai importantă în aplicaţiile practice. Astfel, în cazul unei conducte în funcţiune, al unui motor hidraulic etc, ceea ce interesează mai mult, este *regimul permanent*, care, după un răstimp relativ scurt dela pornire, cât durează *regimul variat* sau *tranzitor*, se stabileşte ca regim regulat de funcţionare. In cursul regimului permanent pot interveni şi unele schimbări sau perturbaţiuni, inerente exploatării, care şi ele constitue regimuri variate sau tranzitoare, după stingerea cărora regimul permanent este restabilit.

Definiţia mişcării permanente a unui fluid se dă, în sistemul lui *Euler*, prin relaţiile:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial v_y}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial v_z}{\partial t} = 0 \quad \text{sau vectorial} \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = 0.$$

Mişcarea permanentă fiind un caz mai particular al celei semipermanente, liniile de curent coincid şi aci cu traectoriile, familia de linii respectivă rămânând neschimbată în decursul timpului. O *suprafaţă-tub* sau *tub de curent*, *un curent*, *vână* sau *fir*, au şi aci forme fixe întocmai ca la mişcarea semi-permanentă, întrucât acestea ţin de configuraţia geometrică a mişcării, care în ambele cazuri rămâne neschimbată (independent de valoarea scalară a vitezelor, care de altfel la mişcarea permanentă rămâne şi ea constantă).

Fir în mişcare permanentă. Ecuaţia lui Bernoulli. Studiul mişcării curenţilor sau vinelor poate fi deseori redus la studiul unui *fir*, considerând că scurgerea se face în fire juxtapuse.

Ecuaţiile firului în mişcare permanentă se deduc din acelea ale mişcării semi-permanente, introducând în acestea condiţia, că totul este constant în raport cu timpul, astfel că rămâne o singură variabilă independentă: s. Derivatele luate faţă de această variabilă unică sunt, aşa dar, *totale*, putând primi notaţia corespunzătoare. *Ecuaţia mecanică* devine atunci

$$v\frac{dv}{ds} = F_s - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{ds},$$

iar dacă F derivă dintr'un potenţial U:

$$v\frac{dv}{ds} = -\frac{dU}{ds} - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{ds}$$

sau:

$$\frac{dv^2}{2}+\frac{dU}{ds}+\frac{1}{\rho}\frac{dp}{ds}=0. \tag{36}$$

Ecuația (36), integrată dealungul axei s a firului, dă:

$$\frac{v^2}{2}+U+\int\frac{dp}{\rho}=const, \tag{36.1}$$

constanta fiind caracteristică pentru firul considerat, putând însă varia dela fir la fir (sau dela un strat de fire la alt strat de fire). Această ecuație constitue *teorema lui Bernoulli, aplicată la un fir în mișcare permanță* (iar nu la *întreaga masă*, ca în cazul mișcărilor potențiale)*).

---

*) Dacă plecăm dela ecuațiile generale ale regimului permanent al unei mase îndefinite:

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}=F_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}=F_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}=F_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

și le înmulțim respectiv cu dx, dy, dz, adunându-le, este ușor de văzut că numai în cazul, când $\overline{ds}$ $[dx, dy, dz]$ este luat pe elementul comun al liniei de curent și al traectoriei, în care caz $dx=v_x\,dt$, $dy=v_y\,dt$, $dz=v_z\,dt$, expresia:

$$dx\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}v_x+\frac{\partial v_x}{\partial y}v_y+\frac{\partial v_x}{\partial z}v_z\right),$$

schimbând $v_x\,dx$ prin $v_x\,dy$ și $v_z\,dx$ prin $v_x\,dz$ (căci $\frac{dx}{v_x}=\frac{dy}{v_y}=\frac{dz}{v_z}=dt$), devine:

$$v_x\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}dx+\frac{\partial v_x}{\partial y}dy+\frac{\partial v_x}{\partial z}dz\right),$$

care aci, cu $\frac{\partial v}{\partial t}=0$ (mișcare permanentă), reprezintă $v_x\,dv_x$ etc.

Adunarea în chestiune conduce astfel la $v_x\,dv_x+v_y\,dv_y+v_z\,dv_z\equiv v dv\equiv d\frac{v^2}{2}$ $=-dU-\frac{dp}{\rho}$, adică la ecuația lui *Bernoulli*, care mai sus s'a obținut pe o cale mai simplă, plecând direct de la fir.

In cazul lichidelor ecuația (36) se integrează în relația

$$\frac{v^2}{2}+U+\frac{p}{\rho}=const, \qquad (36.2)$$

aplicabilă dealungul unui fir, mai precis la toate punctele ale axei lui, caracterizată astfel printr'o anumită valoare a constantei.

In câmpul gravitației ($U=gz$) ordonata verticală ascendentă, față de un plan de referință orizontal inferior, fiind z, ecuația pentru gaze, raportată la *unitatea de masă*, devine:

$$gz+\int\frac{dp}{\rho}+\frac{v^2}{2}=const, \qquad (36.1.1)$$

iar pentru lichide:

$$gz+\frac{p}{\rho}+\frac{v^2}{2}=const. \qquad (36.2.1)$$

Dacă raportarea se face la *unitatea de greutate* (a cărei masă este $\frac{1}{g}$), avem pentru gaze forma

$$z+\int\frac{dp}{\varpi}+\frac{v^2}{2g}=H, \qquad (36.1.2)$$

iar pentru lichide:

$$z+\frac{p}{\varpi}+\frac{v^2}{2g}=H \qquad (36.2.2)$$

cu H constant.

Ecuația de continuitate, în forma ei generală, pentru o masă indefinită în mișcare permanentă se reduce la

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}=0,$$

iar pentru un fir la:

$$\frac{\partial(\rho v\Omega)}{ds}=0 \qquad (37)$$

sau

$$\rho v\Omega=const. \qquad (37.1)$$

Ecuația (37.1) se aplică dealungul firului, ρ fiind oarecare. Ori, $v\Omega$, luat pentru un punct oarecare al axei sau pentru o

secțiune a firului, este volumul debitat prin secțiune în unitatea de timp, iar $\rho v\Omega$ este masa debitată în unitatea de timp. Inmulțind cu g, avem pentru greutatea debitată în unitatea de timp:

$$g\rho v\Omega \equiv \varpi v\Omega = const. \qquad (37.2)$$

Așa dar, la o mișcare permanentă, *debitul de masă* sau de *greutate* prin diferitele secțiuni transversale ale unui fir este nu numai constant cu timpul prin fiecare secțiune, dar și același pentru toate secțiunile, adică constant dealungul firului. Evident că acest enunț este valabil și pentru un *curent* în mișcare permanentă, deoarece debitul curentului prin o secțiune este egal cu suma debitelor firelor componente, ale căror secțiuni se integrează în secțiunea curentului.

In cazul lichidelor rezultă că și debitul de volum prin orice secțiune este același, adică constant dealungul firului sau tubului:

$$v\Omega = const. \qquad (37.3)$$

La cele două ecuații (36) și (37.1) se adaogă ecuația fizică:

$$f(\rho, p) = 0 \qquad (38)$$

Reprezentarea grafică și interpretarea mecanică a ecuației lui Bernoulli. Această ecuație, stabilită pentru un fir fluid în mișcare permanentă și în care funcțiunile sunt luate în sistemul lui *Euler* (cu singura variabilă independentă s, abscisa curbilinie a punctului geometric), fără intervenirea timpului t, este susceptibilă de o *reprezentare grafică*, întrucât sub forma raportată la unitatea de greutate, de ex. la $1\,kg$, exprimă o relație între linii.

Constanța trinomului din membrul întâiu arată întradevăr, că ordonata punctului de pe fir (mai precis a centrului secțiunii), plus înălțimea datorită presiunii $\int \frac{dp}{\varpi}$, respectiv $\frac{p}{\varpi}$, plus $\frac{v^2}{2g}$ (*înălțimea reprezentativă a vitesei*, sau simplu *înălțimea de vitesă*) dau o înălțime constantă H dealungul firului fluid. Această proprietate poate fi ilustrată, pentru orice fir, printr'o linie orizontală, așezată într'un plan orizontal și reprezintând proecția axei firului pe acest plan, numit *plan de sarcină* (a se vedea mai departe justificarea denumirii), paralel cu planul de referință și așezat la înălțimea H deasupra acestuia.

Această altitudine H a planului de sarcină poate varia, după cum rezultă din formula *Cap. V* (1.3)

$$-grad\left(U+\int\frac{dp}{\rho}+\frac{v^2}{2}\right)\equiv-grad\,gH=\frac{\partial\bar{v}}{\partial t}-[\bar{v}\,rot\,\bar{v}],$$

dela un fir la altul, sau mai precis (precum se va vedea) de la un strat de fire la altul. Într'adevăr, pentru mişcarea permanentă, făcând $\frac{\partial\bar{v}}{\partial t}=0$, nu avem $grad\,H=0$ de cât la o excepţie cu totul particulară în cazul rotaţionalităţei, când anume $rot\bar{v}\parallel\bar{v}$, şi în general în cazul mişcărilor permanente *potenţiale* ($rot\bar{v}=0$), constanta fiind atunci aceiaşi pentru întreaga masă fluidă dând un singur plan de sarcină. Reprezentarea grafică este întrebuinţată în special pentru lichide, la care $\frac{p}{\varpi}$ este chiar înălţimea piezometrică (în coloană de lichid) respectivă. Putem însă aplica metoda aproximativ şi la gaze, luând o medie, dacă densitatea variază în limite restrânse.

Termenii trinomului din primul membru pot primi o *interpretare mecanică*, care apare dacă, după sistemul lui *Lagrange*, termenii în chestiune, cari se referau la un punct fix (sau o secţie a firului), fiind legaţi de acest punct, îi considerăm acum legaţi de substanţă, adică de moleculă. Aceasta este permis prin faptul că, în mişcarea permanentă sau staţionară, molecula trecând prin diferitele secţiuni ale firului, îşi însuşeşte în fiecare moment

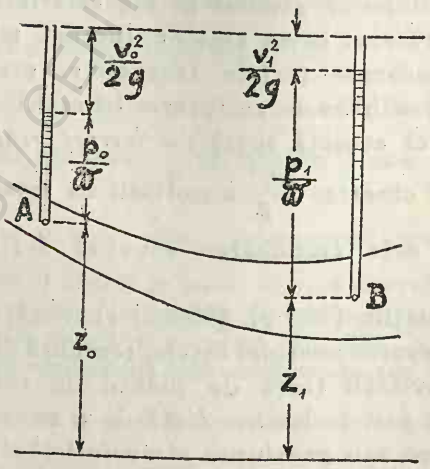


Fig. 68

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

caracteristicile ρ, p, v ale secţiunii. Să considerăm de ex. cazul mai simplu al lichidelor. La orice moment t pentru o moleculă A din secţiunea 0 a firului lichid şi o moleculă B din secţiunea 1, există relaţia lui *Bernoulli* (stabilită în sistemul lui *Euler*):

$$z_0 + \frac{p_0}{\varpi_0} + \frac{v_0^2}{2g} = z_1 + \frac{p_1}{\varpi} + \frac{v_1^2}{2g}.$$

Nimic nu împiedică însă (mişcarea fiind permanentă) de a atribui expresia din membrul al doilea tot moleculei A, în momentul ulterior t', când ea va trece prin secţia 1, căci în acel moment molecula A va avea evident coracteristicele invariabile ale punctului geometric din 1.

Sub acest aspect sensul mecanic al ecuaţiei lui *Bernoulli* *sub forma diferenţială*:

$$v\frac{dv}{ds}ds \equiv d\frac{v^2}{2} = -\frac{dU}{ds}ds - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{ds}ds$$

apare imediat, dacă privim în ea pe ds drept *deplasarea* elementară reală a aceleiaşi molecule, iar nu ca distanţa între două puncte geometrice vecine ale firului.

Termenul $-\frac{dU}{ds}ds \equiv -dU$ exprimă întradevăr atunci lucrul forţei exterioare a câmpului, iar $-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{ds}ds \equiv \frac{dp}{\rho}$ lucrul rezultantei elastice, *asupra unităţii de masă* în timpul deplasării ds.

In cazul echilibrului, studiat în hidrostatică, ds fiind o *deplasare virtuală* oarecare, suma acestor lucruri mecanice este cu necesitate nulă, deoarece forţele respective, gravitatea şi rezultanta elastică, se anihilează reciproc. In cazul mişcării, relaţia de mai sus arată, că această sumă de *lucruri reale* este egală cu creşterea energiei cinetice $d\frac{v^2}{2}$ a unităţii de masă, astfel că ecuaţia lui *Bernoulli* este traducerea ecuaţiei forţelor vii pentru această masă.

Rezultă că ecuaţiile (36.1.2), (36.2.2) exprimă, pentru unitatea de greutate, conservarea energiei totale, compusă din energia potenţială datorită gravităţii (faţă de planul de referinţă), energia potenţială datorită forţei elastice (faţă de o anumită presiune de referinţă, de ex. zero sau presiunea atmosferică) şi energia cinetică. Aceste energii, reduse la unitatea de greutate, au dimensiunea

unei linii şi se numesc *sarcini*, de unde şi denumirea de *plan de sarcină* dată planului orizontal, care indică sarcina totală deasupra planului de referinţă.

Ecuaţia mecanică *sub forma diferenţială* în direcţia liniei de curent, chiar în mişcare nepermanentă poate fi considerată drept ecuaţia forţelor vii. Privind, în sistemul *Lagrange*, pe ds ca deplasare a moleculei de masă *1*, primul membru al acestei ecuaţii exprimă întradevăr diferenţiala energiei cinetice, iar al doilea membru are aceiaşi semnificaţie ca mai sus (lucrul forţei exterioare plus al forţei elastice).

La *integrare* însă, $\frac{\partial p}{\partial s}$ fiind o derivată parţială, membrul al doilea nu poate primi forma ecuaţiei lui *Bernoulli* integrată, fiindcă în cazul mişcării nepermanente, la lichide de ex., $\frac{\partial p}{\partial s} ds$ nu este o diferenţială exactă dp (căci $\frac{\partial p}{\partial t} \neq 0$) şi deci nu se integrează în $(p - p_0)$, precum iarăşi la gaze $\int \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} ds$ nu este echivalent cu forma $\int \frac{dp}{\rho}$. Lucrul rezultantei elastice $\int_0^1 \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} ds$ între cele două puncte *0* şi *1* va depinde atunci şi de *variaţia cu timpul a presiunilor intermediare*, pe care le întâmpină molecula pe traectoria ei, întrucât mişcarea s'a presupus *nepermanentă*. Acest lucru mecanic poate diferi dela un caz la altul pentru aceleaşi condiţiuni: iniţiala (p_0) şi finală (p_1), integrala $\int_0^1 \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} ds$ nefiind univocă.

Observăm că, la mişcarea permanentă, forţa elastică admite şi ea un potenţial, şi anume $\frac{p}{\rho}$ la lichide*) sau $\int \frac{dp}{\rho}$ la gaze.

---

*) Pentru a arăta că, într'o mişcare *nepermanentă* a unui lichid, $\frac{p}{\rho}$ nu poate reprezenta un potenţial al unităţii de masă, datorită câmpului presiunii, să considerăm fenomenul nepermanent (din punctul de vedere al presiunei) limită (repaus) al comprimării unei mase de apă într'o presă hidraulică. In hipoteza că apa ar fi incompresibilă, energia inmagazinată prin compresiune este nulă, pe când p poate lua orice valoare arbitrară. In cazul fluidelor elastice iarăşi $\int \frac{dp}{\rho}$ nu poate reprezenta un potenţial decât dacă $p = f(\rho)$, ceace în particular este totdeauna cazul, dacă mişcarea firului este permanentă, fiindcă atât p cât şi ρ sunt atunci funcţii de s, deci $p = f(\rho)$.

Expresia unită:

$$U+\int \frac{dp}{\rho} \quad \textit{în cazul gazelor}$$

sau

$$U+\frac{p}{\rho} \quad \textit{în cazul lichidelor,}$$

având în fiecare punct al fluidului o anumită valoare (cu aproximația unei constante), poate fi privită drept potențial al *câmpului rezultant*, în care masa unitară s'ar mișca liberă; acest câmp este format din suprapunerea câmpului invariabil al forței masice (de obiceiu gravitațiunea) cu câmpul permanent, deci deasemenea invariabil, al forței elastice. Așa dar, numai în mișcarea permanentă avem un potențial al câmpului presiunilor pentru a putea exprima că: descreșterea potențialului total (al gravității și presiunii) dealungul unei traiectorii este egală cu creșterea energiei cinetice.

Mai este de notat că, în teorema lui *Bernoulli* este vorba numai de o formă restrânsă a principiului conservării energiei, în presupunerea că nu avem și alte categorii de energie (de ex. lucru mecanic util al fluidului prin forța de contact cu o paletă mobilă, lucrul degradat sub formă de căldură al forțelor de viscozitate, frecări, etc, forțe, exercitate la suprafața particulei considerate, de care s'a făcut aci abstracție).

In cadrul de aplicabilitate, astfel precizat (fără lucru mecanic util și fără pierderi de energie), a teoremei lui *Bernoulli*, vedem că, de câte ori o moleculă *se scoboară* pe traectorie sub aceaiași presiune sau *trece orizontal* dela o presiune mai mare la alta mai mică (fig. 69) sau, mai general, de câte ori ea trece dela o valoare mai mare a potențialului rezultant la alta mai mică, molecula este *accelerată* și vice-versa. Dacă vitesa nu variază dealungul traectoriei, cum este cazul curentului cu debit constant din o conductă cilindrică(oricare ar fi traseul acesteia), aceasta însemnează că schimbul se face numai între cele două feluri de energie potențială; fluidul ajungând în regiunile inferioare (cu U mai mic) va întâlni presiuni mai mari și invers, exact după felul repartiției presiunii în Hidrostatică (care, reprezentând cazul limită $v = 0$, intră în același raționament).

In cazul lichidelor, potențialul *unității de greutate* primind forma simplă $\frac{p}{\varpi}$, avem drept sarcină potențială $z+\frac{p}{\varpi}$, compusă din sarcina z, datorită câmpului greutății față de planul orizontal de referință, și sarcina $\frac{p}{\varpi}$, datorită presiunii (față de zero absolut sau față de presiunea atmosferică), iar drept sarcină cinetică $\frac{v^2}{2g}$. Suma acestor sarcini dealungul firului, adică sarcina totală, fiind constantă, avem *pentru fiecare fir* un plan de *sarcină totală* caracteristic.

In cazul unei mișcări potențiale, sarcina totală este aceiași în toate punctele, spațiul ocupat de fluid fiind caracterizat printr'un singur plan de sarcină, așezat la înălțimea H deasupra planului de referință.

Pentru un punct oarecare, nivelul sarcinei totale se găsește deasupra nivelului piezometric sau al sarcinei statice (în general variabilă dealungul unui fir) cu înălțimea reprezentativă a vitesei. Când $v=0$, nivelul piezometric referitor la orice punct cade în

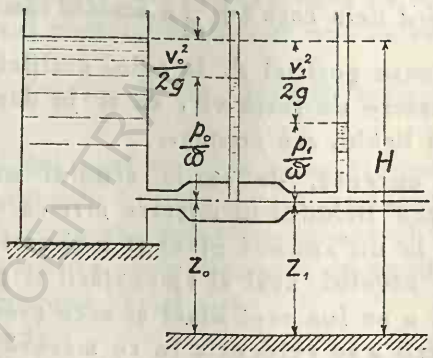


Fig. 69

planul sarcinei totale (identică în acest caz cu cea statică), care coincide astfel cu planul piezometric, comun întregii mase. Regăsim, așa dar, legea hidrostatică:

$$z+\frac{p}{\varpi}=c^{tă}$$

cu o singură constantă pentru întreaga masă, ca și în cazul mișcărilor potențiale, în care categorie intră și repaosul, ca o stare

limită. La o mișcare permanentă foarte lentă, adică cu o vitesă neglijabilă, sau la o mișcare cu vitesă constantă, cum $z+\frac{p}{\varpi}$ va fi aproximativ, respectiv riguros, constant, va exista deasemenea un singur plan de sarcină.

Așa dar, dacă $v \cong 0$ planul piezometric va coincide aproximativ cu acest plan de sarcină, iar în cazul $v=$ const el va fi cu $\frac{v^2}{2g}$ mai jos. In ambele cazuri existența unui plan piezometric unic pentru întreaga sarcină arată, că repartiția presiuni ascultă de legea hidrostatică.

Câmpul suprapus sau rezultant al gravității și forțelor elastice dintr'un lichid se poate privi ca fiind câmpul unei gravități fictive, variabile în spațiu, în care potențialul (pentru unitatea de greutate) ar fi $z+\frac{p}{\varpi}$ în loc de z. Molecula lichidă, presupusă că se mișcă liberă, ar veni în diferitele momente, când întâlnește cotele reale z, să ocupe altitudinele sau cotele fictive $z+\frac{p}{\varpi}$. Căzând *liberă* dela cota $z+\frac{p}{\varpi}$ a acestui câmp, astfel conformat, corespunzătoare poziției A, la cota poziției B, molecula ar primi aceiași creștere de forță vie, ca și în deplasarea ei reală AB pe axa firului lichid, *sub presiune*.

In practica curentă, de ex. la studiul unei amenajări de cădere de apă, dacă lichidul în mișcare *permanentă* se poate scoborî numai până la un anumit nivel și o anumită presiune care intervine (de ex. nivelul aval al amenajării și presiunea atmosferică), se preferă a se lua acel nivel și acea presiune ca termeni de referință, pentru a se evidenția în ce măsură energia se poate la nevoie utiliza, prin scoborârea moleculelor lichide la acel nivel minim, concomitent cu reducerea presiunii la acea presiune finală. Cum în general pentru întreaga amenajare intervine atât în A cât și în B presiunea atmosferică, se ia în considerație numai diferența de nivel între A și B.

Deducția teoremei lui Bernoulli din aceea a forțelor vii. Ecuația lui *Bernoulli* fiind fundamentală în Hidraulică, să căutăm a o stabili și prin teorema forțelor vii, având în vedere echivalența ei cu această teoremă.

In acest scop să luăm mai întâi cazul unui fir *lichid* (fig. 79).

Să considerăm o porţiune a lui în două poziţiuni a_0, a_1, b_1, b_0 şi c_0, c_1, d_1, d_0, în momentele t şi $t+dt$. Cum *din cauza permanenţei* mişcării partea comună rămâne neschimbată, vom avea în primul rând egalitatea maselor:

$$\rho_0 v_0 \Omega_0 dt = \rho_1 v_1 \Omega_1 dt = m dt,$$

unde m este debitul de masă prin oricare din secţiuni; aceasta revine la

$$\rho v \Omega = const,$$

ceea ce nu este altceva decât ecuaţia de continuitate (37.1). Creşterea jumătăţii forţei vii se reduce la

$$\frac{1}{2} m\, dt(v_1^2 - v_0^2),$$

adică la creşterea energiei cinetice a masei mdt din volumul $a_0 c_0 d_0 b_0$, socotită transportată (drept rezultat final) în $a_1 c_1 d_1 b_1$.

Lucrul gravităţii (câmp conservativ), depinzând numai de starea iniţială şi cea finală, se reduce deasemenea la acela efectuat la scoborârea masei mdt din $a_0 c_0 d_0 b_0$ în $a_1 c_1 d_1 b_1$.

In fine, lucrul presiunilor $p_0\Omega_0$ şi $-p_1\Omega_1$ este

$$p_0\Omega_0 v_0\, dt \equiv p_0 \frac{m}{\rho} dt \quad \text{şi} \quad -p_1\Omega_1 dt \equiv -p_1 \frac{m}{\rho} dt$$

şi se poate considera egal cu acela ce ar efectua câmpul presiunilor asupra masei mdt, în timpul transportului dela $a_0 b_0 d_0 c_0$ la $a_1 b_1 d_1 c_1$ cu străbaterea câmpului permanent al presiunilor intermediare, ceeace arată că şi câmpul acestor presiuni este conservativ, după cum s'a menţionat şi mai sus.

Vom avea deci:

$$\frac{1}{2} mdt(v_1^2 - v_0^2) = (p_0 - p_1) \frac{mdt}{\rho} + mdtg(z_0 - z_1).$$

Impărţind cu mdt şi scriind:

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 = \frac{v_0^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} + gz_0 = c^{te}, \qquad (37)$$

am obţinut teorema lui *Bernoulli;* termenii din membrul întâiu se vor referi la unitatea de masă prin secţiunea $a_1 b_1$, iar cei din al doilea la unitatea de masă prin secţiunea $a_0 b_0$ (independent de

momentul considerat, putându-se da interpretarea, ca și cum ar fi vorba de transportul masei unitare dela prima secțiune la cea-laltă, restul sistemului nesuportând nici o schimbare).

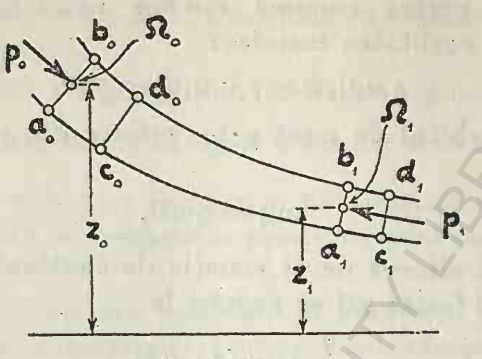


Fig. 70

In cazul gazelor vom repeta raționamentul de mai sus, considerând pentru simplitate fenomenul petrecut în unitatea de timp (presupusă cât de mică, în locul lui dt), eliminându-se astfel dela început dt din formulă. Lucrul efectuat aci de câmpurile forței exterioare și de presiune, trebue echivalat nu numai cu creșterea jumătății forței vii, adică a energiei cinetice, ci la aceasta mai trebue adăogată creșterea energiei absorbite intern de masa m, prin lucrul elastic de compresiune (pozitiv, sau de dilatare: negativ) la trecerea masei dela poziția *0* la poziția *1*. Trebue ținut seamă de faptul, exprimat mai sus, că în tot parcursul evoluția gazului se face după o lege $p=f(\rho)$, în care caz acest lucru depinde exclusiv de stările inițială și finală, exact ca la evoluția politropică, care este un caz particular al evoluției $p=f(\rho)$. Vom scrie deci:

$$\frac{1}{2}m(v_1^2-v_0^2)-m\int_{\rho_0}^{\rho_1}p\,d\left(\frac{1}{2\rho}\right)=\left(\frac{p_0}{\rho_0}-\frac{p_1}{\rho_0}\right)m+mg(z_0-z_1), \quad (38)$$

unde, prin integrare prin părți, putem face înlocuirea:

$$-\int_{\rho_0}^{\rho_1}p\,d\left(\frac{1}{\rho}\right)=-\frac{p_1}{\rho_1}+\frac{p_0}{\rho_0}+\int_{\rho_0}^{\rho_1}\frac{dp}{\rho}$$

găsind:

$$\frac{1}{2}m(v_1^2-v_0^2)=-m\int_{\rho_0}^{\rho_1}\frac{dp}{\rho}+mg(z_0-z_1)$$

sau:

$$\frac{dv^2}{2} = -\frac{dp}{\rho} - gdz,$$

care este forma diferenţială a ecuaţiei lui *Bernoulli*.

Aci, bine înţeles, am făcut abstracţie de forţele de viscozitate. In prezenţa acestor forţe neelastice, care s'ar exercita pe mantaua firului (cele de pe secţiuni sunt neglijabile faţă de p elastic înmulţit cu aria secţiunei, şi faţă chiar de eforturile tangenţiale de viscozitate de pe manta, înmulţite cu o arie infinit de mare faţă de aceea a secţiunei) şi prin acţiunea cărora se produce o degradare a energiei mecanice în căldură, ecuaţia forţelor vii (sau teorema lui *Bernoulli*) va trebui completată cu lucrul viscozităţei, exact cum, pentru gaze, am văzut că în ecuaţia (38) intră lucrul de compresiune efectuat, indiferent dacă eventual numai parte din el se transformă în energie elastică, iar restul în căldură.

Ecuaţia (38) va primi, aşa dar, fie în membrul întâi noul termen, hotărât pozitiv (lucrul frecărei, transformat în căldură), fie în membrul al doilea lucrul negativ al forţelor de viscozitate, exercitate de frontiera exterioară (mantaua firului).

Relevăm, aşa dar, că, în ecuaţia de energie (38) a mişcărei permanente nu poate intra nici un termen *termic*, ci numai lucrul *mecanic* de compresiune (p), respectiv al forţelor de viscozitate exercitate pe frontieră, lucru care, printr'un proces intern, care aici nu interesează calculul, se transformă în căldură.

9. Extinderea teoremei lui Bernoulli la o vână sau un curent fluid în mişcare permanentă, cu vitesa neuniform repartizată în secţiune. Ipoteza trenşelor şi corectarea ei la nevoie.

Ipoteza franşelor permite a scrie ecuaţia lui *Bernoulli* pentru firul mijlociu al unei vine sau curent într'o formă aplicabilă, cu suficientă exactitate, la ansamblul firelor care formează vâna sau curentul. Ipoteza menţionată constă în a admite, în conformitate şi cu menţinerea valorei debitului (acelaşi prin orice secţiune din cauza permanenţei mişcării), că vitesele individuale din o secţiune ca $A_0 B_0$ sau $A_1 B_1$, (fig. 71) se pot înlocui prin vitesa medie din secţiune. Aceasta echivalează cu ipoteza că, după un timp dt

moleculele din secţiunile $A_0 B_0$ şi $A_1 B_1$ s'ar găsi în secţiunile, deasemenea plane, $C_0 D_0$ şi $C_1 D_1$, în presupunerea că firele ar fi aproape paralele iar vâna sau curentul ar fi rectiliniu sau uşor curbiliniu. Scurgerea s'ar face astfel prin *franşe* (ca $A_0 C_0 D_0 B_0$,

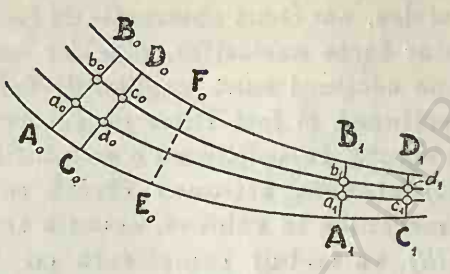


Fig 71

$C_0 E_0 F_0 D_0$, etc) succesive. In asemenea condiţiuni, adică prin admiterea unei repartiţii uniforme a vitesei în secţiune, eroarea comisă în aplicarea teoremelor mecanicei nu este în general sensibilă, aproximaţia fiind evident cu atât mai mare, cu cât în realitate repartiţia vitesei în secţiune s'ar depărta mai puţin de cea uniformă.

Dacă însă forma vinei se depărtează de schema de mai sus, putem în anumite cazuri, când cunoaştem exact sau aproximativ repartiţia vitesei în secţiune, să ne apropiem sensibil de realitate prin introducerea unor coeficienţi corectivi anume calculaţi, în general însă admişi a priori cu aproximaţie.

Drept vitesă comună într'o secţiune se impune a se lua vitesa medie u, deoarece aceasta prin definiţie conduce la o valoare a debitului de masă prin acea secţiune, egală cu cea reală,

Vom avea, aşa dar, mai întâiu pentru *debitul de masă* după ipoteza franşelor:

$$M_0 \equiv u \int^{\Omega} \rho d\Omega,$$

după evaluarea directă:

$$M \equiv \int^{\Omega} \rho v d\Omega,$$

Cum însă conform definiţiunei însăşi a lui u avem

$$u \int^{\Omega} \rho d\Omega \equiv \int^{\Omega} \rho v d\Omega,$$

rezultă

$$M \equiv M_0. \tag{39}$$

In consecinţă, dacă punem

$$v \equiv u + \varepsilon,$$

rezultă relaţia:

$$\int^{\Omega} \rho \varepsilon d\Omega \equiv 0. \tag{40}$$

Să arătăm că ipoteza tranşelor, deşi conservă valoarea debitului, împrejurare dealtfel care legitimează utilizarea ipotezei, conduce în schimb, pentru *cantitatea de mişcare şi forţa vie a masei ce străbate o secţiune în unitatea de timp*, la valori:

$$S_0 \equiv u^2 \int^{\Omega} \rho d\Omega \quad \text{şi} \quad 2T_0 \equiv u^3 \int^{\Omega} \rho d\Omega, \tag{41}$$

inferioare celor reale S şi $2T$.

Intradevăr, să evaluăm mai întâiu cantitatea S. Debitul de masă prin $d\Omega$ fiind $\rho v d\Omega$, cantitatea de mişcare este: $\rho v^2 d\Omega$.

Ţinând seama de (40) avem:

$$S \equiv \int^{\Omega} \rho v^2 d\Omega \equiv \int^{\Omega} \rho (u+\varepsilon)^2 d\Omega \equiv u^2 \int^{\Omega} \rho d\Omega + \int^{\Omega} \rho \varepsilon^2 d\Omega. \tag{42}$$

Să trecem la valoarea lui T. Masa elementară în unitatea de timp $\rho v d\Omega$ posedă o energie cinetică $\frac{1}{2} \rho v^3 d\Omega$. Avem, ţinând seamă iarăşi de (40):

$$2T \equiv \int^{\Omega} \rho (u+\varepsilon)^3 d\Omega \equiv u^3 \int^{\Omega} \rho d\Omega + 3u \int^{\Omega} \rho \varepsilon^2 d\Omega + \int^{\Omega} \rho \varepsilon^3 d\Omega.$$

Integrala $\int^{\Omega} \rho \varepsilon^3 d\Omega$ este în general neglijabilă, fiindcă pe de o parte este de ordinul al treilea al lui ε, iar pe de altă parte, elementele sunt unele pozitive iar altele negative, putându-se admite că au o medie nulă.

Reducând, avem

$$2T = u^3 \int^{\Omega} \rho d\Omega + 3u \int^{\Omega} \rho \varepsilon^2 d\Omega. \tag{43}$$

Dacă punem

$$\eta_1 = \int^{\Omega} \rho \varepsilon^2 d\Omega,$$

relaţiunile (42) şi (43) se vor scrie:

$$S = S_0 + \eta \qquad 2T = 2T_0 + 3u\eta_1.$$

Raporturile dintre cantităţile reale şi cele după ipoteza tranşelor şi anume: pentru debitul de masă, cantitatea de mişcare şi energia cinetică a acelui debit, sunt respectiv:

$$\frac{M}{M_0} \equiv 1, \quad \frac{S}{S_0} = 1 + \frac{\eta_1}{S_0}, \quad \frac{T}{T_0} = 1 + \frac{3u\eta}{2T_0} \equiv 1 + \frac{3\eta_1}{S_0}, \qquad (44)$$

căci

$$S_0 u \equiv 2T_0.$$

Deducem

$$\frac{S - S_0}{S_0} = \frac{1}{3} \frac{T - T_0}{T_0}. \qquad (44.1)$$

Cum η este pozitiv, vom avea:

$$S > S_0 \qquad T > T_0,$$

iar ultima relaţie arată că, în ipoteza tranşelor, abaterea relativă în minus faţă de realitate pentru energia cinetică este de trei ori mai mare de cât pentru cantitatea de mişcare. Punând

$$T \equiv \alpha T_0 \qquad \text{şi} \qquad S \equiv \alpha' S_0$$

avem

$$\alpha - 1 = 3(\alpha' - 1). \qquad (44.2)$$

Coeficientul α (şi α') depinde de gradul de neuniformitate în repartiţia lui v în secţiune. Această neuniformitate poate proveni fie din repartiţia neuniformă a presiunei, datorită unei anumite cauze (de ex. la o vână curbilinie presiunea creşte înspre exteriorul curburei, antrenând o micşorare concomitentă a vitesei), fie din cauza frecărilor. Astfel, la fluidele naturale în regim laminar, neuniformitatea în reparţiţia vitesei în secţiune stă în legătură cu eforturile de viscozitate, căci acestea, începând cu frecarea la perete unde $v = 0$, depind tocmai de variaţia vitesei.

In regimul turbulent intervine, ca funcţie a viscozităţei, *turbulenţa*, care mai depinde de forma şi mărimea secţiunii de scurgere şi mai ales de natura pereţilor.

Valoarea exactă a lui α în secţiune

$$\alpha \equiv \frac{T}{T_0} \equiv \frac{\int^{\Omega} \rho v^3 d\Omega}{u^3 \int^{\Omega} \rho d\Omega}$$

sau, pentru $\rho =$ constant,

$$\alpha \equiv \frac{\int^{\Omega} v^3 d\Omega}{u^3 \Omega}$$

se poate calcula, dacă cunoaştem legea de repartiţie a lui v.

Astfel, să considerăm un curent lichid (într'un canal) de secţiune dreptunghiulară foarte largă şi de înălţime h şi să luăm axa orizontală x pe baza secţiunei, direcţia axei y fiind verticală acendentă (fig. 72). Vom presupune că vitesele în secţiune sunt egale pe orice dreaptă orizontală (fenomen plan, cu planul director vertical prin axa canalului) ele variind numai pe verticală. Vitesa va fi în acest caz funcţie numai de ordonata y, ultima expresie putându-se scrie:

$$\alpha = \frac{\int_0^h v^3 dy}{u^3 h} = \frac{1}{h} \int_0^h \left(\frac{v}{u}\right)^3 dy . \qquad (45)$$

Dacă repartiţia vitesei pe verticală se face după un triunghiu, este uşor de văzut că $\alpha = 2$.

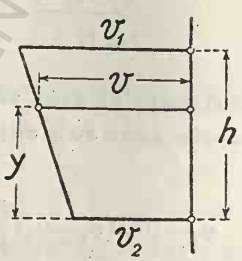


Fig. 72

Dacă ea se face după un trapez cu valorile extreme v_1 şi v_2 (fig. 72), printr'un calcul simplu se obţine:

$$\alpha = 2\left(1 - \frac{2v_1 v_2}{(v_1 + v_2)^2}\right) . \qquad (45.1)$$

BU IAŞI / CENTRALA UNIVERSITARĂ / LIBRARY

După această formulă α, pentru diferitele raporturi între valorile extreme ale vitesei:

$\frac{v_1}{v_0}=$	1	este	1
„	1,25	„	1,01
„	1,5	„	1,04
„	2	„	1,11
„	5	„	1,44
„	10	„	1,67

∞ (repartiție triunghiulară) 2.

Dacă repartiția vitesele pe verticala z este după o parabolă cu axa orizontală și cu vârful P pe linia de apă, unde vitesa v_1 este maximă (fig. 73), cum se întâmplă aproximativ în canalele foarte

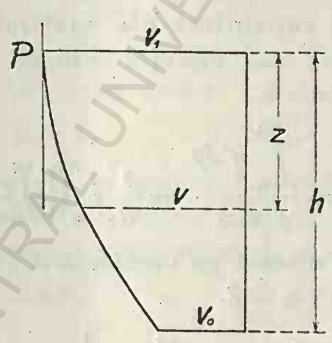


Fig. 73

largi (în cari totuși maximum și deci vârful parabolei, din cauza frecărei cu aerul, se găsește ceva sub suprafața liberă), adică după legea

$$v_1 - v = (v_1 - v_0)\frac{z^2}{h^2},$$

v_0 fiind vitesa la fund, obținem:

$$\alpha = \frac{27}{35}\cdot\frac{16+8\left(\frac{v_0}{v_1}\right)+6\left(\frac{v_0}{v_1}\right)^2+5\left(\frac{v_0}{v_1}\right)^3}{\left(2+\frac{v_0}{v_1}\right)^3}. \qquad (45.2)$$

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

După această formulă avem următorul tablou:

$\frac{v_1}{v_0}=1$	$\alpha=1$
„ 1,25	„ 1,01
„ 1,50	„ 1,04
„ 2	„ 1,09
„ 5	„ 1,31
„ ∞	„ 1,54.

Din cele ce preced rezultă că, dacă neuniformitatea vitesei pe verticală este de cel mult 25% (fie după legea trapezoidală, fie după legea parabolică), putem în practică evalua energia cinetică pe baza vitesei medii u, adică după ipoteza tranşelor, fără a face o eroare sensibilă. O neuniformitate de 50% dă în aceleaşi condiţiuni o valoare cu 4% mai mică. Pentru un calcul mai exact va trebui, aşa dar, înmulţită energia cinetică, astfel evaluată, cu $\alpha=1{,}04$. Dacă neuniformitatea este de 100% (adică 1:2 între valorile extreme), abaterea relativă este de 11% în cazul legei trapezoidale şi de 9% în cazul legii parabolice, astfel că, în medie, va trebui să înmulţim pe T_0 cu $\alpha=1{,}1$ pentru a obţine pe T.

La cursurile de apă naturale, în general avem $\alpha<1{,}1$ şi se lua altădată $\alpha=1{,}1$. Totuşi α poate întrece cu mult această cifră în cazul pereţilor neregulaţi, cari provoacă mari neuniformităţi, în care caz este preferabil a se deduce α experimental.

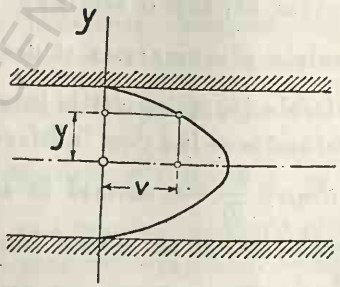


Fig. 74. Tub de rază r.

La fluidele naturale, în regim de mişcare laminar, de ex. în cazul curentului printr'un tub de secţiune circulară de rază r (fig. 74), repartiţia vitezelor în secţiunea dreaptă se face, precum se

va arăta în altă parte, după un paraboloid de rotaţie în jurul axei tubului luat ca axă, şi anume după legea

$$v = A(r^2 - y^2),$$

cu media

$$u = \frac{1}{2} Ar^2.$$

In cazul acesta se obţine

$$\alpha = \frac{1}{\Omega} \int_0^r \left(\frac{y}{u}\right)^3 d\Omega = \frac{16}{r^2} \int_0^r \frac{(r^2 - y^2)^3}{r^6} y dy = 2. \quad (45.3)$$

Din ceeace precede rezultă că, dacă aplicăm la toate firele unui curent rectiliniu sau uşor curbiliniu (fig. 71) teorema lui *Bernoulli*, aşa cum aceasta a fost dedusă din teorema forţelor vii pentru un fir în timpul $\delta t = 1$, şi anume în cazul lichidelor:

$$m \frac{v^2}{2} + mg\left(\frac{p}{\varpi} + z\right) = const$$

(cu $m = \rho v d\Omega$), şi adunăm, împărţind apoi rezultatul adunării cu debitul de masă total, găsim aceeaşi relaţie între valorile medii (scriind primul termen cu ajutorul vitesei medii şi a coeficientului corectiv α):

$$\frac{\alpha u^2}{2} + g\left(\frac{p}{\varpi} + z\right) = const. \quad (46)$$

Pentru justificarea menţinerei formei la termenul al doilea cu parantează, notăm că, într'o secţiune transversală a unui curent *rectiliniu*, nivelele piezometrice şi deci înălţimile $\frac{p}{\varpi} + z$ sunt aceleaşi pt. toate firele (vezi repartiţia într'un curent rectiliniu sau uşor curbiliniu), putându-se lua deci indiferent la oricare din fire. Dacă vâna este *curbilinie*, $\frac{p}{\varpi} + z$ variază în secţiune, descrescând în spre interiorul curburei, şi se poate lua aproximativ, drept medie pe secţiune, $\frac{p}{\varpi} + z$ din axă, ceeace arată că, aplicarea teoremei lui *Bernoulli* în felul arătat mai sus cere, în special, ca firele să fie paralele sau quazi-paralele, ele putând fi şi curbilinii, în care caz înălţimea piezometrică se va lua la firul mijlociu, pentru a reprezenta mai bine media.

In cazul unui curent rectiliniu gazos avem un rezultat analog

cu diferența că, în loc de $\left(z+\frac{p}{\varpi}\right)$ constant în secțiune, avem $z+\int\frac{dp}{\varpi}=const$ (de asemenea ca în Hidrostatică).

Această aplicare (la nevoe cu coeficientul corectiv α) a teoremei lui *Bernoulli* la firul mijlociu cu ajutorul vitesei medii u, pentru a avea și la un curent de secțiune mai mare relația energiei, raportată la unitatea de greutate, constituie *extensiunea numitei teoreme, dela fir la o vână sau un curent.*

10. Considerațiuni asupra măsurărei presiunei și vitesei într'un curent fluid.

Dacă un curent cu vitesa uniformă $\overline{v}$ întâlnește un obstacol, am văzut că la *prora* acestuia se formează un punct critic (în general un al doilea se formează la *pupă*), în care firul respectiv (*filon*) este stăvilit, cu anularea vitesei și frângerea direcției în toate sensurile, spre a înconjura obstacolul.

Ecuația lui *Bernoulli*, aplicată filonului între un punct al său cu presiunea p_0, în mediul neturburat prin obstacol, și punctul critic cu presiunea p_1, în presupunerea că cele două puncte sunt la aceiași cotă (același z), dă relația:

$$p_1=p_0+\rho\frac{v^2}{2}\,.$$

Aceeași relație se obține și dacă corpul se mișcă cu vitesa $\overline{U}=-\overline{v}$ într'un fluid în repaus, deoarece, față de un sistem de referință antrenat de corp, avem un curent identic ca în cazul precedent, adică cu vitesa $\overline{v}$, producându-se și atunci o suprapresiune $=\rho\frac{v^2}{2}$.

Această suprapresiune $p_1-p_0=\rho\frac{v^2}{2}$ se numește *presiune de stăvilire* (*Staudruck*) sau *presiune datorită vitesei* sau *presiune dinamică*. Măsurarea ei procură o metodă de calcul al vitesei v.

Astfel, în ambele cazuri menționate, dacă obstacolul are la punctul critic o gaură, presiunea p_1 se va exercita și în interior, putându-se transmite static la un aparat de măsură. Pentru a măsura, așa dar, presiunea $p_1=p+\rho\frac{v^2}{2}$ într'un punct oarecare al unui curent, punct unde domnește presiunea p iar vitesa este v,

putem implânta, drept *obstacol*, un tub cu capătul său închis rotunjit, având numai un mic orificiu S în axă, îndreptată în direcția firului respectiv (fig. 78). Interiorul acestui tub (cotit la pupă) se pune în legătură cu aparatul de măsură (piezometru), împreună cu care constitue așa-numitul tub *Pitot*, după numele inventatorului acestei metode de măsură a presiunei p_1, în scopul de a determina pe v. Presiunea p se numește *statică*, iar presiunea p_1 astfel obținută se numește *presiune totală*, ea fiind suma presiunei statice și a celei dinamice.

Ecuația lui *Bernoulli* dă cu această notație:

$$\frac{p}{\rho}+gz+\frac{v^2}{2}\equiv\frac{p_1}{\rho}+gz=const.$$

ceeace ne arată că presiunea totală p_1 ascultă de legea Hidrostatică.

Pentru măsurarea presiunei statice p, de care de asemenea avem nevoe la determinarea lui v, se implântează o *sondă* (tub analog însă fără orificiu în axă, având în schimb orificii pe pereții laterali), prin orificiile laterale ale căreia se transmite în interior numai presiunea statică, întrucât firele ce alunecă pe acele orificii nu-și modifică vitesa, iar presiunea statică p este foarte puțin alterată prin implântarea sondei. Se vede în orice caz că măsurarea exactă a lui p prezintă mai mare dificultate decât aceea a lui p_1. Tubul *Pitot* și sonda se unesc într'un singur aparat (fig. 78), pe care îl vom numi tot tub *Pitot* și care ne dă direct diferența p_1-p, ca un piezometru diferențial.

La fluidele cu ρ constant presiunea p se poate înlocui prin o presiune fictivă p', care cuprinde și termenul ϖz din ecuația lui *Bernoulli*, în cazul când acest termen, prin poziția planului orizontal de referință și datorită faptului că ϖ este mic (gaze) sau p este mare, devine de mică importanță față de p. Vom scri atunci ecuația lui *Bernoulli*

$$p+\varpi z+\rho\frac{v^2}{2}\equiv p'+\rho\frac{v^2}{2}=const.$$

Evident că această presiune p', care nu diferă mult de p, este dată cu aproximația unei constante, ce depinde de poziția planului de referință. Relația din urmă arată că p' se repartizează ca în absența gravitațiuni, astfel că z al punctului nu intervine în valoarea acestei presiuni, care variază numai ca un comple-

ment al termenului $\rho\frac{v^2}{2}$, cu care dă o sumă constantă pe fir (sau în întreaga masă în cazul mișcărilor potențiale).

Dacă într'un curent lichid sau gazos se măsoară presiunea cu ajutorul unei sonde mobile, legată printr'un tub *flexibil* cu un aparat exterior fix, indicația aparatului, adică nivelul piezometric pentru toate punctele ale unei secțiuni transversale va fi același, întrucât într'o asemenea secțiune avem legea hidrostatică, adică $z+\frac{p}{\varpi}=const$ și deci și $\frac{p'}{\varpi}\equiv z+\frac{p}{\varpi}=const$, independent de vitesa locală și de poziția planului orizontal de referință. Așa dar, indicația într'o secție a unui asemenea aparat de măsură dă presiunea fictivă menționată, corespunzătoare planului de referință ales pentru aceste măsurători.

Aplicația Nr. 77. *A se studia repartiția vitesei și presiunei într'o cameră spirală (vezi fig. 75), fluidul fiind cu* ρ *const.*

Răspuns. Ecuația a doua (21) a unui curent curbiliniu, scrisă pentru cazul când planul osculator ar fi orizontal (adică $F_n=0$), spre a face abstracție de influența gravitației (sau chiar în câmpul gravitațiunei, însă cu presiunea p', stabilită mai sus, dar pe care o vom însemna aci tot cu p):

$$\frac{v^2}{r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}$$

exprimă repartiția presiunei după normala principală, constituind o relație între elementele p și v ale firelor vecine la un curent curbiliniu,

Dacă mișcarea este *potențială* și totodată *permanentă*, ecuația lui *Bernoulli*, care în aceleași condiții (de ex. cu planul osculator orizontal) devine:

$$\frac{v^2}{2}+\frac{p}{\rho}=const,$$

cu aceiași constantă în întreaga masă, ne procură o a doua expresie a lui $-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}\equiv\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}$ (înlocuind notația $-\overline{n}$ prin $\overline{r}$, vectorul $\overline{r}$ având-și originea în centrul de curbură), prin derivare în raport cu r:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}=-v\frac{\partial v}{\partial r}$$

astfel că, din comparația cu relația precedentă, rezultă în domeniul unui punct:

$$\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{v}{r}=0,$$

adică în direcția r:

$$v=\frac{C}{r}.$$

Mișcarea într'o cameră *spirală* (fig. 75), la care se presupune că toate firele ce încep în canalul de intrare de lărgime relativ mică, au aci același v și sunt paralele (deci aceiași constantă pentru trinomul lui *Bernoulli*, deci mișcare potențială), este un exemplu de o asemenea mișcare, cu r aproximativ constant pentru

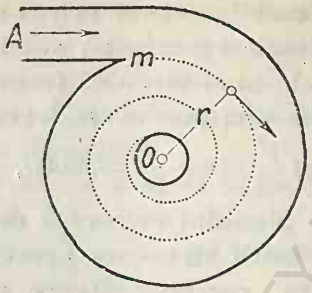


Fig. 75

diversele traiectorii sau fire, aproape circulare. Viteza crescând spre interiorul camerei, presiunea, care descrește după ecuația lui *Bernoulli*

$$p = const - \frac{\rho}{2}\frac{C^2}{r^2},$$

dacă p_1 este valoarea ei (minimă), dată la eșirea de rază r_1, poate căpăta la intrare o valoare cu atât mai mare, cu cât r_1 este mai mic, după relația:

$$p = p_1 + \rho\frac{C^2}{2}\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r^2}\right).$$

In exemplul acesta se realizează aproximativ mișcarea unui vârtej, finit în secțiune (la un vârtej firele sunt de fapt cercuri iar nu spirale, acestea și aci apropiindu-se de cercuri, dacă lățimea canalului A este relativ mică), fără ca fluidul să fie neapărat viscos, cum ar fi necesar dacă vârtejul ar trebui produs prin rotația unui nucleu central. Intr'un fluid viscos se poate întradevăr produce un asemenea vârtej, prin învârtirea unui cilindru de rază r_1 cu vitesă unghiulară constantă, în care caz prin antrenarea succesivă a straturilor de fluid coaxiale se ajunge, după un timp teoretic infinit, la o mișcare permanentă, caracterizată prin distribuția de vitesă, arătată mai sus, în întregul spațiu (infinit).

Aplicația Nr. 78. *A se stabili repartiția presiunei pe corpurile, în formă de rotație, rezultate prin solidificarea suprafețelor de separație din aplicațiile* Nr. 49, 50 și 52.

Răspuns. Presiunea dealungul meridianei suprafețelor de rotație în chestiune (socotite rigide):

$$\psi_s = 0$$

se deduce (neglijând câmpul gravitațiunei) din vitesa v în fiecare punct al meridianei, presiunea la ∞ și viteza U a curentului de translație, aplicând teorema lui *Bernoulli*.

După menționata teoremă avem:

$$\frac{p}{\varpi}+\frac{v^2}{2g}=\frac{p_0}{\varpi}+\frac{U^2}{2g},$$

iar pentru suprapresiunea (față de p_0 dela ∞) în fiecare punct al suprafeței-frontieră:

$$\frac{p-p_0}{\varpi}=\frac{U^2-v^2}{2g}.$$

Presiunea de stăvilire la punctele critice, care reprezintă un maximum, este

$$\frac{p_S}{\varpi}=\frac{U^2}{2g}$$

și deci, raportând suprapresiunea în chestie la presiunea de stăvilire (care este maximă), găsim raportul

$$\frac{p-p_0}{p_S}=1-\frac{v^2}{U^2}.$$

1). Calculând pe v din formula $v=\sqrt{v_\rho^2+v_z^2}$, unde v_ρ și v_z rezultă din funcțiunile Φ și ψ din aplicația Nr. 49, găsim repartiția raportului suprapresiunei sau, dacă $p_0=0$, al presiunei, către presiunea de stăvilire p_S.

Curba de repartiție scade repede dela punctele critice, trece prin zero între aceste puncte și focare, devenind negativă (depresiune sau aspirație) în restul profilului, cu două maxime absolute, cari se pot calcula ușor (fig 76).

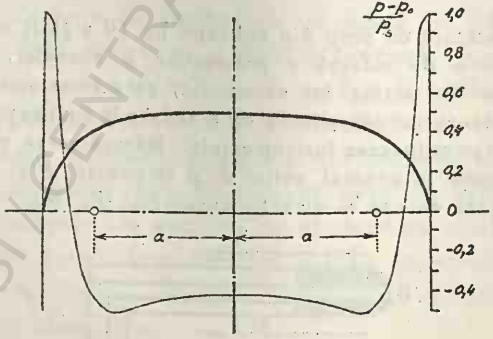


Fig. 76

In cazul sferei ($a=0$, *dubleu* sau *dipol*) cele trei valori extreme ale depresiunei vin în coincidență.

Se știe că rezultanta acestor presiuni este nulă (paradoxul lui *d'Alembert*), ceea ce se va demonstra mai târziu pentru orice corp în mișcare de translație, sau fix într'un curent paralel uniform, ce vine de la ∞ (cu U *const*).

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

2). Curba presiunei relative pe jumătatea de corp din aplicația Nr. 50 trece prin zero la punctul meridianei:

$$r=z_0\sqrt{\frac{3}{2}}, \quad z=\frac{z_0}{\sqrt{6}}$$

și are un minimum la punctul

$$r=z_0\sqrt{3}, \quad z=-\frac{z_0}{\sqrt{3}},$$

minimum egal cu (fig. 77)

$$\frac{p-p_0}{p_s}=-\frac{1}{3}.$$

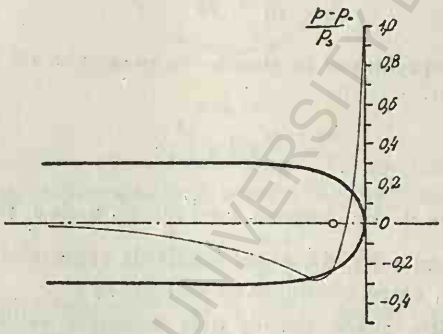


Fig. 77

Pentru valori crescânde de z, raportul în chestiune descrește, apropiindu-se asimptotic de zero.

Forma de jumătate de corp din aplicația Nr. 50 a găsit o întrebuințare interesantă la instrumentul de măsură a presiunilor și vitezelor, denumit mai sus *Tub Pilot* și anume la partea lui exterioară, care se numește *sondă*. Această întrebuințare se bazează pe necesitatea de a reduce la minimum perturbația adusă (prin turbulență) cu introducerea instrumentului. Măsurătoarea constă în observarea diferenței de presiune la punctul critic S și la punctul P al mantalei netezi a sondei, care se așează cu axa în direcția curentului (fig. 78).

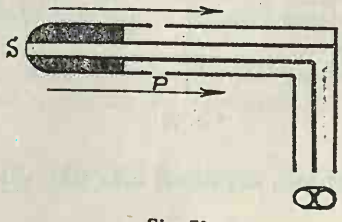


Fig. 78

La o distanță triplă a diametrului tubului (adică a grosimei jumătății de corp la infinit) depresiunea la perete se ridică numai la 2% din înălțimea $\frac{v^2}{2g}$ a vitesei.

Pentru a efectua observația, aparatul este perforat cu două canale ce încep în punctul critic S și în P, canale care, fiind curbate perpendicular pe axa cilindrului (fig. 78), se pun în legătură la celalt capăt cu un manometru diferențial. La alegerea potrivită a poziției P, diferența de presiune măsurată dă cu suficientă exactitate înălțimea de viteză $\left(\frac{v^2}{2g}\right)$ a curentului.

3) Repartiția calculată după metoda, descrisă mai sus, la o aeronavă (aplicația No. 52) este arătată în fig. 79.

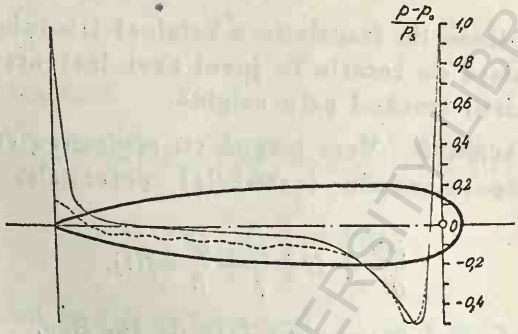


Fig. 79

11. Ecuațiile Hidrodinamicei, raportate la un triedru de referință antrenat.

In multe probleme este comod a întrebuința axe ortogonale de referință, *antrenate* de corpul ce se mișcă în fluid, în scop de a le conserva, față de corp, o poziție favorabil aleasă, în general simetrică, care permite stabilirea ușoară a funcției de viteză, ale cărei derivate parțiale în raport cu coordonatele respective procură componentele vitezelor absolute ale moleculelor.

Starea de mișcare sau de repaus este de altfel indiferentă pentru aceste derivate de spațiu, ca și pentru acelea ale potențialului de forță, cari dau componentele intensității câmpului forței exterioare, întru cât ele presupun constanța timpului, adică axele momentan fixe.

Derivata însă *în raport cu timpul* a unei funcțiuni nu are același înțeles și nici aceași expresie în cele două cazuri: în cazul triedrului de referință fix $Ox_1y_1z_1$, ea presupune permanența punctului (x_1,y_1,z_1) din spațiul absolut, adică constanța coordonatelor x_1, y_1, z_1, pe când în cazul triedrului mobil Ox,y,z (deși admis în coincidență momentană cu triedrul fix $Oxyz$), presupune permanența punctului (x, y, z), solidar cu triedul mobil, adică constanța coordonatelor x, y, z. Or, acest triedru se depla-

seazâ în unitatea de timp cu vitesa de antrenare $\bar{u}\,[u_x, u_y, u_z]$ a punctului (x, y, z), solidar cu sistemul antrenat. Această deplasare $\delta\bar{r} \equiv \bar{u}$ în $\delta t = 1$ are ca proecții pe axele triedrului $Oxyz$:

$$\begin{aligned} \delta x \equiv u_x &= C_x + \omega_y z - \omega_z y \\ \delta y \equiv u_y &= C_y + \omega_z x - \omega_x z \\ \delta z \equiv u_z &= C_y + \omega_x y - \omega_y x, \end{aligned} \tag{47}$$

unde $\bar{C}$ este vitesa de translație a originei triedului mobil, iar $\bar{\omega}$ vitesa unghiulară de rotație în jurul axei instantanee de rotație a acestui triedru, trecând prin origină.

Ecuația scalară. Vom începe cu revizuirea ecuației scalare a mișcărei nepermanente (variabile) potențiale, care pentru $\rho = const$ este

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + U + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = f(t), \tag{48}$$

valabilă numai când Φ este dat față de axe fixe.

Dasă Φ este dat față de axe antrenate, pentru a păstra derivatei lui parțiale în raport cu timpul același înțeles, adică cu permanența punctului (x_1, y_1, z_1), pe când $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ presupune acum permanența punctului (x, y, z), ceea ce cere coordonatelor x_1, y_1, z_1 creșterile $\delta y \equiv u_x$, $\delta y \equiv u_y$, $\delta z \equiv u_z$, trebue să scădem creșterile respective ale lui Φ, datorite acestor creșteri implicite ale lui x_1, y_1, z_1. Vom înlocui deci în (48) primul termen $(\delta t = 1)$ prin:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial x}\delta x - \frac{\partial \Phi}{\partial y}\delta y - \frac{\partial \Phi}{\partial z}\delta z,$$

scriind ecuația scalară (48) cu ajutorul lui (47):

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial \Phi}{\partial x}(C_x + \omega_y z - \omega_z z) - \frac{\partial \Phi}{\partial y}(C_y + \omega_z x - \omega_x z) \\ &- \frac{\partial \Phi}{\partial t}(C_z + \omega_x y - \omega_y x) + U + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = f(t). \end{aligned}$$

Aceasta se mai poate scrie:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \omega_x\left(y\frac{\partial \Phi}{\partial z} - z\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) - \omega_y\left(z\frac{\partial \Phi}{\partial x} - x\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) - \omega_z\left(x\frac{\partial \Phi}{\partial y} - y\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) \\ &- C_x v_x - C_y v_y - C_z v_z + \frac{v^2}{2} + U + \frac{p}{\rho} = f(t) \end{aligned} \tag{48,1}$$

Dacă introducem acum viteza auxiliară $\bar{q}=\bar{v}-\bar{C}$, adică viteza absolută din care s'a scăzut geometric numai viteza de translație $\bar{C}$ (a originei triedrului mobil), comună tuturor punctelor (x, y, z), și care satisface evident relația

$$q^2=(v_x-C_x)^2+(v_y-C_y)^2+(v_x-C_x)^2$$

sau

$$\frac{q^2}{2}-\frac{C^2}{2}=\frac{v^2}{2}-C_x v_x-C_y v_y-C_z v_z,$$

(48.1) se va putea scrie

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}-\omega_x\left(y\frac{\partial\Phi}{\partial z}-z\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)-\omega_y\left(z\frac{\partial\Phi}{\partial x}-x\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)-\omega_z\left(x\frac{\partial\Phi}{\partial y}-y\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)+U+\frac{p}{\rho}+\frac{q^2}{2}=F(t), \tag{49}$$

unde s'a înglobat în $F(t)$ și termenul $\frac{C^2}{2}$, care este evident funcție exclusivă de t.

Ecuațiile lui Euler. Să trecem mai întâi la expresiile elementelor cinematice, față de axele antrenate, pentru a introduce apoi pe acelea ale accelerațiilor în ecuațiile lui *Euler*.

Dacă numim $\bar{v}_r\,[v_{rx}, v_{ry}, v_{rz}]$ viteza *relativă* (față de axele antrenate), avem vitesele absolute $\bar{v}=\bar{v}_r+\bar{u}$ în proecție pe axele mobile, în funcție de coordonatele respective:

$$\left.\begin{aligned} v_x&=\frac{dx}{dt}+C_x+\omega_y z-\omega_z y\\ v_y&=\frac{dy}{dt}+C_y+\omega_z x-\omega_x z\\ v_z&=\frac{dz}{dt}+C_z+\omega_x y-\omega_y x \end{aligned}\right\}, \tag{50}$$

astfel că

$$\left.\begin{aligned} v_{rx}&=\frac{dx}{dt}=v_x-C_x-(\omega_y z-\omega_z y)\\ v_{ry}&=\frac{dy}{dt}=v_y-C_y-(\omega_z x-\omega_x z)\\ v_{rz}&=\frac{dz}{dt}=v_z-C_z-(\omega_x y-\omega_y x). \end{aligned}\right\} \tag{50.1}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

După un timp δt vitesele moleculei, paralel cu axele triedrului vor fi

$$v_x + \frac{dv_x}{dt}\delta t = v_x + \frac{\partial v_x}{\partial t}\delta t + \frac{\partial v_x}{\partial x}\delta x + \frac{\partial v_x}{\partial y}\delta y + \frac{\partial v_x}{\partial z}\delta z \text{ etc} \quad (52)$$

cu

$$\delta x = \frac{dx}{dt}\delta t$$

$$\delta y = \frac{dy}{dt}\delta t$$

$$\delta z = \frac{dz}{dt}\delta t,$$

de unde, expresia derivatelor substanțiale față de axele mobile:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x}v_{rx} + \frac{\partial v_x}{\partial y}v_{ry} + \frac{\partial v_x}{\partial z}v_{rz} \quad \text{etc.} \quad (53)$$

Pentru a găsi componentele acceleraţiei absolute faţă de aceleaşi axe, aplicăm metoda *odografului*. Dintr'un punct *fix* A, anume, ducem triedrul de referinţă $Ax'y'z'$, paralel cu cel mobil $Oxyz$, şi un vector $\overline{Am}$, echipolent cu vitesa $\bar{v}$ a moleculei M. Acceleraţia absolută $\bar{j}$ va fi evident egală cu vitesa *absolută* a punctului m, care va fi, în proecţie pe menţionatele axe, funcţie de x, y, z şi t, ca şi punctul M. Poziţia exactă a lui m va fi determinată, tratând ca mai sus în (50), în locul lui x, y, z (coordonatele moleculei), vitesele v_x, v_y, v_z, adică cordonatele punctului m, spre a găsi vitesele absolute ale lui $\bar{m}$ (adică acceleraţiile) în proecţie pe axele mobile (pentru cari $C = 0$) în funcţie de coordonatele lui respective:

$$\left.\begin{aligned} j_x &= \frac{dv_x}{dt} + \omega_y v_z - \omega_z v_y \\ j_y &= \frac{dv_y}{dt} + \omega_z v_x - \omega_x v_z \\ j_z &= \frac{dv_z}{dt} + \omega_x v_y - \omega_y v_x \end{aligned}\right\}, \quad (53)$$

BCU IAȘI ACADEMIA ROMÂNĂ UNIVERSITY LIBRARY

unde vom folosi expresiile din (53):

$$\left.\begin{aligned} j_x &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} v_{rx} + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_{ry} + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_{rz} + \omega_y v_z - \omega_z v_y \\ j_y &= \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial v_y}{\partial x} v_{rx} + \frac{\partial v_y}{\partial y} v_{ry} + \frac{\partial v_y}{\partial z} v_{rz} + \omega_z v_x - \omega_x v_z \\ j_z &= \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial x} v_{rx} + \frac{\partial v_z}{\partial y} v_{ry} + \frac{\partial v_z}{\partial z} v_{rz} + \omega_x v_y - \omega_y \omega_x \end{aligned}\right\}. \quad (54.1)$$

Ecuaţiile lui *Euler* se vor scrie atunci, în raport cu axele mobile:

$$F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \equiv -\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = j_x \text{ etc,} \quad (55)$$

unde U şi p se pot privi ca exprimate şi ele în raport cu axele mobile.

Ecuaţia dinamică scalară, dedusă din ecuaţiile lui Euler. Cu ajutorul ecuaţiilor (55), în care folosim (54.1) şi (50.1), unde $v_x - C_x = q_x$ etc, putem scrie ecuaţiile lui *Euler*:

$$F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x}[q_x - (\omega_y z - \omega_z y)] + \frac{\partial v_x}{\partial y}[q_y - (\omega_z x - \omega_x z)]$$

$$+ \frac{\partial v_x}{\partial z}[q_z - (\omega_x y - \omega_y x)] + \omega_y v_z - \omega_z v_y \text{ etc.} \quad (55.1)$$

Dacă înmulţim respectiv cu dx, dy, dz, găsim (ţinând seamă că $\frac{\partial C_x}{\partial x} = 0$ şi deci $\frac{\partial v_x}{\partial x} \equiv \frac{\partial q_x}{\partial x}$ etc):

$$F_x\,dx - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}dx = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\,\partial t}dx + \frac{\partial q_x}{\partial x} q_x\,dx + \frac{\partial q_x}{\partial y} q_y\,dx + \frac{\partial q_x}{\partial z} q_z\,dx$$

$$- \frac{\partial v_x}{\partial x}(\omega_y z - \omega_z y)\,dx - \frac{\partial v_x}{\partial y}(\omega_z x - \omega_x z) - dx - \frac{\partial v_x}{\partial z}\omega_x y - \omega_y)\,dx$$

$$+ (\omega_y v_z - \omega_z v_y)\,dx \text{ etc.} \quad (55.2)$$

Mişcarea fiind presupusă potenţială, avem $\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial x}$ etc şi, în consecinţă, $\frac{\partial q_x}{\partial y} = \frac{\partial q_y}{\partial x}$ etc.

ECU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Prin adunarea celor trei ecuații (55.2), simplificând, obținem

$$-dU-\frac{dp}{\rho}=d\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)+d\frac{q^2}{2}$$

$$-(\omega_y z-\omega_z y)\,dv_x-(\omega_z x-\omega_x z)\,dv_y-(\omega_x y-\omega_y x)\,dv_z$$
$$+(\omega_y v_z-\omega_z v_y)\,dx+(\omega_x v_z-\omega_x v_z)\,dy+(\omega_x v_y-\omega_y v_x)\,dz, \quad (56)$$

ultimii 6 termeni putându-se concentra în

$$-\omega_x\,d(yv_z-zv_y)-\omega_y\,d(zv_x-xv_z)-\omega_z\,d(xv_y-yv_x),$$

astfel că prin integrare obținem o relație echivalentă cu (49).

Este de notat, că (axele mobile fiind momentan în coincidență cu cele fixe) este indiferent de a avea pe U (sau pe p) exprimat în coordonate x_1, y_1, z_1 sau x, y, z. Intradevăr, cum trebuesă avem (scriind U_1 în primul caz)

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_1}=F_{x_1}\equiv F_x=\frac{\partial U}{\partial x}\ \text{etc},$$

integrând în raport cu spațiul (într'un anumit moment t) vom găsi $U_1(x_1, y_1, z_1)$ și $U(x.y.z)$ diferind între ele numai cu o funcție de t, care va putea intra în funcția arbitrară din membrul al doilea.

Așa dar, integrarea lui (56) va conduce exact la forma (49).

Ecuația de continuitate. Ecuația de continuitate generală, exprimată în sistemul lui *Euler*, se obține după un raționament identic ca și în cazul triedrului de referință fix, sub aceași formă

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\frac{dx}{dt}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho\frac{dy}{dt}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\frac{dz}{dt}\right)=0.$$

In caz de incompresibilitate ea se reduce la forma

$$\frac{\partial v_{rx}}{\partial x}+\frac{\partial v_{ry}}{\partial y}+\frac{\partial v_{rz}}{\partial z}=0.$$

Aplicația Nr. 79. La aplicația Nr. 42 am văzut că, la mișcarea unei sfere de rază a cu o viteză de translație $U(t)$, paralelă cu axa de referință, a cărei origină se află în centrul sferei, funcția de viteză față de *axe antrenate* în direcția $\overline{U}$ este

$$\Phi=-\frac{1}{2}U\frac{a^3}{r^2}\cos\theta.$$

Rezultă că, pe sferă, componenta normală (după normala exterioară sferei) a vitesei absolute a fluidului este

$$v_{na} = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right]_{r=a} = U \cos\theta,$$

iar componenta tangențială

$$v_{sa} = \left[\frac{\partial \Phi}{r \partial \theta}\right]_{r=a} = \frac{1}{2} U \sin\theta.$$

Pătratul resultantei va fi, așa dar,

$$v_a^2 = \frac{3}{4} U^2 \cos^2\theta + \frac{1}{4} U^2. \qquad (56)$$

Ecuația mișcărei nepermanente față de *axe fixe*, la care ar fi raportat Φ, va fi, în absența forței exterioare:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 = f(t), \qquad (57)$$

însă aci, Φ fiind dat în raport cu *axe antrenate*, forma acestei ecuații se modifică, aplicând ori care din următoarele două metode, expuse în esență mai sus:

1) Primul termen trebuind să reprezinte derivata parțială a lui Φ în raport cu t, exprimată în coordonatele x_1, y_1, z_1 (aci r_1, θ_1) față de axe fixe, adică cu menținerea acestor coordonate constante [iar nu a coordonatelor punctului (x,y,z), aci (r, θ), solidar cu sistemul mobil], va trebui să scădem din $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$, corespunzător lui (r, θ), creșterile lui Φ realizate prin creșterile $(\delta x_1 = u_x$, $\delta y_1 = u_y$, $\delta z_1 = u_z)$ aci δr_1 și $\delta \theta_1$, datorite de fapt antrenărei punctului (r, θ) în spațiul absolut, în unitatea de timp. Vom introduce astfel în locul primului termen expresia

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial r} \delta r_1 - \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \delta \theta_1 .$$

Or, creșterile lui r_1 și θ_1 (momentan egale cu r și θ) prin antrenarea punctului (r, θ) cu vitesa de translație U, sunt respectiv

$$\delta r_1 = U \cos\theta \quad \text{și} \quad -\frac{U \sin\theta}{r}.$$

Vom scri, așa dar, (57) pentru punctele de pe sfera: $r = a$, pentru care (56) $\frac{1}{2} v_a^2 = \frac{3}{8} U^2 \cos^2\theta + \frac{1}{8} U^2$:

$$-\frac{1}{2} a \frac{dU}{dt} \cos\theta - U^2 \cos^2\theta + \frac{1}{2} U^2 \sin^2\theta + \frac{p}{\rho} + \frac{3}{8} U^2 \cos^2\theta + \frac{1}{8} U^2 = f(t)$$

sau

$$-\frac{1}{2} a \frac{dU}{dt} \cos\theta - \frac{9}{16} U^2 \cos 2\theta + \frac{1}{16} U^2 + \frac{p}{\rho} = f(t),$$

penultimul termen din membrul întâi putându-se îngloba în membrul al doilea, întru cât, fiind comun tutulor punctelor antrenate, este funcție exclusivă de t.

2) Exprimăm totul în raport cu axele antrenate, aplicând formula (49), în care, Φ fiind funcție de t, r și θ, $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ presupune că r și θ rămân constante, iar în locul vitesei absolute $\overline{v}$ apare vitesa $\overline{q} = \overline{v} - \overline{U}$, care aci, în lipsa rotației, coincide cu vitesa relativă $\overline{v_r}$. Or această vitesă, fiind tangențială frontierei sferice, este (vezi pag. 234 jos)

$$v_s = -\frac{3}{2} U \sin\theta .$$

Așa dar, vom avea

$$-\frac{1}{2} a \frac{dU}{dt} \cos\theta + \frac{9}{8} U^2 \sin^2\theta + \frac{p}{\rho} = f(t)$$

sau

$$-\frac{1}{2} a \frac{dU}{dt} \cos\theta - \frac{9}{16} U^2 \cos 2\theta + \frac{9}{16} U^2 + \frac{p}{\rho} = f(t),$$

soluție identică ca mai sus, și unde iarăși penultimul termen din membrul întâi se poate îngloba în funcția arbitrară din membrul al doilea, ca fiind funcție exclusivă de t.

Termenii al doilea și al treilea, precum și membrul al doilea, au aceeași valoare pentru elemente superficiale cu poziții θ și $\pi - \theta$, astfel că, dacă U este constant, presiunile pe diversele elemente din hemisfera din față se echilibrează cu presiunile egale de pe elementele corespunzătoare ale hemisferei dinapoi. Dacă însă există accelerare, ea produce un exces de presiune pe partea din față și o depresiune pe cea dinapoi. Contrariul se întâmplă dacă există încetinire. Presiunea rezultantă, provenită din primul termen în direcția mișcărei, este atunci, precum s'a găsit și pe altă cale la aplicația 42:

$$-\int_0^{\pi} 2\pi a \sin\theta . a d\theta . p \cos\theta = -\frac{2}{3} \pi \rho a^3 \frac{dU}{dt} .$$

BCU IAȘI / CENTRUL DE ISTORIE A LIBRARY

CAP. VI.

APLICAȚIUNI PRACTICE.

1. Scurgere prin orificii a unui lichid.

a) **Orificii în perete subțire.** Să considerăm scurgerea unuĭ lichid dintr'un vas alimentat sub nivel constant, printr'un orificiu *AB în perete subțire.* Această denumire s'a adoptat pentru orice orificiu de formă cilindrică, în cazul când grosimea peretelui, în care este practicat, este mai mică ca jumătatea celei mai mici dimensiuni a orificiului (Fig. 80.1), deoarece în acest caz lichidul ieșind atinge numai muchia interioară a cilindrului. Cum această condiție esențială este indeplinită și atunci când peretele, deși mai gros, este tronc-conic, divergent către exterior, prin extensiune se zice și în acest caz, că avem un orificiu în perete subțire (Fig. 80.2).

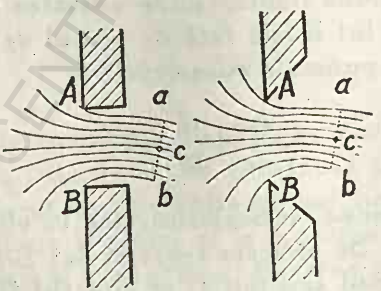


Fig. 80

După un timp oarecare dela pornirea scurgerii se stabilește *regimul permanent* sau *stafionar*, pe care ne propunem a-l studia, în ipoteza unui lichid perfect. Firele lichide îndreptându-se din toată masa în spre orificiu, convergența lor se continuă puțin și după ieșirea din vas, până la o secțiune oarecare *ab*, unde firele

devin paralele. Această secţiune se numeşte *secţiune contractată*, iar poziţia ei faţă de orificiu este la o distanţă cam egală cu dimensiunea medie a acestuia.

Pentru o mai mare generalitate să luăm un orificiu practicat într'un perete plan înclinat (Fig. 81). Vom presupune că orificiul are dimensiuni mici în raport cu înălţimea h a apei deasupra centrului orificiului. Să considerăm firul lichid, a cărui axă trece prin baricentrul secţiunii contractate O, prin care vom face să treacă şi planul de referinţă orizontal. Acest fir, ca şi celelalte de altfel, porneşte evident din apropierea suprafeţei libere, unde moleculele se pot considera aproximativ în repaus sau având o vitesă comună foarte mică, cu atât mai mică, cu cât pentru acelaşi debit suprafaţa liberă ar fi mai întinsă. Oricare ar fi punctul

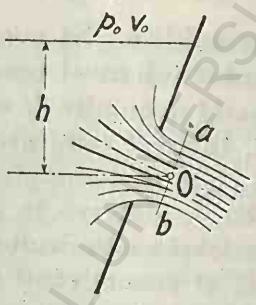


Fig. 81

iniţial în acea regiune limită, unde mişcarea se poate considera potenţială, sarcina lui totală faţă de planul de referinţă ales va fi egală cu aceea din punctele suprafeţei:

$$\frac{p_0}{\varpi}+\frac{v_0^2}{2g}+h,$$

unde p_0 este presiunea atmosferică, iar v_0 vitesa moleculelor de pe acea suprafaţă. Să aplicăm teorema lui *Bernoulli* la firul considerat, între punctul său iniţial şi punctul O din secţiunea ab, care este normală pe direcţia firelor, acestea fiind, cum am spus, paralele la trecerea prin acea secţiune.

Graţie acestei împrejurări şi admiţând, cu destulă aproximaţie, că vitesa este uniformă în întinderea mică a acestei secţiuni sau, cel puţin, că vitesa din baricentrul O reprezintă o medie, debitul orificiului se obţine prin înmulţirea acestei vitese cu secţiunea. Din contră, la o secţiune luată în partea conică a

vinei, nu contribue la debit decât componenta normală a vitesei individuale, şi deci calculul debitului pe această cale ar fi mai greu, cerând cunoaşterea exactă a repartiţiei viteselor în secţiune, ca mărime şi direţie.

Având în vedere, că pe conturul secţiunii ab se exercită presiunea mediului în care se face scurgerea, în general presiunea atmosferică (pe care o vom presupune egală cu p_0 de pe suprafaţa liberă), se poate admite aceeaşi presiune p_0 şi în interiorul acestei secţiuni, de dimensiuni reduse.

S'a arătat că, la o vână *paralelă rectilinie*, presiunile sunt repartizate în secţiune după legea hidrostatică (crescând liniar de sus în jos).

In cazul de faţă, având din contră o repartiţie de presiune uniformă, aceasta arată că vâna, în preajma secţiunii contractate, nu poate fi rectilinie, ci curbilinie, având tangentele, în dreptul secţiunei contractate, paralele. Şi întradevăr, orice fir al vinei dincolo de secţiunea contractată primeşte forma parabolică a traectoriei, pe care în câmpul gravitaţiunii o urmează un proectil, lansat cu o vitesă iniţială, normală pe secţia contractată. Analogia este perfectă, fiindcă moleculele, ieşind în atmosferă, sunt proectate (dincolo de secţiunea contractată) libere, adică *independente* una de alta, fiind înconjurate fiecare de aceaşi presiune.

Aceasta rezultă şi din ecuaţia mecanică, stabilită în direcţia normalei principale a firului:

$$\frac{v^2}{r} = g_n - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} = g_n,$$

unde r este raza de curbură a firului, g_n proiecţia lui $\overline{g}$ după normala principală a traiectorii, iar constanţa presiunii pe contur implică o presiune uniformă în întreaga secţiune contractată.

Dar această relaţie o găsim şi la lansarea unui proectil într'un mediu nerezistent (neglijând frecarea cu aerul), astfel că identitatea de condiţiuni este confirmată prin formulă.

Aşa dar, p_0 fiind presiunea în punctul O al firului din secţiunea contractată, sarcina în acest punct va fi

$$0 + \frac{p_0}{\varpi} + \frac{v^2}{2g}$$

şi, egalată cu aceea dela origina firului, va da

$$\frac{v^2}{2g}=\frac{v_0^2}{2g}+h$$

sau

$$v=\sqrt{2g+v_0^2}.$$

Egalitatea exprimă că h, energia potenţială a unităţii de greutate, se transformă (neglijând orice pierdere de sarcină) în întreagă în energie cinetică.

Dacă presupunem că alimentarea, care compensează evacuarea, se face uniform pe întreaga suprafaţă liberă Ω_0 (de ex. prin o ploaie uniform repartizată), aria secţiunei contractate fiind ω, obţinem prin ecuaţia de continuitate:

$$\frac{\omega}{\Omega_0}=n=\frac{v_0}{v}, \quad \text{adică } v_0=nv,$$

unde n este raportul, în general mult sub 1, dintre secţia contractată şi suprafaţa liberă. Expresia vitesei se scrie atunci:

$$v=\sqrt{\frac{2gh}{1-n^2}}.$$

Dacă p_0 de la suprafaţă diferă de p al mediului, în care se găseşte secţiunea contractată, expresia generală a vitesei din secţiunea contractată este

$$v=\sqrt{\frac{2g\left(h+\frac{p_0-p}{\varpi}\right)}{1-n^2}}.$$

In cazul când $p=p_0$ şi $n\cong 0$, avem formula cunoscută a lui *Toricelli*:

$$v=\sqrt{2gh}.$$

b) **Influenţa viscozităţii la scurgerea prin orificii. Contracţie şi debit.** Experienţa arată că, din cauza viscozităţii, v este în realitate ceva mai mic decât valoarea teoretică, dată de formula de mai sus. Viscozitatea se manifestă mai ales în apropierea pereţilor, unde, în sens transversal firelor, variaţia vitesei este mai mare, datorită aderenţei la perete.

Formula lui *Toricelli* s'ar scrie deci mai exact, cu un coeficient corectiv:

$$v=\alpha\sqrt{2gh} \qquad (\alpha<1) \qquad (1)$$

După *Weissbach*, care a stabilit pe α în cazul apei pentru valori foarte diferite ale lui h, am avea:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{pentru} & h=0.02\,m & \alpha=0.96 \\ \text{„} & h=1.02\,m & \alpha=0.995 \end{array}\right\} \text{(în medie } \alpha=0.97),$$

astfel că, până la secțiunea contractată, unde energia ar trebui să se găsească toată sub formă cinetică (deci proporțională cu pătratul vitesei), s'ar pierde 3% din valoarea teoretică a vitesei, și deci circa 6% din energia apei, din care rămâne, așa dar, la eșire 94%, total sub formă cinetică $\left(\frac{v^2}{2g}\right)$.

Insemnând cu h_v partea ce se pierde din sarcina totală h, datorită viscozității, să exprimăm pe h_v în funcție de sarcina (cinetică finală)

$$\frac{v^2}{2g} \equiv h - h_v\,, \qquad (2)$$

printr'un coeficient subunitar ζ, care înmulțește această sarcină, (numit uneori coeficient de rezistență):

$$h_v = \zeta \frac{v^2}{2g}\,, \qquad (3)$$

după cum se obișnuește în hidraulica practică. Prin egalarea celor două expresii ale lui h_v din (2) și (3) și folosind (1), găsim:

$$h_v \equiv h - \frac{v^2}{2g} \equiv \left(\frac{1}{\alpha^2} - 1\right)\frac{v^2}{2g} = \zeta \frac{v^2}{2g}\,.$$

De aci, pentru $\alpha = 0{,}97$ rezultă $\zeta \cong 0{,}064$. In cazul de față, pierderea relativă ζ fiind mică, se poate lua în loc de $\frac{v^2}{2g}$ chiar h, scriind $h_v = \zeta h$, însă mai exact avem $h_v \equiv \frac{\zeta}{1+\zeta} h \cong 0{,}06\,h$ adică 6%.

Debitul Q prin orificiul de arie Ω se obține din înmulțirea secțiunei contractate ω cu vitesa medie v:

$$Q = \omega v\,.$$

Dacă introducem coeficientul de contracție β, definit prin

$$\omega \equiv \beta\Omega \quad \text{cu} \quad \beta < 1$$

și dacă ținem seamă de corecția impusă la formula lui *Toricelli* din cauza pierderii de sarcină, vom avea:

$$Q = \alpha\beta\Omega\sqrt{2gh} = m\Omega\sqrt{2gh}.$$

Coeficientul $m = \alpha\beta$ se numeşte *coeficient de debit* sau *de scurgere*, fiind aproximativ egal cu coeficientul de contracţie β, deoarce α este foarte aproape de 1. Pentru orificiile mici, de formă circulară, unde în general $\alpha = 0{,}97$ şi $\beta = 0{,}64$, m este $0{,}62$, iar pentru forma dreptunghiulară $0{,}63$.

c) **Influenţa formei, mărimii şi poziţiei orificiului.** Coeficienţii de mai sus nu sunt aplicabili în toate împrejurările şi pentru toate felurile de orificii.

Mai întâiu s'a observat că, pentru ca fenomenul contracţiei să nu fie influenţat de prezenţa pereţilor laterali şi a fundului vasului, trebue ca orificiul să fie depărtat de orice perete lateral şi de fund cu cel puţin de 2—3 ori dimensiunea sa medie. Dacă această condiţie este satisfăcută, contracţia se poate considera completă.

Dacă orificiul este circular, secţiunea contractată rezultă de aceeaşi formă; dacă el este pătrat, această secţiune este de

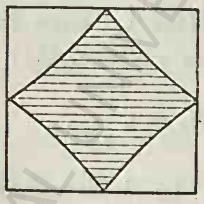


Fig. 82

asemenea de formă pătrată, însă cu laturile inclinate cu 45^0 faţă de acelea ale orificiului. In această constă fenomenul *inversiunii vinei* (Fig. 82). O inversiune $\gtrless$ apare şi la celelate forme.

Dacă dimensia orificiului de scurgere este de acelaşi ordin de mărime cu înălţimea h a suprafeţei libere deasupra baricentrului

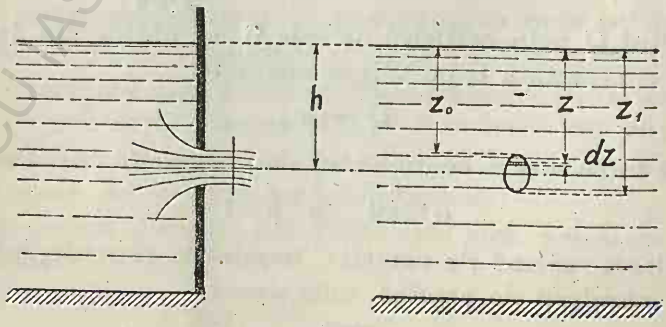


Fig. 83

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

orificiului, debitul se poate calcula mai exact prin integrarea ecuației găsite pentru un fir. Putem compara debitul Q', calculat astfel mai exact, cu debitul Q dat de formula precedentă, determinând raportul $\frac{Q'}{Q}$ de la caz la caz.

Fie recipientul din fig. 83, la care am presupus peretele vertical. Împărțim aria orificiului prin planuri orizontale în fâșii foarte mici, la care aplicăm de ex. (cu $v_0=0$) formula lui *Toricelli*

$$v=\sqrt{2gz}$$

$$dQ=m\sqrt{2gz}\,c\,dz,$$

unde c este coarda respectivă, funcție de z.

Elementele de suprafață $c\,dz$ ar trebui luate de fapt în secțiunea contractată, le-am luat însă cu destulă aproximație în secțiunea orificiului, înmulțindu-le cu un coeficient comun de contracție β, care, înmulțit cu coeficientul de vitesă α, dă coeficientul de debit comun m, ce figurează în ultima relație. În ceea ce privește sarcinile z de sub radical, luate și ele aci pentru fâșiile în care se împarte orificiul, astfel că deasemenea diferă puțin de cele corespunzătoare din secțiunea contractată, ce ar trebui considerate în calcul, putem socoti că erorile se compensează, întrucât în partea deasupra baricentrului sarcinile z luate sunt ceva mai mici decât în secțiunea contractată, iar în partea dedesubt sarcinile z sunt ceva mai mari decât în secțiunea contractată. Așa dar, valoarea mai exactă a debitului vinei, încadrate între tangentele orizontale z_0 și z de la periferia orificiului, este

$$Q'=m\sqrt{2g}\int_{z_0}^{z_1} c z^{\frac{1}{2}}\,dz.$$

Să calculăm raportul $\frac{Q'}{Q}$ în anumite cazuri curente.

I. **Orificiu dreptunghiular** (comp. fig 83) cu $c=const\equiv b$ (baza dreptunghiului):

$$Q'=mb\sqrt{2g}\int_{z_0}^{z_1} z^{\frac{1}{2}}\,dz=\frac{2}{3}mb\sqrt{2g}\,(z_1^{\frac{3}{2}}-z_0^{\frac{3}{2}}),$$

valoare care, comparată cu valoarea Q, dată în funcție de z mediu $=h$ după fomula respectivă:

$$Q = mb(z_1 - z_0)\sqrt{2g\frac{z_1+z_0}{2}},$$

conduce la raportul

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{\frac{2}{3}(z_1^{\frac{3}{2}} - z_0^{\frac{3}{2}})}{(z_1-z_0)\sqrt{\frac{z_1+z_0}{2}}}.$$

Pentru cazul limită $\frac{z_0}{z_1} = 0$, adică atunci când orificiul ar atinge suprafaţa liberă (cazul cel mai defavorabil pentru exactitatea valorii lui Q), găsim

$$\frac{Q'}{Q} = 0{,}943.$$

Dacă, pentru cazul $z_0 > 0$, introducem înălţimea a a orificiului şi cota h a centrului său sub nivelul din vas:

$$z_1 = h + \frac{a}{2} \qquad z_1^{\frac{3}{2}} = h^{\frac{3}{2}}\left(1 + \frac{a}{2h}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$z_0 = h - \frac{a}{2} \qquad z_0^{\frac{3}{2}} = h^{\frac{3}{2}}\left(1 - \frac{a}{2h}\right)^{\frac{3}{2}}$$

şi desvoltăm termenii după formula binomului, obţinem:

$$\frac{Q'}{Q} = 1 - \frac{1}{96}\left(\frac{a}{h}\right)^2 - \frac{1}{2048}\left(\frac{a}{h}\right)^4 \cdots,$$

formulă ce se poate aplica cu o atât mai mare exactitate, cu cât $\frac{a}{2h}$ sau $\frac{a}{h}$ ar fi mai mic, adică cu cât ne am depărta de cazul limită menţionat.

Pentru

$$\frac{a}{h} < \frac{1}{10}$$

acest raport este foarte aproape de 1.

II. **Orificiu circular** (Fig. 84):

$$c = 2\sqrt{r^2 - (h-z)^2}$$

$$Q' = m\sqrt{2g}\int_{h-r}^{h+r} 2\sqrt{z[r^2 - (h-z)^2]}\,dz.$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Sub radical avem un polinom de gradul 3 (integrală eliptică).

Să luăm cazul particular când vârful orificiului ar fi tangent la suprafaţa liberă ($h=r$), adică poziţia cea mai defavorabilă pentru exactitatea expresiei simplificate Q a debitului. In acest caz avem:

$$cz^{\frac{1}{2}}=2\sqrt{z(2rz-z^2)}=2z\sqrt{2r-z}$$

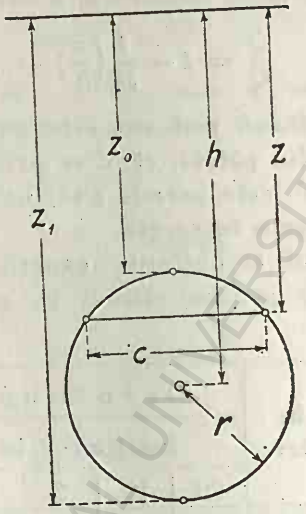


Fig. 84

şi deci o integrală ce se poate calcula ca funcţiile obişnuite:

$$Q'=2m\sqrt{2g}\int_0^{2r} z(2r-z)^{\frac{1}{2}}dz.$$

Această integrală, dacă la factorul z se adaugă şi se scade $2r$, se desface în

$$2r\int_0^{2r}(2r-z)^{\frac{1}{2}}dz-\int_0^{2r}(2r-z)^{\frac{3}{2}}dz=\frac{4}{3}r(2r)^{\frac{3}{2}}$$

$$-\frac{2}{5}(2r)^{\frac{5}{2}}=\frac{16}{15}\sqrt{2}r^2\sqrt{r}$$

sau, punând sub radical h în loc de r,

$$Q'=2m\sqrt{2g}\,\frac{16}{15}\sqrt{2}\,r^2\sqrt{h}=\frac{32\sqrt{2}}{15\pi}m\pi r^2\sqrt{2gh}.$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Cum debitul după formula simplificată în funcție de h, care este z mediu (formula lui *Toricelli*), ar fi

$$Q = m\pi r^2 \sqrt{2gh},$$

deducem raportul

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{32}{15}\frac{\sqrt{2}}{\pi} = 0{,}96.$$

Pentru cazul general când $r < h$, o desvoltare în serie dă

$$\frac{Q'}{Q} = 1 - \frac{1}{32}\left(\frac{r}{h}\right)^2 - \ldots$$

Deși calculul făcut mai sus este numai aproximativ, mai ales în cazul orificiului pătrat, când se produce inversiunea vinei, rezultă că, în general, este permis a se lua Q în locul valorii mai exacte Q', obținută prin integrare.

Iată valorile lui m obținute experimental (după *Poncelet*, *Lesbros* și *Weissbach*) pentru orificii în condițiuni, care interesează în practică:

z_0 în metri	Dreptunghiu				
	Înălțima a în cm.				
	20	10	5	2	1
0,05	0,58	0,62	0,62	0,64	0,68
0,50	0,60	0,62	0,63	0,63	0,65
1,00	0,60	0,62	0,63	0,63	0,63
3,00	0,60	0,60	0,61	0,61	0,61

h în metri	Cerc				
	Raza r în cm.				
	15	5	2	1	0,3
0,1	—	—	0,61	0,62	—
0,5	0,59	0,60	0,61	0,61	0,64
1,0	0,59	0,60	0,60	0,60	0,62
6,0	0,59	0,60	0,60	0,60	0,60

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Dacă avem pereți, care îndreaptă sau ghidează apa către orificiu, contracțiunea este impiedicată în partea respectivă a conturului orificiului, fiind deci parțială sau *incompletă*. După experiențele lui *Bidone* și *Weissbach*, coeficientul de debit devine

$$m_1 = m\left(1+k\frac{\text{periferia cu pereți de ghidare}}{\text{întreaga periferie}}\right),$$

unde avem pentru orificiul în cerc $k=0{,}128$, pentru pătrate mici $k=0{,}152$, pentru dreptunghiuri mici $k=0{,}134$, iar pentru mai mari $k=0{,}157$.

Deasemenea și prin o îngustare a vasului spre orificiu (Fig. 85) contracția devine incompletă din cauza dirijării firelor

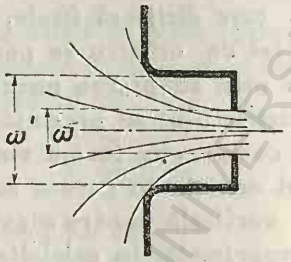


Fig. 85

în spre axa orificiului. Dacă ω' este secțiunea recipientului d'înainte de orificiu și punem

$$n=\frac{\omega}{\omega'}<1,$$

avem după *Weissbach*

I. Pentru orificii circulare: $m_1 = m\,[1+0{,}0456\,(14{,}82^n-1)]$.

II. Pentru orificii dreptunghiulare: $m_1 = m\,[1+0{,}016\,(9^n-1)]$.

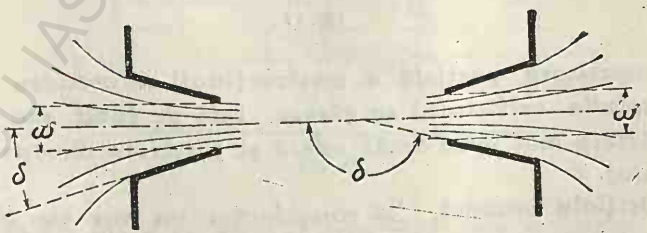


Fig. 86

III. Prin ajutaje conice ieşinde (Fig. 86.1) cu $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ şi deci $\cos\delta > 0$, contracţia este deasemenea redusă, iar prin ajutaje intrânde (Fig. 86.2) cu

$$\frac{\pi}{2} < \delta < \pi \quad \text{şi deci} \quad \cos\delta < 0,$$

din contră, contracţia este sporită. In ambele cazuri se poate aplica formula lui *Weissbach*

$$m_1 = m\,(1 + 0{,}322\cos^3\delta + 0{,}1684\cos^4\delta).$$

d) **Orificiu în perete gros. Contracţie incompletă.** Dacă orificiul este practicat în perete gros, fie în total, fie în parte, vâna aderă pe perete, care dirijează firele, micşorând astfel convergenta lor. Un astfel de orificiu se poate realiza evident şi într'un perete subţire prin adaptarea unui ajutaj.

Dacă meridiana orificiului se prezintă rotunjită ca în a doua fig. 87, unde se arată comparativ forma vinei la un asemenea orificiu faţă de cazul unui orificiu în perete subţire din prima figură (s'a ales axa orificiilor verticală pentru a avea simetrie), contracţiunea este nulă, adică suprimată. In celelalte cazuri avem *contracţie incompletă* şi putem aplica formula lui *Bidone* şi *Weissbach*. La micşorarea contracţiei pentru un orificiu dreptunghiular, marginile orizontale au mai mare influenţă decât restul.

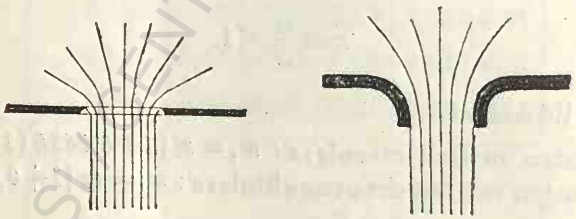


Fig. 87

O suprimare parţială a contracţiunii se produce şi atunci, când marginile orificiului se găsesc, faţă de fund sau de pereţi, la o depărtare mai mică decât odată şi jumătate dimensia minimă a orificiului.

e) **Orificiu înnecat.** Să considerăm un vas cu orificiu în perete subţire, prin care însă vâna lichidă, în loc de a ieşi în

atmosferă, se varsă într'un canal (sau bazin plin cu apă), a cărui suprafaţă liberă, fiind la cota h sub nivelul din vas, se găseşte deasupra orificiului. Vom presupune că ambele nivele se menţin constante într'un mod oarecare, pentru a avea un fenomen permanent. Să luăm şi de data aceasta ca plan de referinţă planul orizontal ce trece prin centrul secţiunii contractate şi faţă de care cotele celor două nivele sunt respectiv H_0 şi H_1, astfel că $H_0 - H_1 = h$.

In apropiere de suprafaţa liberă din vas, firele lichide au sarcina totală

$$H_0 + \frac{p_0}{\varpi} + \frac{v_0^2}{2g}.$$

Dacă considerăm firul ce trece prin baricentrul secţiunii contractate (care se formează acum în al doilea recipient), sarcina în acest din urmă punct va fi

$$\frac{p}{\varpi} + \frac{v^2}{2g}.$$

Ecuaţia lui *Bernoulli* ne dă

$$H_0 + \frac{p_0}{\varpi} + \frac{v_0^2}{2g} = \frac{p}{\varpi} + \frac{v^2}{2g}.$$

Pe de altă parte vâna, la intrarea în canal, este susţinută (conform principiului lui *Arhimede*) de mediul lichid similar în

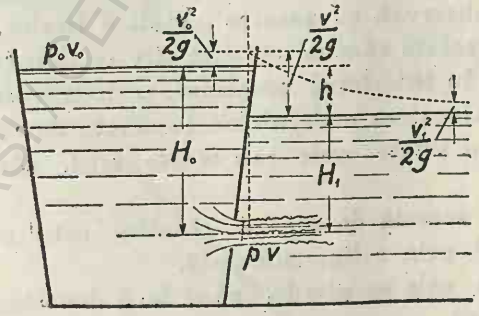


Fig. 88

care pătrunde, astfel că efectul gravităţii de a o curba parabolic, este anulat.

De aceea vâna va fi aproximativ rectilinie și ca atare se poate admite că în orice secție a ei, de ex. cea contractată, avem legea hidrostatică. Se constată pe de altă parte că vâna nu turbură mult starea masei lichide din canal, care este în contact cu peretele străbătut, putându-se admite deci și in această masă legea hidrostatică. In asemenea condițiuni putem scrie

$$p = p_0 + \varpi H_1,$$

astfel că ecuația de mai sus, înlocuind $H_0 - H_1$ prin h, ne dă

$$v = \sqrt{2gh + v_0^2}.$$

Se vede ușor că, în cazul de față, oricare ar fi firul considerat, făcând să treacă planul de referință prin punctul unde axa sa străbate secțiunea contractată, ajungem la aceeași expresie a lui v. Vitesa este deci repartizată exact uniform în secțiunea contractată, datorită unicității diferenței h a sarcinei potențiale pentru toate firele, ceea ce nu era cazul, cum am văzut, la un orificiu care dă în aer și pentru care am fost conduși a lua o medie și a cerceta eroarea făcută prin întrebuințarea acelei medii.

Debitul va fi aci

$$Q = m\omega\sqrt{2gh + v_0^2},$$

formal ca și în cazul orificiului ce dă în aer, cu deosebirea însă înțeles, că sarcina potențială h (care se transformă în sarcina cinetică $\frac{v^2}{2g} - \frac{v_0^2}{2g}$) este aci diferența de nivel dintre cele două recipiente, independent de poziția în înălțime a orificiului.

Este de observat, că sarcina totală a firelor, care până la secțiunea contractată rămâne aproximativ constantă, după această secțiune, adică în interiorul canalului, se micșorează treptat prin frecări și prin ciocnirea moleculelor (animate de vitesa v) contra masei lichide cu vitese nule sau foarte mici, până la egalizarea vitezelor.

Pierderea aceasta de sarcină cinetică este arătată aproximativ în fig. 88, prin o line punctată.

Pe această cale se pierde, până la o depărtare oarecare de orificiu, o sarcină

$$\frac{v^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} = h + \frac{v_0^2 - v_1^2}{2g},$$

v_1 fiind vitesa apei din canal în aval de orificiu.

f) **Orificii de stăvilare.** Stăvilarele deschise (cu stavila ridicată) oferă orificii mari în zidurile sau digurile, în cari sunt intercalate, pentru a da scurgere apelor acumulate în amonte. Un asemenea orificiu se închide şi se deschide după voe printr'un

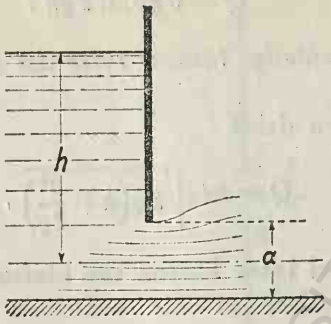


Fig. 89

panou mobil (stavilă), care alunecă în general pe marginile orificiului, special amenajat.

Acestea formează *sediul* care, în contact cu marginele stavilei, asigură etanşeitatea.

Deseori orificiul este prelungit cu un canal zidit sau de lemn, având radierul la cota bazei orificiului, spre a se evita în partea de jos, sau chiar şi în lături (prin pereţi exact în prelungire) contracţiunea curentului eşit, limitată astfel cel mult la muchia inferioară a stavilei ridicate.

După rezultatele încercărilor practice se pot utiliza următorii coeficienţi de debit m:

I) *Stăvilar vertical dreptunghiular* (Fig. 89): $Q = 0{,}70 la\sqrt{2gh}$, unde l este lărgimea orificiului, iar a înălţimea lui. Contracţia fiind incompletă, avem $m > 0{,}62$.

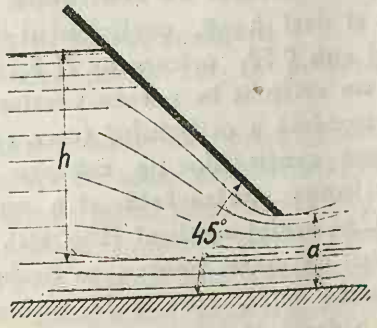


Fig. 90

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

II) *Stăvilar înclinat.* Dispozitivul (Fig. 90) este întâlnit la roţile hidraulice *cu acţiune pe dedesubt.* La o înclinare de 2 înălţime către 1 bază putem lua în practică $Q = 0{,}74la\sqrt{2gh}$, iar la o înclinare de *1/1* :

$$Q = 0.80la\sqrt{2gh}\,.$$

III. *Orificiu de stăvilar înnecat între doi recipienţi sau canale* (Fig. 91).

Se va lua pentru debit

$$Q = mla\sqrt{2g\left(h + \frac{u^2}{2g}\right)},$$

cu h diferenţa de nivel între bazine sau biefuri şi cu $m = 0{,}6$, dacă latura inferioară a orificiului este suficient deasupra fundului,

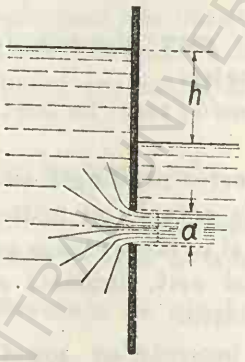


Fig. 91

sau $m \cong 0{,}65 - 0{,}7$, dacă ea se găseşte chiar pe fund, u fiind vitesa medie a curentului din amonte.

g) **Minimul coeficientului de contracţie.** Se poate arăta că, în cazul când $\alpha = 1$ şi deci $\beta = m$, coeficientul de contracţie $\beta = m$ nu se poate coborî sub *0,50*, oricare ar fi forma orificiului. Să considerăm de ex. un orificiu în perete vertical şi să aplicăm, în proecţie pe axa orizontală a orificiului (care este şi axa secţiunii contractate), teorema cantităţilor de mişcare la masa de lichid cuprinsă între secţiunea contractată şi o emisferă descrisă cu centrul în centrul C al acelei secţiuni (Fig. 92). Vom presupunem raza emisferei destul de mare, pentru ca firele lichide să aibă la periferie vitese foarte mici, spre a le putea neglija şi admite acolo o repartiţie hidrostatică a presiunilor. Creşterea în dt a

cantităţilor de mişcare în proecţie este suma lor din momentul $t+dt$ minus aceea din momentul t, interval în care suprafaţa fluidă emisferică şi moleculele din secţiunea contractată au înaintat puţin în sensul mişcării.

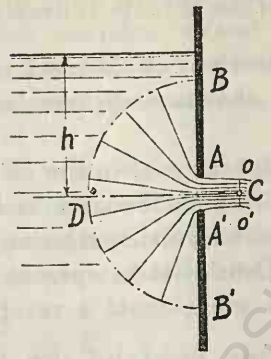


Fig. 92

Cum în cele două poziţiuni partea comună a maselor dă, în cazul mişcării permanente, termeni egali şi de semn contrar, cari se anulează reciproc, rămâne a se lua în proecţie pe axă numai diferenţa dintre cantitatea de mişcare a masei $\frac{\varpi}{g} m\omega v^2 dt$, care în dt a străbătut secţiunea contractată în sensul scurgerii, şi cantitatea de mişcare a unei mase egale, străcurate prin suprafaţa de contur emisferică, care însă, din cauza vitezelor neglijabile, se poate lăsa de o parte. Avem, aşa dar, drept creştere a cantităţilor de mişcare în dt, în proecţie (aci însăşi rezultanta în mărime naturală) pe axa aleasă,

$$\frac{\varpi}{g} m\omega v^2 dt,$$

rezultantă îndreptată în sensul scurgerii.

Să luăm pe de altă parte, tot în proecţiune, impulsiunile forţelor aplicate.

Greutatea proprie a masei dă o proecţie nulă. In ceeace priveşte presiunile exercitate pe masa considerată, ele se compun din:

1) presiunea atmosferică, care, direct sau indirect, se exercită pe întreaga suprafaţă *închisă* a masei considerate, adică pe suprafaţa $ABDBB'A'o'oA$, având deci o rezultantă nulă;

2) presiunile hidrostatice, datorite restului lichidului pe suprafaţa emisferei şi, în fine;

3) reacţiunile peretului AB, $A'B'$ din jurul orificiului, egale şi contrare presiunilor interioare din partea lichidului, modificate faţă de cele din repaus şi anume micşorate prin mişcare, potrivit teoremei lui *Bernoulli*; înălţimile piezometrice ale acestor presiuni sunt anume mai mici decât cele hidrostatice cu $\frac{v^2}{2g}$, v fiind vitesele moleculelor respective ce alunecă pe perete. In afară de aceasta reacţiunile în chestiune lipsesc *complet* în dreptul orificiului ω.

Rezultă că totalitatea reacţiunilor de perete în proecţie (orizontală) pe axa orificiului, în loc de a se echilibra reciproc (ca în starea de repaus cu orificiul astupat), dau o rezultantă, perpendiculară pe peretele orificiului şi în spre exterior, provenită:

1) din diminuarea menţionată a reacţiunilor prin apariţia termenilor $\frac{v^2}{2g}$ pe întinderea peretelui din jurul orificiului; fie x cantitatea, cu care se găseşte astfel micşorată, faţă de starea statică, rezultanta reacţiunilor peretelui AB, AB', proectate pe axa orificiului (în mărime naturală) şi îndreptate spre interior;

2) din lipsa completă a reacţiunei de perete pe aria orificiului AA' (unde peretele lipseşte), egală cu $\varpi h\omega$ şi tot în direcţia axei şi înspre interior.

Vom scrie deci, în virtutea teoremei cantităţilor de mişcare (în unitatea de timp)

$$\frac{\varpi}{g} m\omega v^2 = x + \varpi h\omega,$$

sau, prin formula lui *Toricelli* $v^2 = 2gh$:

$$m \geq \frac{1}{2}.$$

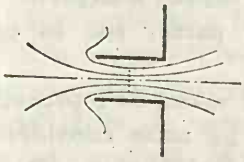


Fig. 93

Dacă se iau măsuri că x să fie aproape de zero, spre a se realiza cu mare aproximaţie repartiţia hidrostatică şi pe peretele

$ABB'A'$, cum este cazul ajutajului intrând al lui *Borda* (Fig. 93), se poate admite ca atinsă limita $m = \frac{1}{2}$.

b) **Calculul timpului de golire a unui vas printr'un orificiu mic.** Chiar în cazul când nivelul din vas variază în timpul scurgerii, ceea ce implică variația vitesei și a debitului, deci o mișcare nepermanentă sau variabilă, se pot întrebuința cu destulă aproximație formulele mișcării permanente, dacă variația mișcării se face foarte încet.

Să găsim, pentru un vas de formă oarecare (Fig. 94), legea de variație, în funcție de timp, a înălțimii z a nivelului deasupra centrului orificiului, presupus foarte mic, în cazul mai general când am avea și o alimentație a vasului cu un debit Q_0.

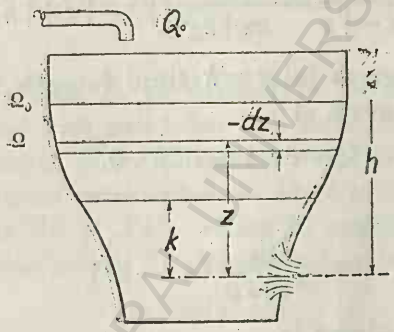


Fig. 94

După cum $Q_0 \lessgtr m\omega\sqrt{2gh}$, planul de apă se va urca, va staționa, sau se va scobori. In ultimul caz debitul Q se va micșora treptat cu sarcina z. Cantitatea evacuată în dt va fi

$$Qdt = m\omega\sqrt{2gz}dt,$$

iar micșorarea lui z în dt va depinde, pe de o parte, de această cantitate Qdt minus aportul Q_0dt, și, pe de altă parte, de aria $\Omega(z)$, a suprafeței libere, funcție cunoscută de z, potrivit formei vasului. Vom avea anume

$$(Q - Q_0)dt = -\Omega dz.$$

Eliminând pe Q:

$$(m\omega\sqrt{2gz} - Q_0)\,dt = -\Omega dz$$

şi punând, pentru simplificarea formulei

$$Q_0 = m\omega\sqrt{2gk},$$

obţinem prin separaţia variabilelor

$$m\omega\sqrt{2g}\,dt = \frac{\Omega dz}{\sqrt{k}-\sqrt{z}}$$

sau

$$t = \frac{1}{m\omega\sqrt{2g}}\int_h^z \frac{\Omega dz}{\sqrt{k}-\sqrt{z}}.$$

La atingerea cotei $z = k$, evacuarea va fi egală cu alimentarea şi nivelul nu va mai putea scădea sub această limită. Pentru $\Omega = \Omega_0$ constant vom avea:

$$t = \frac{\Omega_0}{m\omega\sqrt{2g}}\int_h^z \frac{dz}{\sqrt{k}-\sqrt{z}} = \frac{2\Omega_0}{m\omega\sqrt{2g}}\left(\sqrt{k}-\sqrt{z}+\sqrt{h}\log\frac{\sqrt{h}-\sqrt{k}}{\sqrt{z}-\sqrt{k}}\right),$$

timpul până la atingerea lui $z = k$ fiind teoretic infinit.

Dacă totodată avem şi

$$Q_0 = 0 \quad \text{adică} \quad k = 0,$$

formula devine

$$t = \frac{2\Omega_0}{m\omega\sqrt{2g}}\left(h^{\frac{1}{2}}-z^{\frac{1}{2}}\right),$$

şi limita $z = 0$ este atinsă la

$$T = \frac{2\Omega h^{\frac{1}{2}}}{m\omega\sqrt{2g}} = \frac{2\Omega_0 h}{m\omega\sqrt{2gh}}.$$

Dacă acelaşi vas cu Ω constant ar fi alimentat continuu în aşa mod, încât nivelul din vas să nu se schimbe, Q va fi constant:

$$Q = m\omega\sqrt{2gh},$$

iar durata evacuării unui volum egal cu conţinutul vasului socotit de la suprafaţă până la nivelul centrului orificiului:

$$T_1 = \frac{\Omega_0 h}{m\omega\sqrt{2gh}} = \frac{T}{2}.$$

In cazul când orificiul ar avea dimensiuni mari în sens vertical, calculele de mai sus se vor aplica cu z numai până la muchia

superioară a orificiului, după deslipirea vinei urmând a se aplica formula *deversorului* (vezi mai departe).

i) **Transvazare prin orificiu.** Să luăm două vase alăturate, despărțite printr'un perete prevăzut cu un orificiu de arie ω, secțiunile lor orizontale fiind constante, deci independente de cota nivelului de apă z, respectiv z', deasupra fundului.

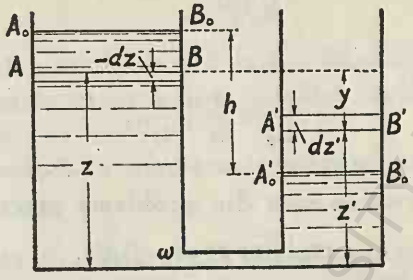


Fig. 95

Vasele vor putea fi și distanțate între ele, fără perete comun, comunicând însă printr'un tub de legătură de secțiune ω, presupus foarte scurt (Fig. 95), pentru a fi comparabil (frecările fiind neglijabile) cu un orificiu înecat. Dacă în momentul t suprafețele libere sunt AB și $A'B'$, vitesa în orificiu sau în tubul de legătură va depinde numai de diferența lor de nivel $z-z'$:

$$v=\sqrt{2g(z-z')},$$

neglijând micile vitese de la suprafețele libere.

Cantitatea de apă scursă în dt va fi

$$Qdt=m\omega\sqrt{2g(z-z')}dt,$$

unde, în afară de Q, avem de eliminat acum și una din variabilele z și z', fiind nevoe deci de încă două relațiuni.

Acestea sunt

$$Qdt=-\Omega dz=\Omega' dz,$$

iar eliminând pe Q între cele 3 ecuații, rămâne sistemul

$$m\omega\sqrt{2g(z-z')}\,dt=-\Omega dz=\Omega' dz'. \qquad (3),\ (4)$$

Pentru a doua eliminare introducem o variabilă auxiliară y:

$$z-z'\equiv y \quad \text{și deci} \quad dz-dz'\equiv dy, \qquad (5)$$

care prin ecuația (4) ne dă

$$\frac{dz}{\Omega'}=-\frac{dz'}{\Omega}=\frac{dy}{\Omega+\Omega'}$$

şi, înlocuind în (1):

$$m\omega\sqrt{2gy}\,dt = -\frac{\Omega\Omega'}{\Omega+\Omega'}\,dy.$$

Această ecuaţie, dacă punem

$$\frac{\Omega\Omega'}{\Omega+\Omega'} = \Omega_0,$$

adică

$$\frac{1}{\Omega_0} = \frac{1}{\Omega} + \frac{1}{\Omega'},$$

este de aceeaşi formă cu acea din problema precedentă:

$$m\omega\sqrt{2gy}\,dt = -\Omega_0 dy.$$

Să calculăm timpul ce trece până când nivelele se întâlnesc ($y=0$), cazul fiind analog cu acela al golirii, studiat mai sus, cu aceeaşi limită pentru variabilă. In realitate aci scurgerea nu se opreşte la prima anulare a lui y, ci, în virtutea inerţiei, mişcarea se continuă puţin dincolo de poziţia de echilibru, schimbându-şi apoi sensul ş. a. m. d., astfel că, la un fluid natural (viscos), după un număr oarecare de oscilaţiuni, *amortizate* prin frecări, lichidul se opreşte în poziţia sa de echilibru.

Dacă

$$\Omega = \Omega',$$

în care caz

$$\Omega_0 = \frac{\Omega}{2} = \frac{\Omega'}{2},$$

avem

$$T_0 = \frac{T}{2} = T_1,$$

astfel că transvazarea se face de două ori mai repede ca golirea vasului Ω prin acelaşi orificiu, debuşând în atmosferă sub o sarcină iniţială h (diferenţa de nivel iniţială între vase). Aceasta se putea prevede prin faptul, că, în timpul dt, denivelarea dy este dublul scăderii de nivel dz din cazul unui singur vas sub aceeaşi sarcină (efectul simultan al scoborârii nivelului într'un vas şi al

BIBLIOTECA CENTRALĂ UNIVERSITY LIBRARY IAŞI

ridicării în celălalt vas). Se mai poate presupune că scurgerea se petrece identic ca la golirea prin orificiu a unui vas de secțiune pe jumătate, reclamând și atunci jumătate din timpul de golire al vasului de secțiune Ω. Umplerea vasului al doilea, primul fiind un recipient foarte mare ($\Omega = \infty$), se face în

$$T = \frac{2\Omega' h}{m\omega\sqrt{2gh}},$$

în care timp sarcina scade dela h la 0. Această scădere, în condițiuni identice ca în cazul golirii, explică egalitatea celor două durate respective.

Cazul se prezintă la umplerea camerelor de ecluze.

Aplicația Nr. 80. *Un vas plin cu apă, prevăzut cu un orificiu de fund, se mișcă vertical în jos cu accelerația j* (Fig. 96). *Care este vitesa relativă (față de vasul antrenat) w, a apei scurse din vas, presupunând că raportul secțiunilor este $\frac{\omega}{\Omega_0} = n$?*

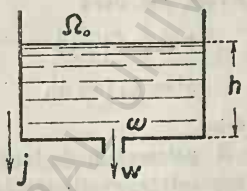


Fig. 96

Răspuns. Față de sistemul antrenat, câmpul forței exterioare masice în loc de $\bar{g}$ este $\bar{g} - \bar{j}$ și deci vom găsi pentru mișcarea relativă a apei:

$$w = \sqrt{\frac{2(g-j)h}{1-n^2}}$$

în prsupunerea că nu avem contracție, și:

$$w = \sqrt{\frac{2(g-f)h}{1-\beta^2 n^2}}$$

în cazul unei contracțiuni β; pentru expresiile mai exacte, cari țin seamă și de pierderea de sarcină, alipim radicalului coeficientul de vitesă α.

Aplicația Nr. 81. *Printr'un orificiu de fund Ω al unui vas în formă de rotație cu axă verticală, plin cu apă și fără alimentare, apa se scurge astfel, că vitesa de scoborâre v_0 a suprafeței rămâne constantă* (Fig. 97).

Care este forma meridianei vasului, presupunând că menționata axă este axa verticală a orificiului?

Răspuns. Fie Ω_z secţiunea vasului la înălţimea z (Fig. 97), ocupată de suprafaţa liberă; avem pentru vitesa de scurgere prin orificiu

$$v = k\sqrt{z+k}\ , \quad \text{unde} \quad k = \frac{v_0^2}{2g}$$

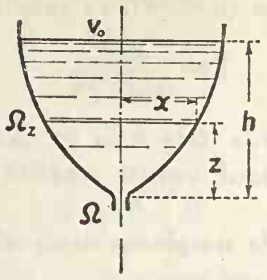


Fig. 97

şi cum, în presupunerea că scurgerea se face fără contracţie: $\Omega_z v_0 = \Omega v$, vom avea

$$\Omega_z = C\sqrt{z+k},$$

unde C şi k sunt constante. Avem, aşa dar:

$$\pi x^2 = C\sqrt{z+k}$$

$$x^4 = C_1(z+k),$$

deci o parabolă de gradul al 4-lea.

Dacă forma vasului ar fi prizmatică de lungime l în sens perpendicular figurei, care în acest caz ar reprezinta secţiunea lui transversală (simetrică în raport cu axa verticală ce trece prin centrul orificiului), am avea:

$$\Omega_z = 2xl = C\sqrt{z+k}$$

$$x^2 = C_2(z+k),$$

o parabolă de gradul al doilea.

Aplicaţia Nr. 82. *In peretele vertical al unui vas, având apă până la înălţimea h, se găsesc două mici orificii, unul la depărtarea a de suprafaţă, altul la depărtarea b de fund.*

Să se găsească condiţiile, pentru ca axele vinelor de scurgere să se întâlnească pe planul fundului în acelaşi punct B (Fig. 98).

Răspuns. Ecuaţiile mişcării moleculelor, după o parabolă ce pleacă din centrul orificiului superior, dau, pentru drumurile parcurse de molecule, de la orificiul menţionat până la B, în proecţie orizontală şi verticală:

$$x = vt \quad \text{şi} \quad z = a + \frac{gt^2}{2}$$

şi, dacă eliminăm pe t şi înlocuim $v^2 = 2ga$:

$$z = a + \frac{x^2}{4a}, \qquad (1)$$

de unde, pentru ($AB \equiv x_1$):

$$h-a=\frac{x_1^2}{4a}.$$

După parabola descrisă de firul milociu al orificiului inferior avem analog:

$$b=\frac{x_1^2}{4(h-b)}.$$

Prin eliminarea valorii comune x_1 obținem: $a=b$ și $a=h-b$, ultima soluție fiind evidentă, fiindcă în acest caz cele două orificii coincid.

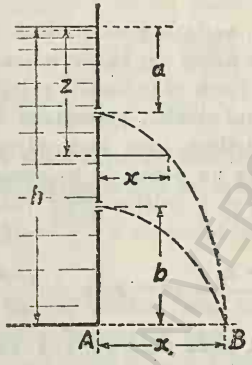


Fig. 98

Parabola (1), luând pe a ca parametru, are drept înfășurate dreptele $z=\pm x$, dintre cari numai $z=x$ corespunde unei realități fizice.

Aplicația Nr. 83. *Intr'un vas cilindric de secțiune* $\Omega_0=\pi R^2$ *și cu fundul orizontal, care se învârtește în jurul axei sale verticale cu vitesa* ω, *se găsește lichid, care în repaus ocupă înălțimea* H (Fig. 99).

Ce debit q *va curge printr'un orificiu* Ω *făcut la fund pe periferie, dacă vasul este alimentat cu același deb't, astfel ca regimul să fie permanent?*

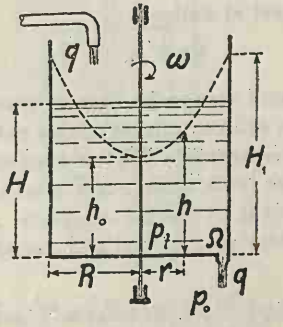


Fig 99

Răspuns. Să presupunem mai întâi că orificiul ar fi închis. Ecuaţia hidrostatică pentru unitatea de masă, aplicabilă şi în repaus relativ, este:

$$\frac{dp}{\rho} + dU = 0 \quad (1) \quad \text{sau} \quad \frac{p - p_0}{\rho} = U_0 - U. \quad (1\,1)$$

U este potenţialul forţei exterioare (în repaus relativ includând şi potenţialul forţelor de inerţie ale mişcării de antrenare, care în speţă se reduc la forţa centrifugă). Se poate considera însă potenţialul total U', care include şi pe acela al torţei elastice p, scriind relaţia (1.1) astfel:

$$U + \frac{p}{\rho} = U_0 + \frac{p_0}{\rho} \quad \text{sau} \quad U' = U'_0. \quad (1.2)$$

Aşa dar, în hidrostatică, variaţia potenţialului total, când se trece de la un punct la altul, este nulă şi de aceea nu există mişcare. Este comod a lua două puncte pe aceeaşi verticală, întru cât această relaţie între potenţialele lor se prezintă atunci ca şi în repausul absolut, potenţialul forţei centrifuge pe verticală fiind constant (sau forţa centrifugă, care este orizontală, ne-intervenind pe verticală). Vom avea astfel între un punct de pe suprafaţa liberă (presiune p_0) şi proecţia lui pe fund (presiune p_f) relaţia (vezi Vol. I pag. 258 (1'), unde pentru z_0 şi z avem aci h_0 şi 0):

$$\frac{p_f - p_0}{\rho} = gh = g\left(h_0 + \frac{\omega^2 r^2}{2g}\right). \quad (7)$$

Am văzut (id. pag. 259, unde pentru h şi z avem aci H şi H_1) că, pentru un vas cilindric vertical cu secţiune circulară:

$$h_0 = H - \frac{1}{2}\frac{R^2\omega^2}{2g}$$

şi deci, în concordanţă şi cu (1.1):

$$\frac{p_f - p_0}{\varpi} = H + \frac{\omega^2(2r^2 - R^2)}{4g} = \frac{1}{g}(U_0 - U).$$

Pentru punctele dela periferie vom avea, aşa dar, ţinând seamă şi de (6)

$$\frac{p_f - p_0}{\varpi} = H + \frac{\omega^2 R^2}{4g} = \frac{1}{g} U_{0R} - U_R$$

sau, trecând totul în membrul al doilea:

$$0 = U'_{0R} - U'_R.$$

Dacă trecem dela cazul repausului absolut, resp. relativ, la acela al scurgerei (absolută, resp. relativă) prin orificiu, diferenţa între potenţialele totale a două puncte se prezintă ca diferenţă între energiile cinetice respective. În cazul mişcării relative (fiindcă pentru debit ne interesează vitesa relativă w) transformarea energiei potenţiale în cinetică (relativă) îşi găseşte expresia deasemenea în teorema lui *Bernoulli*, în care însă intervine şi potenţialul forţei de inerţie, adică a forţei centrifuge:

$$\left(U_0 + \frac{p_0}{\rho}\right) - \left(U + \frac{p}{\rho}\right) = \frac{w^2}{2} - \frac{w_0^2}{2},$$

și cum la orificiu avem în orice caz $p=p_0$, vom avea pentru poziția periferică a orificiului ($r=R$):

$$\frac{w^2-w_0^2}{2}=U_0-U=g\left(H+\frac{\omega^2R^2}{4g}\right)=\frac{p_f-p_0}{\rho}\ (static),$$

iar dacă $\frac{\Omega}{\Omega_0}=n$:

$$w=\sqrt{\frac{2g\left(H+\frac{\omega^2R^2}{2}\right)}{1-n^2}}.$$

In fine, cu coeficientul de debit: $m=\alpha\beta$ avem

$$q=m\Omega\sqrt{\frac{2g\left(H+\frac{\omega^2R^2}{2}\right)}{1-\beta^2n^2}}.$$

S'ar fi putut scrie direct acest rezultat, fără raționamentul riguros de mai sus, constatând că sarcina potențială asupra orificiului în cazul rotației a trecut dela H la $H+\frac{\omega^2R^2}{2}$, datorită suprainălțării $\frac{\omega^2R^2}{2}$ a nivelului la periferia vasului.

Aplicația Nr. 84. *Intr'un vas complet plin cu apă și ermetic închis* (Fig. 100) *intră un tub vertical, deschis la ambele capete, care la început este umplut până la B. Vasul se golește prin orificiul mic C (butelia lui Mariotte). Care va fi vitesa de scurgere la orificiu?*

Răspuns. La început avem $v=\sqrt{2gh}$, care scade până la $\sqrt{2ga}$, valoare atinsă în momentul când lichidul din tub (singurul care se golește) scade până la A, *permițând intrarea aerului în partea superioară a vasului*, când orificiul trebue să continue a debita sub sarcina $a>0$.

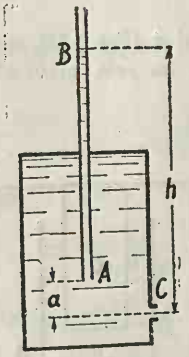


Fig. 100

Incepând din acel moment v rămâne un timp constant sub sarcina constantă, dată de nivelul din A, partea superioară a vasului conținând aer rarefiat, a cărui

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

presiune, plus acea a coloanei lichide până la A, echilibrează presiunea atmosferică ce se exercită pe mica suprafață liberă din A.

In momentul când suprafața liberă din vas s'a scoborât până la A, sarcina începe să scadă, odată cu scoborâres suprafeței libere generale, până când se anulează (cazul unui vas ce se golește printr'un orificiu).

Aplicația Nr. 85. *Două vase alăturate, pline cu apă, primul fiind alimentat cu debitul Q, prezintă în pereții laterali orificii rotunjite de secțiune Ω_2 și Ω_1* (Fig. 101), *prin care se scurge lichidul. Cari vor fi înălțimile h și h_1, atunci când se va stabili regimul permanent, și cari vor fi în acest caz vitesele v_1 și v_2 în centrele orificiilor ?*

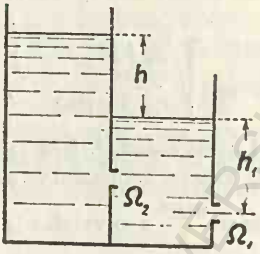


Fig. 101

Răspuns. Ținând seamă că energia cinetică la eșirea din Ω_2 se pierde prin ciocnire și frecare cu apa aproape în repaus din vasul al doilea, ecuația lui *Bernoulli*, în regimul permanent stabilit, dă:

$$h=\frac{v_2^2}{2g} \text{ și } h_1=\frac{v_1^2}{2g}.$$

Cum: $v_1=\frac{Q}{\Omega_1}$ și $v_2=\frac{Q}{\Omega_2}$, toate cantitățile cerute sunt determinate.

Aplicația Nr. 86. *In vasul A* (Fig. 102), *care este fix, plateşte un cilindru C, care poartă atârnat un vas B, iar prin orificiul D apa se scurge din A în B* (*Apometrul lui Prony*).

Cum va varia vitesa în D ?

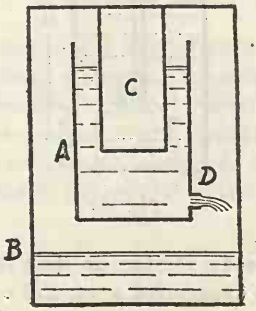


Fig. 102

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Răspuns. Debitul fiind Q, greutatea vasului B va crește în unitatea de timp cu ϖQ și deci volumul deslocuit de C în lichidul din A va crește cu Q, volum egal cu al apei scurse. Nivelul din A va rămâne, așa dar, constant și viteza în D de asemenea.

Aplicația Nr. 87. *Cunoscând la vasul din Fig. 103 raportul* $n = \frac{\Omega}{\Omega_0}$, *înălțimea* h *și viteza* v_0 *cu care nivelul se scoboară, să se găsească coeficientul de debit.*

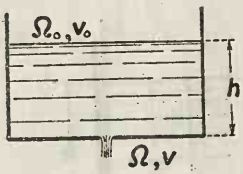


Fig 103

Răspuns. Avem prin formula lui *Toricelli* și ecuația de continuitate:

$$v = \alpha\sqrt{\frac{2gh}{1-n^2}} = \frac{v_0\Omega_0}{\beta\Omega} = v_0\frac{1}{n\beta},$$

de unde:

$$m = \alpha\beta = \frac{v_0}{\sqrt{2gh}} \cdot \frac{\sqrt{1-n^2}}{n}.$$

Aplicația Nr. 88. *Vasul precedent este alimentat cu un debit* Q_0 *mai mic ca acela al orificiului. Să se găsească cantitatea de apă scursă prin orificiu, până în momentul când înălțimea lichidului va scădea la cota* z *deasupra fundului.*

Răspuns. Avem

$$m\Omega\sqrt{2gz}\,dt - Q_0 dt = -\Omega_0 dz,$$

de unde:

$$dt = \frac{\Omega_0 dz}{Q_0 - m\Omega\sqrt{2gz}} = \frac{\Omega_0 dz}{m\Omega\sqrt{2g}(\sqrt{k}-\sqrt{z})},$$

punând, ca și la calculul timpului de golire:

$$\sqrt{k} = \frac{Q_0}{m\Omega\sqrt{2g}}.$$

Cantitate scursă prin orificiu: $m\Omega\sqrt{2gz}\,dt$ devine deci

$$\frac{\Omega_0\sqrt{z}\,dz}{\sqrt{k}-\sqrt{z}},$$

iar dela h la z:

$$\Omega_0\int_h^z \frac{\sqrt{z}\,dz}{\sqrt{z}-\sqrt{z}} = \Omega_0\left[(\sqrt{h}-\sqrt{z})(\sqrt{h}+\sqrt{z}+2\sqrt{k}) + 2k\log\frac{\sqrt{h}-\sqrt{k}}{\sqrt{z}-\sqrt{k}}\right].$$

ECU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Aplicația Nr. 89. *O stavilă S de lărgime L este ridicată cu o viteză uniformă c* (Fig. 104). *Câtă apă se scurge în timpul deschiderei complete a stavilei, în care timp muchia stavilei trece de la cota H la cota h sub nivelul liber?*

(*A se aplica formula mai exactă a debitului printr'un orificiu de dimensiuni verticale relativ mari*).

Răspuns. Intr'un interval dt, cota muchiei inferioare a stavilei sub suprafața liberă fiind z, se scurge o cantitate

$$\frac{2}{3} mL\sqrt{2g}\,(H^{3/2} - z^{3/2})\,dt,$$

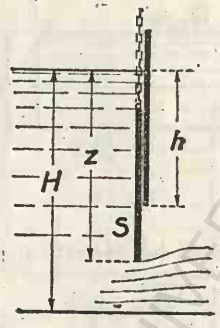


Fig. 104

și cum $dt = -\frac{dz}{c}$, vom avea:

$$Q = \frac{2}{3}\frac{mL\sqrt{2g}}{c}\int_H^h (H^{3/2} - z^{3/2})\,dz$$

$$= \frac{2}{15}\frac{mL\sqrt{2g}}{c}\left[3H^{5/2} - 5H^{3/2}h + 2h^{5/2}\right].$$

Aplicația Nr. 90. *Printr'un vas de un profil cu curbură variind treptat* (Fig. 90) *se scurge apă în mișcare permanentă. Fie* $\Omega_0 = 4m^2$, $\Omega = 0{,}03\,m^2$, $h = 3\,m$.

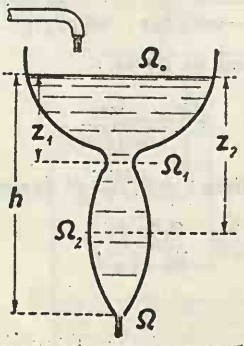


Fig. 105.

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Să se calculeze înălțimile de suprapresiune (presiune absolută minus cea atmosferică) la cotele $z_1=1m$ și $z_2=2m$ sub suprafață, secțiunile la acele cote fiind respectiv $\Omega_1=0,04\,m^2$, și $\Omega_2=0,1\,m^2$.

Răspuns. Avem pentru Ω_1

$$\frac{p_1-p_0}{\varpi}=z_1-\frac{v_1^2-v_0^2}{2g},$$

iar pentru Ω_2:

$$\frac{p_2-p_0}{\varpi}=z_2-\frac{v_2^2-v_0^2}{2g}.$$

Dar v_0, v_1 și v_2 rezultă din valoarea lui v, care, ținând seamă și de $\alpha=097$, este:

$$\frac{v^2}{2g}=\alpha^2\frac{h}{1-n}=2,823m, \text{ căci } n=\frac{\Omega}{\Omega_0}=\frac{3}{400};$$

urmează

$$\frac{v_0^2}{2g}=\frac{v^2}{2g}\left(\frac{\Omega}{\Omega_0}\right)^2\cong 0, \quad \frac{v_1^2}{2g}=\frac{v^2}{2g}\left(\frac{\Omega}{\Omega_0}\right)^2=1,588\,m,$$

$$\frac{v_2^2}{2g}=\frac{v^2}{2g}\left(\frac{\Omega}{\Omega_2}\right)^2=0,254\,\text{m}.$$

Rezultă

$$\frac{p_1-p_0}{\varpi}=-0,588\,m \quad \text{și} \quad \frac{p_2-p_0}{\varpi}=1,746\,m.$$

Aplicația Nr. 91. *La vasul din figura 106 se cere, ce lungime z trebue să aibă tubul, pentru ca presiunea p' din A să fie $\frac{1}{k}$ din o atmosferă?*

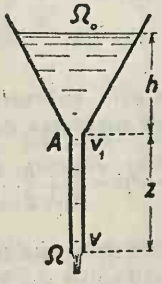


Fig. 106

Răspuns. Se obține imediat rezultatul, aplicând teorema lui *Bernoulli* între A și gura conductei, unde vitesele sunt egale:

$$\frac{p_1}{\varpi}+z=\frac{p_0}{\varpi}, \text{ de unde: } z=\frac{p_0(k-1)}{\varpi k}.$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Aplicația Nr. 92. *La dispozitivul din* Fig. 107, *cu scurgere permanentă prin A, să se calculeze vitesa v_1, cu care lichidul s'ar scurge prin orificiul B (presupus la început închis) din fundul vasului din stânga, în momentul când s'ar deschide acest orificiu, în ipoteza aproximativă că presiunea p din C s'ar menține permanent.*

Răspuns. Când orificiul B este închis, avem la punctul de ramificație C (teorema lui *Bernoulli* între suprafața liberă și C):

$$\frac{p}{\varpi}=\frac{p_0}{\varpi}+\frac{h}{2}-\frac{v^2-v_0^2}{2g}$$

și, cum vitesa din C este egală cu vitesa din A, vom avea:

$$v=\alpha\frac{2gh}{1-n^2} \quad \text{cu} \quad n=\frac{\Omega}{\Omega_0} \quad \text{și} \quad \alpha=0{,}97.$$

Înlocuind în prima ecuație pe v și $v_0=nv$, găsim:

$$\frac{p}{\varpi}=\frac{p_0}{\varpi}-h\left(\alpha^2-\frac{1}{2}\right),$$

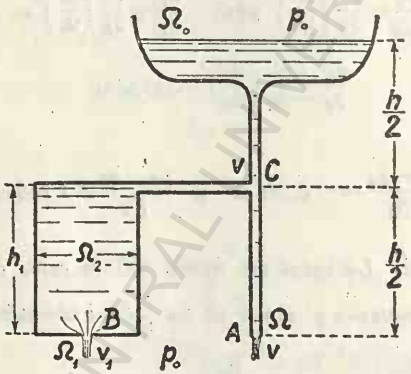


Fig. 107

ceeace se putea obține și mai repede prin aplicarea teoremei lui *Bernoulli* între C și A (vitese egale), ținând seamă de pierderea de sarcină $(1-\alpha^2)h$ în A:

$$\frac{p_0}{\varpi}+(1-\alpha^2)h=\frac{p}{\varpi}+\frac{h}{2}.$$

Cunoscând astfel presiunea, care domnește în partea superioară a vasului din stânga în momentul deschiderii orificiului din B și în ipoteza că presiunea p s'ar menține permanent în C (ceea ce s'ar putea admite aproximativ, în cazul când debitul prin Ω_1 ar fi neglijabil față de debitul prin Ω), am avea după stabilirea regimului:

$$v_1=\alpha\sqrt{\frac{2g\left(h_1+\frac{p-p_0}{\varpi}\right)}{1-n_1^2}}, \quad \text{cu} \quad n_1=\frac{\Omega_1}{\Omega_2}$$

sau, neglijând pe n_1^2 față de *1* și luând de ex. $h_1=2^m$ și $h=4^m$:

$$v_1=\alpha\sqrt{2g\left((h_1-h\,(\alpha^2-\frac{1}{2}\right)}=2{,}09\ m/sec.$$

Pentru calculul debitelor este nevoe a se introduce secțiunile, de ex.:

$$\Omega=8\ cm^2,\ \Omega_0=2^{m^2},\ \Omega_1=\Omega,\ \Omega_2=1^{m^2}.$$

Aplicația Nr. 93. *Într'un tub de pompare vertical de forma din* Fig. 108 *se mișcă în sus un piston cu o acceleraţie constantă. Cunoscând presiunea* p_A *din A, să se găsească presiunile* p_B, p_C, p_D *în funcție de deplasarea z a pistonului.*

Răspuns. Neavând o mișcare permanentă, vom pleca de la ecuația de mișcare generală după axa *z* în forma ei cunoscută (*Euler*):

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}=F_z-j_z=-g-\frac{dv_z}{dt}$$

și cum coordonata verticală a unei molecule, sau a unui strat de lichid orizontal infinit de mic, nu variază cu *t* după aceiași lege în cele trei porțiuni *AB*, *BC*

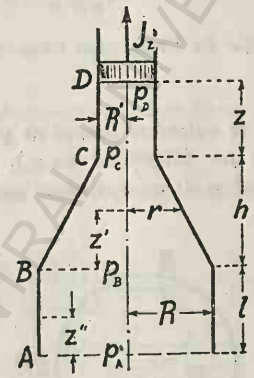


Fig. 108

și *CD*, vom integra pe porțiuni, începând, pentru simplitate, a măsura pe z, z', z'' respectiv de la limita inferioară a fiecărei porțiuni. Vom scrie $j_z=j$.

AB. În porțiunea *AB* vom avea

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z''}=-\left[g+j\left(\frac{R'}{R}\right)^2\right]$$

și, integrând între limitele $z''=0$ și $z''=l$:

$$\frac{p_B-p_A}{\rho}\left[g+j\left(\frac{R'}{R}\right)^2\right]l.$$

BC. În porțiunea *BC* vom avea analog, însă cu *r* variabil $\left(r=R-z'\frac{R-R'}{h}\right)$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z'} = -\left[g + j\left(\frac{R'}{r}\right)^2\right]$$

și, după integrarea între limitele $z'=0$ și $z'=h$:

$$\frac{p_C - p_B}{\rho} = -\left[g + j\frac{R'}{R}h.\right].$$

Adunând cu precedenta relație, găsim pe $\frac{p_C - p_A}{\rho}$.

CD. În fine, în porțiunea *CD*, care este cilindrică ca și prima, între limitele $z=0$ și z obținem:

$$\frac{p_D - p_C}{\rho} = -(g+j)z.$$

Adunând membru cu membru cele trei relații găsite, obținem:

$$\frac{p_D - p_A}{\rho} = -\left[g + j\left(\frac{R'}{R}\right)^2\right]l - \left(g + j\frac{R'}{R}\right)h - (g+j)z =$$

$$-g(l+h+z) - j\left[\frac{R'}{R}l\left(\frac{R'}{R}+h\right)+z\right].$$

Înlocuind pe z în funcție de timp, vom avea modul cum variază presiunile cu timpul.

Aplicația Nr. 94. *Să se calculeze timpul de golire printr'un orificiu mic* Ω, *așezat la punctul cel mai de jos (neglijând pe* v_0*), dintr'un un vas a) sferic, b) hemisferic, c) cilindric orizontal și d) un vas conic vertical.*

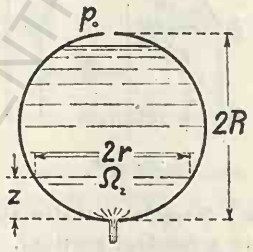


Fig. 109

Soluție. a) *Pentru un vas sferic* (Fig. 109) avem:

$$\Omega_z \equiv \pi r^2 = \pi(2Rz - z^2)$$

și

$$T = \frac{1}{m\Omega\sqrt{2g}}\int_0^{2R}\frac{\Omega_z}{\sqrt{z}}dz \equiv \frac{16\pi R^{5/2}}{15m\Omega\sqrt{2g}}.$$

b) *Pentru un vas cilindric orizontal* (Fig. 109) de dinmetru R și lungime l:

$$\Omega_z = 2rl \quad \text{cu} \quad r=\sqrt{2Rz-z^2}$$

$$T=\frac{2l}{m\Omega\sqrt{2g}}\int_0^{2R}\sqrt{2R-z}\,.\,dz=\frac{8}{3}\frac{lR^{3|2}}{m\Omega\sqrt{g}}\,.$$

d) Pentru un vas conic cu axa verticală și cu vârful în jos (Fig. 110), presupunând că orificiul Ω de la vârful conului este neglijabil față de Ω_0:

$$\Omega_z=\Omega_0\frac{z^2}{h^2}\,, \qquad T=\frac{2}{5}\frac{\Omega_0\sqrt{h}}{m\Omega\sqrt{2g}}.$$

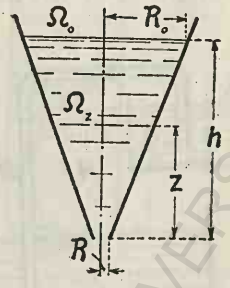


Fig. 110

Exemplu: $\Omega_0 = 100\ cm^2$, $\Omega = 1\ cm^2$, $h = 50\ cm$ și $m = 0{,}7$ dau:

$$T = 9{,}12\ sec.$$

Dacă diametrul R al orificiului nu se poate neglija față de R_0, integrarea între R_0 și R dă:

$$T=\frac{2}{15}\frac{\Omega_0\sqrt{h}}{m\Omega\sqrt{2g}}\left[3+4\frac{R}{R_0}+8\frac{R^2}{R_0{}^2}\right].$$

paranteza putându-se scrie și: $3+4\sqrt{\frac{\Omega}{\Omega_0}}+8\frac{\Omega}{\Omega_0}$.

Aplicația Nr. 95. *Un vas în formă de rotație, cu axa verticală și cu meridiana dată de ecuația:* $r=az^n$, *este plin cu lichid până la înălțimea h. Să se găsească*

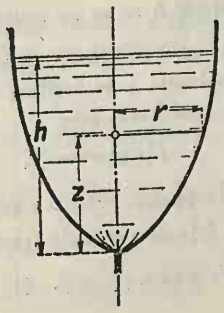


Fig. 111

BCU IAȘI - CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

raportul dintre timpul de golire T şi volumul V al lichidului, golirea făcându-se printr'un orificiu mic la fundul vasului (Haton de la Goupillière).

Răspuns. Avem $T=\frac{2\pi a^2}{m\Omega\sqrt{2g}}\frac{\sqrt{h^{4n+1}}}{4n+1}$, $V=\int_0^h r^2\pi\,dz=\frac{\pi a^2}{2n+1}h^{2n+1}$,

$$\frac{T}{V}=\frac{1}{m\Omega\sqrt{2gh}}\frac{4n+2}{4n+1}.$$

Aplicaţia Nr. 96. *Un sifon de secţiune Ω conduce apa dintr'un vas cu secţiune Ω_0 într'un bazin cu suprafaţă de apă invariabilă, aşezată cu H mai jos. Să se calculeze timpul, după care scurgerea va înceta prin scoborârea nivelului din vas la capătul sifonului.*

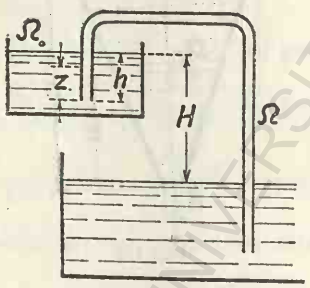


Fig. 112

Răspuns. Pentru o poziţie cu $z<h$ a nivelului în chestiune avem în intervalul dt:

$$-\Omega dz=m\Omega\sqrt{2g(H-h+z)}\,dt,$$

de unde, în intervalul $z=h$ până la zero:

$$T=\frac{2\Omega_0}{m\Omega\sqrt{2g}}\left(\sqrt{h}-\sqrt{H-h}\right).$$

Aplicaţia Nr. 97. *Pe o bară, înclinată cu unghiul B faţă de orizontală, alunecă o găleată plină cu lichid, care se scurge printr'un orificiu de fund, aşezat în axa vasului.*

In cât timp înălţimea iniţială h se se va micşora la z?

Răspuns. Am presupus, ca în figură, că vasul este constrâns a păstra poziţia verticală (căci el este solicitat a se înclina, ca şi nivelul apei).

Acceleraţia vasului dealungul barei este

$$j=g(\sin\beta-f\cos\beta),$$

f fiind coeficientul de frecare respectiv. Dacă α este înclinarea câmpului rezultant $\overline{F}=\overline{g}-\overline{j}$ (*verticală fictivă*) faţă de verticală (reală), vom avea

$$F=g\cos\alpha+j\sin(\alpha-\beta)$$

BIBLIOTECA CENTRALĂ UNIVERSITARĂ

și cum depărtarea orificiului de la suprafața liberă este $z \sin \alpha$, suprapresiunea pe orificiu, presupus astupat (adică în stare hidrostatică relativă), va fi

$$p_f - p_0 = \rho F z \sin \alpha = \rho g [\cos\alpha + (\sin\beta - f\cos\beta) \sin(\alpha - \beta)] z \sin\alpha.$$

După cum am văzut și în cazul unui vas rotitor (Aplicația Nr. 83), energia potențială din starea statică la locul orificiului în cazul scurgerei se regăsește în-

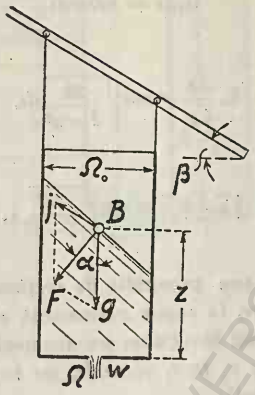


Fig. 118

treagă sub formă cinetică, căci presiunea ce domnește în stare statică (orificiul închis), intervenind scurgerea, scade la p_0; vom avea, așa dar, pe verticala fictivă a orificiului, între suprafață și fund:

$$\frac{w^2 - w_0^2}{2} = \frac{p_f - p_0}{\rho},$$

unde în membrul al doilea apare suprapresiunea hidraulică din centrul orificiului *în repaus relativ*.

Mai riguros putem spune, că pentru cazul scurgerei avem ecuația lui *Bernoulli* în mișcare relativă:

$$\frac{w^2 - w_0^2}{2} \equiv U_0 + \frac{p_0}{\rho} - \left(U + \frac{p}{\rho}\right) \equiv U_0' - U,$$

unde U este potențialul forței exterioare masice (gravitatea compusă cu forța de inerție a mișcării de antrenare).

Cum orificiul se găsește în axa vasului, h inițial și z curent din dreptul orificiului nu diferă, în cazul mișcării, de înălțimile din cazul când vasul ar fi fix.

Așa dar, în orice moment avem:

$$\frac{w^2 - w_0^2}{2} = gz [\cos\alpha + (\sin\beta - f\cos\beta) \sin(\alpha - \beta)] \sin\alpha = kz,$$

punând $g [\cos\alpha + \sin(\beta - f\cos\beta) \sin(\alpha - \beta)] \sin\alpha \equiv k$. Reamintim (Vol. I p. 256), că

$$tg\alpha = \frac{1}{\frac{g}{j\cos\beta} + tg\beta} = \frac{1}{\frac{1}{(\sin\beta - f\cos\beta)\cos\beta} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta}} = \frac{(\sin\beta - f\cos\beta)\cos\beta}{1 + (\sin\beta - f\cos\beta)\sin\beta}.$$

Punând $n = \frac{\Omega}{\Omega_0}$, tragem :

$$w = \sqrt{\frac{2kz}{1-n^2}}.$$

Într'un interval dt avem

$$\Omega_0 dz = m\Omega w dt$$

sau

$$-\Omega_0 \frac{dz}{\sqrt{z}} = m\Omega \sqrt{\frac{2k}{1-n^2}}\, dt,$$

de unde

$$2\Omega_0 (\sqrt{h} - \sqrt{z}) = m\Omega \sqrt{\frac{2k}{1-n^2}}\, t.$$

Aplicaţia Nr. 98. *Un vas prizmatic de secţiune Ω_0 (Fig. 103) este alimentat cu un debit necunoscut Q_0, care, în regim permanent, se scurge printr'un orificiu de fund, înălţimea apei în vas fiind h. La un un moment dat alimentarea este oprită şi suprafaţa lichidului scade cu z_1 în t_1 secunde, iar în t_2 scade cu z_2.*

Să se găsească Q_0 (Prony).

Răspuns. Avem

$$t_1 = \frac{2\Omega_0}{m\Omega\sqrt{2g}} (\sqrt{h} - \sqrt{h-z_1}),$$

$$t_2 = \frac{2\Omega_0}{m\Omega\sqrt{2g}} (\sqrt{h} - \sqrt{h-z_2}),$$

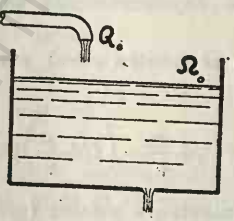


Fig. 103

iar în regim permanent

$$Q_0 = m\Omega\sqrt{2gh}.$$

Eliminând din cele trei ecuaţii pe Ω şi pe h, găsim

$$Q_0 - \Omega_0 \frac{t_2^2 z_1 - t_1^2 z_2}{t_1 t_2 (t_2 - t_1)}$$

Aplicaţia Nr. 99. *Două vase prizmatice verticale cu secţiuni orizontale Ω_1 şi Ω_2 au un tub de legătură de secţiune Ω_3 şi, în prelungirea axei acestuia pe pere-*

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

tele opus al vasului al 2-lea, un orificiu lateral Ω. Pornind cu nivele egale, după un timp oarecare se constată că nivelul în vasul cu Ω_1 a scăzut cu x, iar cel de al doilea cu y (Fig. 104). *Să se găsească relația între x și y.*

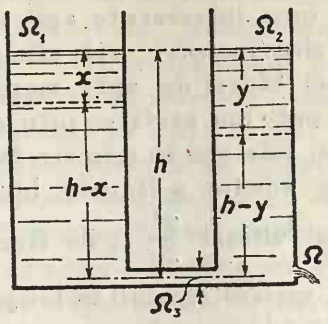


Fig. 104

Răspuns. Dacă m și m_3 sunt coeficienții de debit pentru Ω și Ω_3, avem pentru debitul lui Ω:

$$m\Omega\sqrt{2g\,(h-y)}\,dt=\Omega_1 dx+\Omega_2 dy,$$

iar pentru acela al lui Ω_3:

$$m_3\Omega_3\sqrt{2g\,(y-x)}\,dt=\Omega_1 dx\,.$$

Punând

$$\frac{m\Omega}{m_3\,\Omega_3}\equiv k\,,\qquad \frac{\Omega_2}{\Omega_1}\equiv n,\qquad 2g\,(h-y)\equiv u^2\,,\qquad 2g\,(y-x)\equiv v^2$$

și eliminând pe dt, rămâne

$$(ku-v)\;(u\,du+v\,dv)=nuv\,du,$$

care, prin substituția $v\equiv uz$, dă

$$du\,[k-(n+1)\,z+kz^2-z^3]=u\,(z^2-kz)\,dz.$$

Integrarea:

$$\log n=\int\frac{z^2-kz}{k-(n+1)z+kz^2-z^3}\,dz+C$$

se efectuează prin fracțiuni simple, k și n fiind date. Se obține astfel u în funcție de z sau de $\frac{v}{u}$ și, prin eliminarea lui v și u între această relațiune și ecuațiunile lor de definiție, obținem relația căutată. Constanta de integrare C se determină prin condiția finală $x=y=h$.

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

2. Studiul loviturilor de berbec în conductele motrice (cu pereţi elastici). Teoria lui Allievi.

Vom relua studiul propagării unei perturbaţiuni, pentru a-l completa în vederea unei interesante aplicaţiuni practice.

In conductele zise *motrice*, cari alimentează turbinele ce folosesc puterea unei căderi de apă, mediul de transmitere al perturbaţiunilor, ce pot lua naştere prin o manevră oarecare a organelor de închidere, este apa în mişcare ($v_0 \neq 0$). Presiunile de regim, pe cari le vom admite a fi cele hidrostatice (făcând abstracţie de înălţimea vitesei $\frac{v^2}{2g}$ şi de frecare, care micşorează puţin acele presiuni), variază sensibil în lungul conductei, datorită pantei ei, în general rapide, care face ca presiunea să meargă crescând dela camera de apă, unde este minimă, spre turbine, unde este maximă.

Unda elastică, ce ia naştere într'o asemenea conductă prin manevrarea bruscă a vanajului dela turbine, este independentă de această repartiţie a presiunilor hidrostatice şi se propagă în lungul conductei, reflectându-se succesiv la camera de apă şi la sursa de emisiune şi suprapunându-se în orice punct cu undele anterior reflectate precum şi cu starea de regim a presiunilor şi vitezelor. Problema nu diferă de cea tratată în capitolul V.7. decât prin faptul că aci, presiunile fiind mari, trebue ţinut seama şi de elasticitatea conductei, care, nefiind absolut rigidă, participă la deformaţia ansambului (Ω varind cu timpul t), după modulul de elasticitate al materialului, din care sunt făcuţi pereţii.

Cum suprapresiunile, precum am menţionat, sunt independente de repartiţia presiunei statice iniţiale (permanente până în momentul începerei perturbaţiei), singura care este funcţiune de înclinarea conductei, vom considera şi aci conducta orizontală, aplicând aceleaşi procedee de calcul, cu neglijarea şi aci a frecărilor cu pereţii.

Vom considera cazul cel mai simplu, când diametrul conductei şi grosimea pereţilor sunt constante dealungul conductei, aplicarea la casurile mai complicate cerând numai o adaptare a calculului.

In ipotezele simplificatoare, arătate mai sus, *Allievi* a studiat după cum urmează *loviturile de berbec*, adică creşterile de presiune

peste presiunea statică, ce pot lua naştere prin diverse feluri de manevră, în diferitele secţiuni ale conductei.

Neglijarea frecării (cu pereţii conductei) şi a viscozităţei apei, care sunt o cauză de amortizare, conduce evident la rezultate în exces faţă de cele reale, fiindcă frecările şi viscozitatea au un efect de frânare. Diferenţa totuşi nu poate fi mare, deoarece pierderile de sarcină ce intervin sunt mici faţă de sarcinile (înălţimile de presiune) ce intră în joc.

Sursa perturbaţiilor, precum am menţionat mai sus, este la obturatorul sau vanajul turbinei, care, sub acţiunea regulatorului, potriveşte automat secţiunea orificiului dela capătul aval al conductei, în scop de a regla admisiunea debitului motor după cerinţa în putere utilă, determinând la nevoe (în caz de scurtcircuit pe linie, când debitarea apei trebue oprită) închiderea completă a conductei într'un timp foarte scurt.

Apa scurgându-se de la rezervor sau *camera de punere sub sarcină* (castelul de apă) spre sursa perturbaţiunilor (turbină), vom lua axa $+x$ în sensul contrar, care este sensul emisiunei acestora. Totuşi vom considera vitesele ca pozitive în sensul $-x$, în care se face scurgerea; aceasta implică schimbarea semnului lui v în ecuaţiile mişcării semipermante. Astfel, ecuaţia mecanică (29) din pag. 349 devine

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{g}{\varpi}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \text{sau} \quad \frac{\partial v}{\partial t}=g\frac{\partial y}{\partial x} \tag{8}$$

dacă în loc de presiune introducem înălţimea ei reprezentativă, adică sarcina y.

In ecuaţia de continuitate trebue să ţinem seama că Ω nu mai este constant, conducta fiind deformabilă în sens transversal

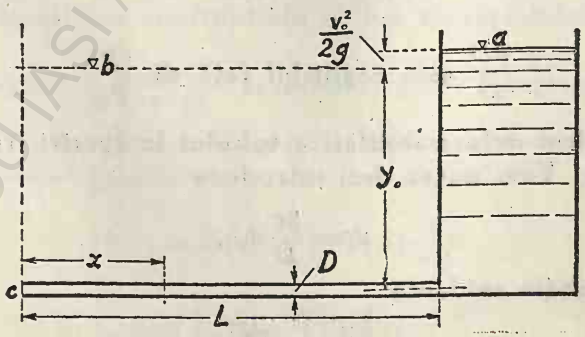


Fig. 105

prin variaţia presiunii din interior (deformaţia longitudinală la curbe se poate neglija şi uneori este chiar suprimată prin întrebuinţarea de rosturi de dilataţie).

Plecând de la forma generală a acestei ecuaţiuni (şi aci v are semnul schimbat) pentru o vână fluidă

$$\frac{\partial(\rho\Omega v)}{\partial x}=\frac{\partial(\rho\Omega)}{\partial t},$$

vom introduce din nou aproximaţia, făcută şi anterior, de a înlocui în membrul întâiu ρ prin o valoare medie ρ_0 dealungul axei x. Pe de altă parte, ţinând seamă cu privire la primul membru, scris: $\rho_0\frac{\partial(\Omega v)}{\partial x}$, că pe distanţa dx variaţiile relative ale lui Ω sunt neglijabile faţă de variaţiile relative ale lui v, vom scrie, neglijând în acel membru pe $\frac{1}{\Omega}\frac{\partial\Omega}{\partial x}$ faţă de $\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial x}$:

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{1}{\Omega}\frac{\partial\Omega}{\partial t}=\frac{1}{\rho_0 p_0'}\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{1}{\Omega}\frac{d\Omega}{dp}\frac{\partial p}{\partial t},$$

unde

$$p'_0=\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_0.$$

Efortul inelar în pereţi este legat de presiunea interioară, diametrul D şi grosimea e prin relaţia

$$pD=2e\sigma,$$

de unde, e putând fi considerat constant la variaţiile presiunei:

$$pdD+Ddp=2ed\sigma,$$

unde primul termen se poate neglija faţă de cel de al doilea, căci

$$\frac{dD}{D}\text{ este neglijabil faţă de }\frac{dp}{p}$$

din cauza micei deformabilităţi a tubului la sporiri relativ mari de presiune. Vom putea deci introduce

$$dp=\frac{2e}{D}d\sigma,$$

precum şi relaţia evidentă

$$\frac{d\Omega}{\Omega}=2\frac{dD}{D},$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

ecuația de continuitate devenind

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial t}\left(\frac{1}{p_0'}+\frac{\rho_0}{E}\frac{D}{e}\right), \tag{9}$$

unde s'a înlocuit

$$\frac{dD/D}{d\sigma}=\frac{1}{E}.$$

E fiind modulul de elasticitate al peretelui (iar $\frac{1}{E}$ coeficentul său de compresibilitate).

Această relație diferă de aceea, găsită în cazul pereților rigizi, numai prin aceea, că factorul din membrul al doilea $\frac{1}{p_0'}=\frac{\rho_0}{\varepsilon}$ este aici înlocuit cu cantitatea din paranteză, egală cu

$$\frac{\rho_0}{\varepsilon}+\frac{\rho_0}{E}\frac{D}{e}.$$

Insemnând cu c^2 inversul acestui multiplicator al expresiei $\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial t}$ din (9),

adică

$$c=\frac{\sqrt{\frac{g}{\varpi_0}}}{\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{E}\frac{D}{e}}} \tag{10}$$

(care pentru $E=\infty$ se reduce la valoarea găsită anterior $c=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho_0}}$), ecuația de continuitate va lua aceeași formă ca în cazul pereților rigizi: $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{g}{c^2}\frac{\partial y}{\partial t}$, rezultând prin integrarea aceloraşi ecuațiuni (a doua totuși cu semn schimbat, din cauza schimbării sensului pozitiv pentru v):

$$y-y_0=F\left(t-\frac{x}{c}\right)+f\left(t+\frac{x}{c}\right) \tag{I}$$

$$v-v_0=-\frac{g}{c}F\left(t-\frac{x}{c}\right)+\frac{g}{c}f\left(t+\frac{x}{c}\right) \tag{II}.$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Noua valoare (10) a lui c va avea evident aceeași semnificație ca și în cazul pereților rigizi, fiind vitesa de propagare a perturbațiilor în tubul elastic.

Făcând în expresia lui c: $\varpi = 1000\ kg/m^3$, $\varepsilon = 2{,}07 + 10^8\ kg/m^2$ (cca. de 100 ori mai mic ca E al fierului), obținem

$$c = \frac{9.900}{\sqrt{48{,}3 + k\frac{D}{e}}},$$

unde luăm $k = 0{,}5$ pentru fier sau oțel și $k = 1$ pentru fontă.

Valoarea lui c este cuprinsă între 400 și $700\ m/sec$ pentru conductele curente de diametru mare și grosime mică și între 1200 și $1300\ m/sec$ pentru conductele de diametru mic și grosime mare.

Introducând condițiunile inițiale, adică evoluția cunoscută a cauzei perturbației, ecuațiile (I, II) pot servi la determinarea valorilor F și f, în orice moment t pentru orice abscisă x, conducând la rezolvirea numerică a tuturor problemelor relative la mișcarea variată (nepermanentă) a apei în conducte, unde necunoscuta interesantă este suprasarcina $y - y_0$.

Vom numi *lovitură de berbec*, sau *undă directă*, ansamblul valorilor succesive ale presiunii p sau sarcinei y, care la o variație a ariei orificiului prin obturator se propagă dealurgul conductei de la acest orificiu în spre camera de sarcină (deci în sensul $+x$), iar *contralovitură* sau *undă reflectată*, lovitura sau unda ce se reflectă de la camera de sarcină înapoi spre orificiu (deci în sensul $-x$), suprapunându-se loviturii directe.

Dacă conducta are o lungime finită L, lovitura directă într'o secție oarecare cu abscisa x va avea o durată limitată la intervalul de timp de la $\frac{x}{c}$ la $\frac{2L-x}{c}$, timpul fiind măsurat dela producerea perturbației ($t=0$), iar ecuațiile ce se aplică în acest interval sunt:

$$y - y_0 = F\left(t - \frac{x}{c}\right), \qquad \text{(I)'}$$

$$v - v_0 = -\frac{g}{c}F\left(t - \frac{x}{c}\right) \qquad \text{(II)'}$$

Pentru $t = 0$, deci pentru orice argument negativ (inclusiv zero), funcțiunea F trebue să fie nulă.

Dacă conducta are o lungime finită L, lovitura directă într'o secţie oarecare cu abscisa x va avea o durată limitată la intervalul de timp dela $\frac{x}{c}$ la $\frac{2L-x}{c}$, timpul fiind măsurat de la producerea perturbaţiei ($t=0$). Ecuaţiile ce se aplică în acest interval sunt:

$$y-y_0=F\left(t-\frac{x}{c}\right)$$

$$v-v_0=-\frac{g}{c}F\left(t-\frac{x}{c}\right)$$

Pentru $t=0$ (când am convenit că începe perturbaţia), deci pentru orice argument negativ (inclusiv zero), funcţiunea F trebue să fie nulă.

După acest interval începe în numita secţie contra-lovitura, deoarece perturbaţia directă, reprezentată prin F, după reflexia ei la camera de sarcină a avut vreme să se înapoieze cu vitesa $-c$, sub formă de contralovitură (fiind atunci reprezentată de funcţia f), pentru a se suprapune cu lovitura directă F în continuare (dacă bineînţeles aceasta continuă a se produce în secţia x), adică cu valoarea lui F din acelaşi moment t. Aşa dar, după momentul $\frac{2L-x}{c}$ se aplică în numita secţiune ecuaţiile complete:

$$y-y_0=F+f \qquad (I)$$

$$v-v_0=-\frac{g}{c}(F-f). \qquad (II)$$

Pe acestea le vom considera deocamdată în intervalul de la $\frac{2L-x}{c}$ la $\frac{2L+x}{c}$, înainte ca perturbaţia, reflectându-se a doua oară, de data aceasta la obturator, să ajungă din nou la secţiunea x.

Funcţia f se poate elimina, ţinând seamă că pentru $x=L$ (la cameră) sarcina rămâne constantă şi egală cu y_0 în orice moment t. Vom avea, aşa dar,

$$f\left(t+\frac{L}{c}\right)=-F\left(t-\frac{L}{c}\right) \qquad (11)$$

Aceasta arată că $f\left(t+\frac{L}{c}\right)$ nu este altceva decât reflexia lui $F\left(t-\frac{L}{c}\right)$ la extremitatea conductei, unde ea se produce cu semn schimbat, tocmai pentru a satisface ecuaţia $y-y_0=0$ la acea extremitate. Această relaţie este de altfel independentă de timpul $t>0$. Ori, valoarea oricăreia dintre cele două funcţiuni depinde numai de argument, iar nu de modul cum de ex. acest argument α din f se desface în t şi $\alpha-t$.

De aceea relaţia (11) nu va înceta de a exista dacă, luând un t posterior, adică mai mare cu un anumit interval, am micşora simultan termenul spaţiului $\left(+\frac{L}{c}\right.$, respectiv $\left.-\frac{L}{c}\right)$ cu aceeaşi cantitate. Fie $\frac{L-x}{c}$ această cantitate şi t' momentul posterior cu acest interval,

$$t'=t+\frac{L-x}{c}.$$

Vom avea evident

$$f\left(t'+\frac{x}{c}\right)=-F\left(t'-\frac{2L-x}{c}\right)$$

sau, cum t' este orice valoare a variabilei *timp* mai mare ca $\frac{L-x}{c}$ (căci $t>0$) şi cum f nu intervine decât de la $t=\frac{2L-x}{c}$, adică de la

$$t'=\frac{3L-2x}{c}>\frac{L-x}{c}$$

înainte, t' poate fi înlocuit prin t, adică putem scrie

$$f\left(t+\frac{x}{c}\right)=-F\left(t-\frac{2L-x}{c}\right). \qquad (12)$$

Aşa dar, dacă luăm ca origina timpului ($t=0$) începutul perturbaţiei, pentru valoriile lui $t>\frac{2L-x}{c}$ vom face înlocuirea (12), eliminând-se astfel din (II) funcţia f. Această relaţie ne arată, că efectul contraloviturii în secţiunea x este egal şi de sens contrar cu acela, pe care lovitura directă l-ar produce *în*

același moment t în secția cu abscisă $(2L-x)$ (reflexia optică a secțiunii x în raport cu extremitatea amonte), în cazul când conducta ar fi prelungită indefinit dincolo de camera de sarcină; acest efect, în realitate, îl produce acum dincoace de cameră, în urma reflexiunii elastice la capătul amonte, ca într'un tub acustic cu capătul deschis.

Putem da egalității (12) și o altă interpretare echivalentă, dacă în membrul al doilea desfacem termenul spațiului $\frac{2L-x}{c}$ în $\frac{2(L-x)}{c}$ și $\frac{x}{c}$, scriind

$$f\left(t+\frac{x}{c}\right)=-F\left[t-\frac{2(L-x)}{c}-\frac{x}{c}\right]$$

și contopim prima parte $\frac{2(L-x)}{c}$ cu — în termenul timpului.

In acest caz, vedem că efectul contraloviturii în secțiunea x este egal și de semn contrar cu acela, pe care lovitura directă l-a produs în aceeași secțiune x, la un moment cu $\frac{2(L-x)}{c}$ anterior.

Interpretarea aceasta din urmă este echivalentă cu cea dintâi, deoarece tot perturbațiunea F, care a trecut prin secțiunea x cu $\frac{2(L-x)}{c}$ secunde anterior, în loc de a atinge în momentul t secțiunea $\frac{2L-x}{c}$ în cazul tubului indefinit, în realitate, lungimea tubului fiind finită și limitată la L, s'a reflectat, retrecând în momentul t prin x, însă cu semn inversat.

Sistemul celor două ecuațiuni cu y și v, reprezentând suprapunerea undei progresive cu cea regresivă, se va putea scrie, așa dar:

$$y-y_0=F\left(t-\frac{x}{c}\right)-F\left(t-\frac{2L-x}{c}\right) \qquad (I)'$$

$$v-v_0=-\frac{g}{c}\left[F\left(t-\frac{x}{c}\right)+F\left(t-\frac{2L-x}{c}\right)\right]. \qquad (II)'$$

Am văzut că schimbarea de semn prin reflexie la capătul amonte este impusă, pentru ca lovitura și contra-lovitura să-și

anihileze reciproc efectul, asigurându-se constanţa lui y_0 (neputând fi altfel din cauza constanţei nivelului din cameră).

Pentru valoarea lui v însă, care nu impune o asemenea condiţiune la capătul amonte, reflexia se face fără schimbare de semn şi deci cu dublarea valorii dată de unda progresivă. Această necesitate fizică apare analitic ca o consecinţă a schimbării de semn, impusă funcţiuni F, după cum rezultă din ultimul termen al ecuaţiei (II)′ pentru $x = L$, comparativ cu valoarea loviturei directe singure.

Notăm în treacăt că lucrurile s'ar petrece exact invers, adică funcţiunea F nu ar schimba de semn, în cazul când capătul amonte, unde se face reflexia, ar fi închis; în acest caz s'ar impune din contră un v nul (ceea ce ar implica pentru acel capăt $f=F$), iar presiunea ar fi dubla aceleia ce s'ar produce prin unda progresivă în aceeaşi secţiune $x=L$, pentru un tub indefinit.

Şi de fapt în acest din urmă mod se produc reflexiiile la capătul de la obturator, unde secţiunea se poate privi ca închisă, având numai un mic orificiu.

Am considerat pân'aci suprapunerea unei singure reflexii în secţiunea x.

Studiul s'ar complica însă extrem de mult dacă, în analiza fenomenului fizic, am considera individual unda directă şi cele succesiv reflectate, pentru a calcula efectul suprapunerilor consecutive.

Intradevăr, ar trebui să urmărim în acest caz unda directă, apoi reflectarea ei succesiv la camera de apă, la obturator, iarăşi la camera de apă ş.a.m.d. In acest caz am avea la un moment dat t, în o secţiune x, de suprapus efectul unicei unde emisă direct de sursă, cu efectul simultan al unei serii de reflexiuni ce se perindă în ambele sensuri, provenind toate dela unda directă şi care, în cazul unei coducte indefinite, ar fi constituit prelungirea undei directe, propagată neîncetat în sensul $+x$.

O asemenea urmărire a fenomenului ar fi extrem de laborioasă. *Allievi* a întrebuinţat o metodă cu mult mai simplă, aplicându-o în particular la punctul cel mai desavantajat, adică la secţiunea $x=0$ (care este sediul sursei perturbaţiei, ce impune legea de variaţie a vitesei), unde totodată se găseşte şi unul din cele două puncte de reflexie. Pentru această secţiune, anume, el a considerat în orice moment pe de o parte, ca fiind cuprins

în $F(t)$, efectul suprapus al undei actuale directe (dacă persistă), cu acela al tuturor reflexiilor care vin de la obturator, formând astfel *rezultanta progresivă*, iar pe de altă parte, ca fiind cuprins în $f(t)$, efectul reflexiilor în bloc ce vin dela camera de apă, adică rezultanta *regresivă* și care a pornit de fapt și ea dela obturator sub formă de $F(t)$ cu $\mu = \frac{2L}{a}$ secunde înainte, înapoindu-se cu semn schimbat (întrucât F a fost definit a reprezenta funcția presiunei) în același moment sub formă de

$$f(t) \equiv -F(t-\mu).$$

Suntem astfel conduși a considera valorile lui F (plecând de la o valore particulară oarecare t_1 a timpului, cuprinsă între 0 și μ) în momentele succesive t_1, $t_2 \equiv t_1 + \mu$, $t_3 \equiv t_2 + \mu \ldots$ etc, când F capătă respectiv valorile F_1, F_2, $F_3 \ldots$ repetând operațiunea pentru diferite momente t_1, cuprinse (sau *intercalate*) în prima etapă a timpului, adică de la 0 la μ (când $f(t)$ este nul, căci în $F(t-\mu)$ argumentul este negativ), momente cărora le va corespunde, la fiecare, o serie de valori ale timpului înlănțuite în progresie aritmetică $(t_2, t_3 \ldots)$, intercalate în etapele următoare (rația fiind μ).

Pentru funcția $f(t) = -F(t-\mu)$ vom scrie evident, simplificând notația:

$$f(t_n) \equiv f_n = -F(t_n - \mu) \equiv F(t_{n-1}) \equiv F_{n-1}.$$

In particular:

$$f_1 \equiv -F_0 = 0,$$

argumentul lui F fiind în acest caz negativ.

Prin combinarea ecuațiilor stabilite se vor putea, după cum vom vedea, elimina valorile particulare ale funcției F.

Pentru o altă secțiune x ar fi suficient a lua valorile lui F din secțiunea $x=0$ cu $\frac{x}{c}$ secunde anterior, deci $\equiv F\left(t - \frac{x}{c}\right)$, și valorile lui f sau $-F(t-\mu)$ din aceeași secțiune $x=0$ cu $\frac{x}{c}$ secunde posterior, deci $\equiv F(t-\mu+\frac{x}{c})$, și a efectua deasemenea eliminarea acestor valori particulare ale lui F.

In cele ce urmează vom urmări studiul numai pentru secțiunea $x=0$, atunci când, plecând de la regimul permanent, se exe-

cută la obturator o manevră oarecare. Mai întâiu, pentru prima etapă μ (durata loviturii directe, când funcțiunea $f=-F(t-\mu)$, adică $f_1=-F_0$ este nulă), ținând seamă de ecuația scurgerii prin orificiu (formula lui *Toricelli*), vom calcula pentru orice moment t_1 primul termen F_1 al seriei $F_1, F_2 \ldots$ etc, apoi vom determina succesiv pe ceilalți termeni ai acestei serii, corespunzători momentelor înlănțuite $t_2 \equiv t_1 - \mu$, $t_3 \equiv t_1 + 2\mu \ldots$ etc.

Fiecare din acești termeni, luat cu $-$, va da valcarea lui f după μ secunde, adică: $-F_n \equiv f_{n+1}$.

Vom avea, întrebuințând literele mari pentru variabilele ce se referă la secțiunea $x=0$ (cu excepția valorilor inițiale y_0 și v_0, cari sunt comune tutulor secțiunilor) și însemnând cu Z suprasarcina $Y-y_0$:

$$\left.\begin{aligned} Z_1 &\equiv Y_1 - y_0 = F_1 - F_0 \quad \text{la} \quad t_1 \ (\text{știm că } F_0 = 0) \\ Z_2 &\equiv Y_2 - y_0 = F_2 - F_1 \quad \text{„} \quad t_1 + \mu \equiv t_2 \\ Z_3 &\equiv Y_3 - y_0 = F_3 - F_2 \quad \text{„} \quad t_1 + 2\mu \equiv t_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (I'')$$

$$\left.\begin{aligned} V_1 - v_0 &= -\frac{g}{c}(F_1 + F_0) \quad \text{la} \quad t_1 \\ V_2 - v_0 &= -\frac{g}{c}(F_2 + F_1) \quad \text{„} \quad t_1 + \mu \equiv t_2 \\ V_3 - v_0 &= -\frac{g}{c}(F_3 + F_2) \quad \text{„} \quad t_1 + 2\mu \equiv t_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (II'')$$

Seriile de valori $Y_1, Y_2 \ldots$ (sau $Z_1 Z_2 \ldots$) și $V_1, V_2 \ldots$, astfel înlănțuite, despărțite prin intervale μ, nu depind decât de condițiile inițiale și de pozițiile obturatorului în momentele $t_1, t_1+\mu, t_1+2\mu \ldots$, fără a depinde și de pozițiile intermediare ale acestuia.

Înlănțuirea analitică a acestor valori se vede după eliminarea valorilor lui F (punând pentru generalizare $Z_0 \equiv Y_0 - y_0 = F_0 = 0$):

$$\left.\begin{aligned} Z_0 + Z_1 &\equiv y_0 + Y_1 - 2y_0 = \frac{c}{g}(v_0 - V_1) \\ Z_1 + Z_2 &\equiv Y_1 + Y_2 - 2y_0 = \frac{c}{g}(V_1 - V_2) \\ Z_2 + Z_3 Y &\equiv {}_2 + Y_3 - 2y_0 = \frac{c}{g}(V_2 - V_3) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Această sistem de relaţii poate deveni un sistem de recurenţă pentru aflarea lui $Y_1, Y_2 \ldots$, dacă introducem relaţia ce există între aceste cantităţi şi V_1, $V_2 \ldots$ etc, eliminând astfel pe aceste din urmă: ori, valorile $V_1, V_2, \ldots$ etc ale vitezelor sunt legate respectiv de vitesele de scurgere prin orificiul obturatorului $u_1, u_2 \ldots$, în virtutea ecuaţiei de continuitate (vitesele, invers proporţionale cu secţiunile), iar aceste din urmă vitese depind, conform relaţiei lui *Toricelli*, de sarcina potenţială existentă în amonte de orificiu:

$$u_0 = \sqrt{2gy_0}\ ,\quad u_1 = \sqrt{2gY_1}\ ,\quad u_2 = \sqrt{2gY_2} \ldots$$

In consecinţă, cunoscând legea variaţiei ariei orificiului (cauza perturbaţiei), problema se rezolvă din aproape în aproape. Raportul ariei momentane a orificiului către secţiunea conductei la diferitele momente va fi respectiv egal cu raportul invers al vitezelor:

$$\frac{v_0}{u_0}, \frac{V_1}{u_1} \ldots,$$

iar raportul η dintre aria momentană de deschidere a orificiului şi valoarea ei de regim, adică cea maximă (η putându-se numi *grad* momentan *de deschidere*):

$$\eta_0 = 1\ ;\ \eta_1 = \frac{V_1}{u_1} : \frac{v_0}{u_0}\ ,\ \text{de unde}\ V_1 = \eta_1 u_1 \frac{v_0}{u_0} = \eta_1 \sqrt{2gY_1}\ \frac{v_0}{u_0}; \ldots,$$

ceee ce ne permite a scrie de ex. prima ecuaţie (13):

$$Y_1 - y_0 = \frac{cv_0}{gy_0}\,(y_0 - \eta_1 \sqrt{Y_1 y_0}). \qquad (14)$$

Vom prefera însă a reprezenta pe Y prin $\frac{u^2}{2g}$ spre a nu avea radicale şi, în fine, vom pune

$$\frac{cv_0}{2gy_0} \equiv \frac{cv_0}{u_0^2} \equiv \rho\ ,$$

ρ fiind o caracteristică a conductei, depinzând de elementele ei constructive (c: funcţie de k, D, e şi E) şi hidraulice (y_0 şi v_0).

Cu aceste notaţiuni sistemul (13) devine un sistem de ecuaţii de al doilea grad în u:

$$\left.\begin{aligned} u_0^2+u_1^2-2u_0^2&=2\rho u_0(\eta_0 u_0-\eta_1 u_1)\\ u_1^2+u_2^2-2u_0^2&=2\rho u_0(\eta_1 u_1-\eta_2 u_2)\\ u_2^2+u_3^2-2u_0^2&=2\rho u_0(\eta_2 u_2-\eta_3 u_3)\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\}. \qquad (13.1)$$

In loc de u putem introduce raportul către viteza normală de scurgere prin orificiu $\frac{u}{u_0}\equiv\zeta$ și deci $\frac{u_0}{u_0}\equiv\zeta_0=1$, scriind ecuațiile:

$$\left.\begin{aligned} \zeta_0^2+\zeta_1^2-2&=2\rho\,(\eta_0\zeta_0-\eta_1\zeta_1)\\ \zeta_1^2+\zeta_2^2-2&=2\rho\,(\eta_1\zeta_1-\eta_2\zeta_2)\\ \zeta_2^2+\zeta_3^2-2&=2\rho\,(\eta_2\zeta_2-\eta_3\zeta_3)\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\}. \qquad (13.2)$$

sistem de legătură între valorile seriei înlănțuite $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ etc, cari dau pe Y corespunzătoare prin relația

$$Y=\frac{\zeta^2 u_0^2}{2g}.$$

Sistemul fundamental (13.2), care conține toată teoria loviturilor de berbec, poate rezulta din aplicarea repetată a ecuației generale de recurență

$$\zeta_{n-1}^2+\zeta_n^2-2=2\rho(\eta_{n-1}\zeta_{n-1}-\eta_n\zeta_n),$$

începând cu $n=1$.

Vedem că valoarea relativă a intensității loviturii de berbec

$$\zeta^2\equiv\frac{u^2}{u_0^2}\equiv\frac{Y}{y_0}$$

depinde pe de o parte de legea de variație cu timpul a orificiului de scurgere, exprimată prin valorile η, iar pe de altă parte de caracteristica unică ρ a conductei, care depinde de toate condițiile inițiale.

Aplicația Nr. 100. *A se face calculul loviturii de berbec în secțiunea $x=0$ în cazul închiderii complete brusce, numind închidere bruscă (în opoziție cu închiderea lentă) o închidere, a cărei durată este*

$$T<\mu\equiv\frac{2L}{c}.$$

Răspuns. In etapa loviturii directe ($t_1<\mu$) distingem două intervale: primul $0\to T$, al doilea $T\to\mu$.

a) Fie t_1 cuprins în al doilea interval (între T și μ), în care viteza de scurgere prin orificiul închis este evident nulă ($V_1=0$). Prima ecuație (13) ne procură valoarea lui $Z_1=Y_1-y_0$, care este valoarea maximă:

$$Z_1\equiv Y_1-y_0=\frac{cv_0}{g}\equiv Z_m \quad \text{la} \quad t_1>T \text{ și } <\mu. \qquad (a)_1$$

Celelalte ecuații (13) ne dau pentru același interval în celelalte etape:

$$Z_2\equiv Y_2-y_0=-\frac{cv_0}{g} \quad \text{la} \quad t_1+\mu\equiv t_2 \qquad (a)_2$$

$$Z_3\equiv Y_3-y_0=\frac{cv_0}{g} \quad \text{la} \quad t_1+2\mu\equiv t_3 \qquad (a)_3$$

. . . . . ,

astfel că valoarea maximă a *suprapresiuni*, resp. a *depresiunii*, măsurată în înălțime piezometrică, este $\frac{cv_0}{g}$.

În practică valorile reale respective merg în scădere din cauza amortizării, produsă de frecările în conductă etc.

b) Fie acum t_1 cuprins în intervalul prim $(0\to T)$ al primei etape μ, când raportul η_1 al orificiului către valoarea lui de regim scade de la *1* către *0* după o lege oarecare. Obținem pe u deasemenea din prima ecuație (13.1) (se poate întrebuința și (13), care arată imediat că $Z_1=Y_1-y_0<Z_m$):

$$u_1^2-u_0^2=2\rho u_0(u_0-\eta_1 u_1), \qquad (b)_1$$

care, dacă introducem pe η_1 în funcție de timpul t, dă pe u_1 sau Y_1 în funcție de t_1 pentru toate mementele t_1 din primul interval al primei etape μ.

Pentru valoarea finală $\eta_1=0$ avem

$$u_1^2-u_0^2=2\rho u_0^2$$

și regăsim:

$$Z_1\equiv Y_1-y_0=\frac{cv_0}{g}=Z_m$$

din cazul *a*). Pentru celelalte momente scriem pe $(b)_1$ sub forma (14)

$$Z_1\equiv Y_1-y_0=\frac{cv_0}{gy_0}(y_0-\eta_1\sqrt{Y_1y_0}),$$

ecuație de gradul al doilea în Y_1:

$$Y_1^2-2Y_1\left(y_0+\frac{cv_0}{g}+\frac{v_0^2c^2\eta_1^2}{2g^2y_0}\right)+\left(y_0+\frac{cv_0}{g}\right)^2=0,$$

din ale cărei rădăcini se va lua numai aceea, care satisface inegalitatea:

$$Y_1<y_0+\frac{cv_0}{g} \quad \text{sau} \quad Z_1\equiv Y_1-y_0<Z_m.$$

Această soluție este

$$Y_1=y_0+\frac{cv_0}{g}+\frac{v_0^2c^2\eta_1^2}{2g^2y_0}-\sqrt{\left(\frac{cv_0}{g}+\frac{v_0^2c^2\eta_1^2}{2g^2y_0}\right)+\frac{v_0^2c^2}{g^2}(\eta_1^2-1)}.$$

Pentru $\eta_1=1$ se verifică $Y_1=y_0$.

Să trecem acum la etapa următoare cu t_2 cuprins între μ și 2μ. Ecuația a doua (13) pentru primul interval (b) (dela μ până la $\mu+T$) din această a doua etapă, introducând $\eta_2=0$ și adunând cu prima ecuație, dă:

$$2(u_1^2-u_0^2)+(u_2^2-u_0^2)=2\rho u_0^2, \text{ sau } 2Z_1+Z_2=Zm \qquad (b)_2$$

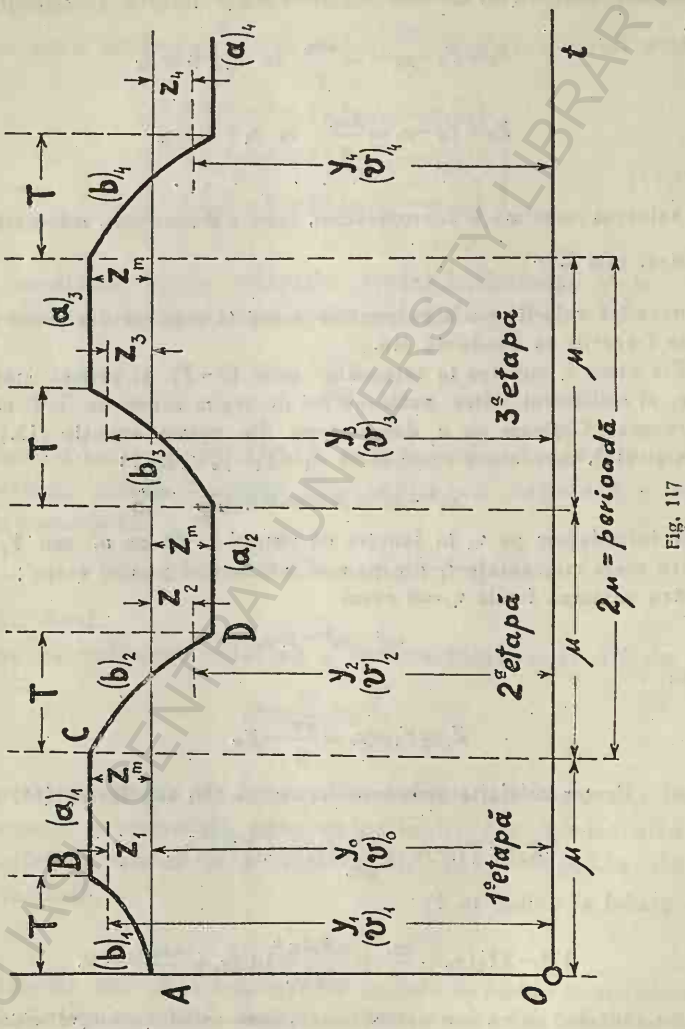


Fig. 117

și cum pentru momentul inițial $t_1=0$ al primei etape avem $z_1=0$, vom avea la începutul $t_2=\mu$ al fazei a doua: $Z_2=Zm$, adică valoarea finală din intervalul $T\leq t_1\leq\mu$.

Curbele reprezentative $Z(t)$ din intervalele corespunzătoare b) ale primelor două etape, adică $0<t_1<T$ și $t_2=t_1+\mu$ (Fig. 117), curbe ce se întind respectiv dela A la B și dela C la D, sunt legate prin relația $(b)_2$, care dă $Z_2=Zm-2Z_1$.

BCU TS CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Pentru intervalul $(a)_2$, care urmează lui $(b)_2$, și cele următoare $(a)_3$, $(a)_4$... s'a văzut că valorile se reproduc alternativ, ceea ce se întâmplă și pentru intervalele $(b)_3$, $(b)_4$..., care reproduc curba $(b)_2$ prin iversare alternativă pentru același motiv ($\eta_2=\eta_3=...=0$). Și într-adevăr, relațiile (13.1), începând de la a treia, capătă forma

$$u_3^2-u_0^2=-(u_2^2-u_0^2) \quad \text{sau} \quad Z_3=-Z_2$$

$$u_4^2-u_0^2=-(u_3^2-u_0^2) \quad \text{sau} \quad Z_4=-Z_3$$

. . . . . ,

ceeea ce arată că, începând din punctul D (vezi linia ondulată, fig. 117) se reproduc, inversate, ordonatele cu μ secunde anterioare.

Precum se vede, adevărata perioadă a undei este 2μ, fiind compusă deci din două etape.

Pentru o altă secțiune a conductei, cu abscisa $x>0$, construcția diagramei se poate face cu ajutorul aceleia întocmite pentru secțiunea $x=0$, cu alte cuvinte ordonatele $y-y_0$ (ale unei diagrame $x>0$) se deduc din ordonatele $Y-y_0$ ale diagramei $x=0$ *).

3. Studiul unei vine de gaz.

a) **Scurgerea unui gaz printr'un orificiu de perete subțire.** Acest fenomen de scurgere se poate socoti *adiabatic*, din cauza evoluției lui rapide. El este dominat de ecuația lui *Bernoulli*, care pentru gaze are forma:

$$gz+\int\frac{dp}{\rho}+\frac{v^2}{2}=const$$

sau, densitatea fluidului fiind foarte mică, în care caz variațiile spațiale ale potențialului gravitațiunii se pot neglija față de acelea ale restului termenilor:

$$\int\frac{dp}{\rho}+\frac{v^2}{2}=const. \qquad (15)$$

Această formă particulară, care în cazul evoluției adiabatice ($pv^\gamma\equiv\frac{p}{\rho^\gamma}=const$) se mai poate scrie, precum vom arăta imediat:

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}+\frac{v^2}{2}=const, \qquad (15.1)$$

face ca scurgerea unui gaz printr'un orificiu să prezinte oarecari particularități, cari o deosebesc de aceea a lichidelor.

*) (Vezi Bull. de Math. et de Phys. Buc. No. 1, 2, 3 1936—37).

Ultima formulă se obţine folosind ecuaţia adiabatică sub formă diferenţială ($v = \frac{1}{\rho}$):

$$v dp + \gamma p dv \equiv \gamma d(pv) + (1-\gamma) v dp = 0$$

sau

$$v dp = \frac{\gamma}{\gamma - 1} d(pv) ,$$

adică, de introdus în (15):

$$\frac{dp}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} d\left(\frac{p}{\rho}\right),$$

Luând origina unui fir într'un punct interior, unde vom presupune că există o vitesă oarecare v_0, ecuaţia lui *Bernoulli* (15) între acest punct şi un alt punct (sau secţiune) oarecare al firului în evoluţie adiabatică se va scrie atunci sub forma (15.1):

$$v^2 - v_0^2 = \frac{2\gamma}{\gamma - 1}\left(\frac{p_0}{\rho_0} - \frac{p}{\rho}\right) \equiv \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_0}{\rho_0}\left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right] . \quad (15.2)$$

Când p_0 diferă destul de puţin de p, pentru ca pătratul diferenţei $1 - \frac{p}{p_0} \equiv \varepsilon$ să fie neglijabil faţă de 1, formula (15.2), desvoltând $\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = (1-\varepsilon)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$ în serie şi păstrând numai primii doi termeni, devine

$$v^2 - v_0^2 = 2 \frac{p_0}{\rho_0} \varepsilon \equiv 2 \frac{p_0 - p}{\rho_0} ,$$

ca la lichide.

Vom presupune şi aci mişcarea aproximativ permanentă (pentru a putea aplica teorema lui *Bernoulli*) şi totodată potenţială (pentru a putea admite aceiaşi constantă în (15.1) pentru întreaga masă).

Fie σ secţiunea firului într'un punct oarecare al axei lui, definit de lungimea acesteia s dintre acest punct şi origină, ds fiind lungimea unui element al firului în direcţia scurgerii.

Dacă $c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$ şi $c_0 = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}$ sunt vitesele sunetului pentru valorile corespunzătoare p, ρ, respectiv p_0, ρ_0, relaţia (15) se poate scrie, precum am văzut la (15.2):

$$v^2 + \frac{2\gamma}{\gamma-1} c^2 = v_0^2 + \frac{2\gamma}{\gamma-1} c_0^2. \qquad (16)$$

Cum în regimul permanent debitul de masă al unui fir este același pentru diferitele secțiuni, avem:

$$\rho v \sigma = \rho_0 v_0 \sigma_0 = const. \qquad (17)$$

sau

$$log\sigma = -logv - log\rho,$$

de unde (derivând în raport cu s)

$$\frac{1}{\sigma}\frac{d\sigma}{ds} = -\frac{1}{v}\frac{dv}{ds} - \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dp}\frac{dp}{ds} = -\frac{1}{v}\frac{dv}{ds}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right), \qquad (18)$$

căci după definiția lui c și după (15):

$$\frac{d\rho}{dp} = \frac{1}{c^2} \quad \text{și} \quad \frac{dp}{\rho} = -vdv.$$

Din (18) rezultă că, într'un fir ce în direcția s se strâmtează (deci cu $\frac{d\sigma}{ds}$ negativ), după cum v este mai mic sau mai mare decât c, vitesele v cresc (și c după (16) descrește) sau viceversa. Pentru un fir ce se lărgește ($\frac{d\sigma}{ds}$ pozitiv) lucrurile se petrec invers. Mai scurt, se poate spune că *la un fir ce se strâmtează, vitesa curentului și vitesa de sunet locală se apropie tot mai mult una de alta, pe când la un fir care se lărgește, ele se îndepărtează tot mai mult una de alta.*

Aceste concluziuni se pot trage și din reprezentarea grafică (Fig. 118) a relațiilor (16) și (17).

Din egalitatea $c^2 = \frac{\gamma p}{\rho}$ și relația adiabatică $\frac{p}{\rho^\gamma} = const$ rezultă întradevăr că c^2 este proporțional cu $\rho^{\gamma-1}$, astfel că (17) prin eliminarea lui ρ se poate scrie:

$$c^{\frac{2}{\gamma-1}} v\sigma = c_0^{\frac{2}{\gamma-1}} v_0\sigma_0. \qquad (19)$$

Dacă luăm pe c ca abscisă și v ca ordonată, relația (16) dintre vitesele c și v dealungul axei aceluiași fir reprezintă o elipsă fixă, ce trece prin punctul, luat ca inițial, (c_0, v_0). Pentru

orice valoare a parametrului $\frac{\sigma}{\sigma_0}$, relația (19) dintre valorile c și v compatibile cu acest raport, reprezintă o curbă de speță hiperbolică, ale cărei intersecții cu elipsa menționată arată soluțiile de pe firul considerat, adică perechile de valori c și v, cari pot avea loc efectiv pentru valoarea aleasă a parametrului. Pentru o anumită valoare a lui $\frac{\sigma}{\sigma_0}$, pe care o vom numi critică, însemnând-o cu $\frac{\sigma'}{\sigma_0}$, această curbă va atinge elipsa și în acest punct se poate arăta că există egalitatea $v=c$. Intradevăr, avem pentru tangenta la elipsă $\frac{dv}{dc}=-\frac{2}{\gamma-1}\frac{c}{v}$, iar la curba iperbolică $\frac{dv}{dc}=-\frac{2}{\gamma-1}\frac{v}{c}$, și cum la punctul de contact valorile trebue să fie egale, vom avea $v=c$, iar acest punct se va găsi în consecință pe dreapta $v=c$. Fie D acest punct, care corespunde secțiunii $\sigma=\sigma'$. Celelalte curbe iperbolice, trasate pe figură: AA', BB', CC', împreună cu aceea, tangentă în D la elipsă, corespund raporturilor

$$\frac{\sigma/\sigma_0}{\sigma'/\sigma_0}\equiv\frac{\sigma}{\sigma'}=8,4,2,1,$$

putându-se lua de acum înainte ca parametru acest raport $\frac{\sigma}{\sigma'}$ în locul raportului $\frac{\sigma}{\sigma_0}$, unde σ_0 era o valoare arbitrară.

In D avem, cum am spus, secțiunea critică σ', cea mai mică posibilă a firului, care la punctul inițial are secțiunea σ_0.

Intradevăr, pentru σ mai mic, intersecțiile curbelor iperbolice cu elipsa devin imaginare și scurgerea adiabatică permanentă este imposibilă. Dreapta $v=c$, care bisectează unghiul drept vOc, desparte două regiuni, una superioară, în care avem $v>c$ și alta inferioară, în care avem $v<c$.

Diagrama pune în evidență că, pentru o secțiune oarecare, există pe fir două perechi de valori v și c posibile, adică realizabile, precum au arătat de altfel *Reynolds* și alții, găsindu-se una sub punctul D, când $v<c$, alta deasupra lui D, când $v>c$. In regiunea inferioară unde $v<c$, la un fir ce se strâmtează, adică *convergent*, punctul reprezentativ, luând succesiv pozițiile A', B' C' până la D, unde se atinge secțiunea critică σ' (adică cea minimă),

vitesa v creşte şi c descreşte; contrariul se întâmplă la un fir divergent. In partea superioară ($v > c$), la un fir *convergent*, punctul reprezentativ ia poziţiunile succesiv A, B, C, pentru care vitesa v descreşte şi vitesa sunetului c creşte, contrariu întâmplându-se la un fir divergent. Aşa dar, în ambele cazuri, la un fir ce se strâmtează de la secţiunea σ_0 spre secţiunea critică σ', fie că vitesa v este mai mare fie că este mai mică decât vitesa c a sunetului (corespunzătoare valorilor locale p şi ρ), v şi c

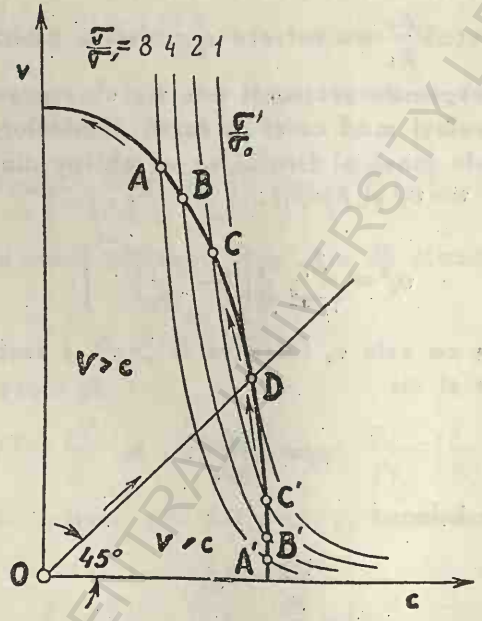


Fig. 118

vor varia în sensul de a se apropia una de alta, pe când pentru un fir ce se lărgeşte v şi c se vor îndepărta. Acest rezultat a fost constatat adinioară pe altă cale.

Bine înţeles, în practică se poate întâlni oricare din aceste cazuri, fie cu evoluţia gazului $A' \to D$ sau $A \to D$ (fir convergent), fie cu evoluţia $D \to A'$ sau $D - A$ (fir divergent). In toate aceste 4 cazuri, presiunea, după cum rezultă din (18), descreşte continuă în sensul creşterei lui v, adică $\overrightarrow{A'DA}$, sau creşte continuu în sensul $\overrightarrow{ADA'}$.

Să considerăm acum un anumit caz precis, cazul particular al unui gaz, care dintr'un vas, în care presiunea este p_0 şi densitatea ρ_0, se scurge într'un spaţiu, unde domneşte presiunea $p_1 < p_0$, printr'un orificiu mic, către care se îndreaptă firele. Fiindcă presiunea va scădea în continuu de la A' la A, evoluţia va avea loc în sensul arătat de săgeţi pe fig. 118. Este evident că la origina unui fir ne vom găsi atunci în regiunea $v < c$, că firul va începe prin a fi convergent şi că presiunea va descreşte încontinuu. Punctul figurativ va merge dela A' spre $B'C'$ etc.

Dacă raportul $\frac{p_0}{p_1}$ nu întrece o anumită limită ce se va preciza şi care corespunde secţiunii minime σ', scurgerea se va face, în esenţă, în acelaşi mod ca şi în cazul lichidelor, iar admiţând $v_0 = 0$, debitul de masă al firului se va obţine din formula (15.2) (în care punem $v = v_1$ şi $p = p_1$):

$$v_1^2 = \frac{2\gamma}{\gamma - 1}\frac{p_0}{\rho_0}\left[1 - \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right],$$

înmulţrnd pe v_1 cu aria σ_1 (care va fi $> \sigma'$) a secţiunei contractate de la ieşire şi cu

$$\rho_1 = \rho_0\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}};$$

eventual putem înlocui

$$\frac{\gamma p_0}{\rho_0} = c_0^2,$$

găsind astfel

$$v_1\rho_1\sigma_1 = \left(\frac{2}{\gamma - 1}\right)^{\frac{1}{2}} c_0\rho_0\left[\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{2}{\gamma}} - \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\right]^{\frac{1}{2}}\sigma_1. \qquad (20)$$

Dacă nu facem această înlocuire, dar înmulţim cu g şi însumăm $\Sigma\sigma_1 = \Omega_1$, unde Ω_1 este secţiunea contractată $m\Omega \equiv \Omega_1$, obţinem debitul de greutate

$$G = \Omega_1\sqrt{\frac{2g\gamma}{\gamma - 1}p_0\varpi_0\left[\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{2}{\gamma}} - \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\right]}, \qquad (21)$$

formulă ce se dă în *Hütte* cu o notaţie puţin diferită.

Este evident de la început, că această formulă are o limită de aplicabilitate, care se poate explica și prin limitarea inferioară a presiunii exterioare. Intradevăr, dacă p_1 ar fi putut lua orice valoare, am ajunge la paradoxul, ca de ex. pentru $p_1=0$, adică la scurgerea în vid, să avem un debit nul. Aceasta înseamnă însă că formulele mișcării, aplicate mai sus, nu mai sunt în asemenea condiții valabile. Chestiunea a fost lămurită de *Reynolds*. Produsul $v\rho$ la un fir în mișcare permanentă atinge un maximum, adică secțiunea unui fir atinge un minimum σ', atunci când, precum rezultă din (18) la $\frac{d\sigma}{ds}=0$, vitesa de scurgere devine egală cu vitesa sunetului în gaz la presiunea și densitatea respective. La scurgerea adiabatică relația

$$v^2=\frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0}\left[1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]=\frac{2}{\gamma-1}(c_0^2-c^2),$$

punând pentru aceea secțiune $v'=c'$, ne dă atunci

$$\frac{c'}{c_0}=\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (22)$$

Ținând seamă că

$$c'^2=\frac{\gamma p'}{\rho'} \quad \text{și} \quad c_0^2=\frac{\gamma p_0}{\rho_0}, \quad \text{iar} \quad \frac{p'}{p_0}=\left(\frac{\rho'}{\rho_0}\right)^{\gamma},$$

rezultă valorile critice ale lui ρ și p, corespunzătoare secției *critice* σ':

$$\frac{\rho'}{\rho_0}=\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}, \quad \frac{p'}{p_0}=\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}.$$

Dacă $\gamma=1.408$ găsim valorile critice:

$$\rho'=0.634\rho_0, \quad p'=0.521\,p_0\equiv\beta p_0.$$

De aci rezultă limitarea în jos a presiunii la un fir convergent, despre care am vorbit adineoară.

Când p_1 din afară e mai mic decât valoarea critică, adică $p_1<\beta p_0$, curentul, după ce depășește punctul critic în chestiune D (cu $p=\beta p_0$), dacă n'ar interveni efectul viscozității ar trebui să se lărgească treptat, continuându-și evoluția, cu p descrescând după curba $\overrightarrow{DA}$. In realitate, datorită frecării cu pereții orificiului, intră în joc viscozitatea și vâna se lărgește neregulat,

părăsind regimul potenţial, iar la o distanţă oarecare dincolo de orificiu (presupus în perete subţire) se preface în vârtejuri (cauza principală: frecarea cu pereţii). Secţiunile minime ale firelor se vor produce evident în vecinătatea orificiului de ieşire, la *secţiunea contractată* şi, dacă orificiul este mic, se pot admite în toată aria acestei secţiuni aceleaşi p', ρ' şi v'. Secţiunile elementare σ' de la toate firele se adună, dând factorul comun $\Omega' = m\Omega$, unde Ω ar fi secţiunea orificiului iar m coeficientul de contracţie, de circa $0{,}65$ la gaze.

In cazul acesta formulele (20) şi (21) se pot aplica la întreaga secţiune contractată Ω' şi, cum aci $v'=c'$, din (22) tragem

$$c'=v'=0{,}911\, c_0\,,$$

aceasta fiind vitesa aplicabilă secţiunii $\Sigma\sigma'=\Omega'$.

Aşa dar, în cazul, când $p_1<0{,}527\,p_0$, în formulele (20) şi (21) se va lua debitul de masă $\Omega'v'\rho'$, unde v' şi ρ' au valorile indicate mai sus:

$$\Omega'v'\rho'=\Omega' c_0\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{2}}\rho_0\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}},$$

iar pentru debitul total de greutate vom avea

$$G=\Omega'\sqrt{\gamma g\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\gamma+1/\gamma-1}p_0\varpi_0}, \qquad (23)$$

ultima formulă corespunzând cu aceea din *Häffe*.

b) **Scurgerea gazului prin ajutaje.** Să presupunem acum că gazul iese din rezervor, printr'un orificiu nu în perete subţire, ci armat cu un ajutaj (*Düse*), având un profil longitudinal întocmit astfel, în cât el să se potrivească şi în porţiunea $D\to A$ a elipsei, cu o formă de vână, care satisface ecuaţia debitului (20) sau elementele fig. 118, p continuând a scădea treptat şi sub p' critic, după ce acesta a fost atins. Inlesnindu-se prin ajutaj menţinerea regimului potenţial, adică evitându-se formarea de vârtejuri neregulate, pierderile de sarcină vor fi neglijabile şi va persista existenţa unei funcţii de vitesă, astfel că pe orice suprafaţă $\Sigma\equiv\Sigma\sigma$, normală pe fire (cu curbură neglijabilă, putându-se admite în Σ legea hidrostatică, deci în cazul gazelor aceaşi presiune), vitesa va continua să fie aceeaşi în Σ (constanta lui *Bernoulli* fiind aceiaşi pentru toate firele).

Intr-adevăr, după atingerea valorii minime $\Sigma\sigma'$ suprafața secțiunei se va mări treptat, firele devenind divergente (creșterea vitesei, concomitent cu creșterea secțiunei, nu constitue un paradox, fiindcă aci densitatea scade mai repede decât crește vitesa) și, dacă în lungul ajutajului secțiunea va varia suficient de treptat pentruca firele să nu se îndepărteze mult de paralelism, curbura suprafețelor $\Sigma\sigma$ va fi foarte mică și constanța vitesei în fiecare din aceste secțiuni, aproximativ plane, va continua să se mențină, conform ipotezei tranșelor.

Ca urmare a existenței funcțiunii de vitesă, constanța sumei $\int\frac{dp}{\rho}+\frac{v^2}{2}$ adică a sumei $\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}+\frac{v^2}{2}$ în întreaga massă, exprimată în special sub ultima formă (15.2) unde nu figurează ρ, arată că creșterea lui v dealungul unui fir implică descreșterea lui p.

Nimic nu va distinge acum în mod particular o *secțiune contrăctată*, înlocuită aci, în variația treptată a secțiunii, prin *secțiunea minimă*, iar formula (20) va fi valabilă pentru o secțiune oarecare plană Ω, putându-se scrie după ultima formă a lui (15.2) astfel:

$$G=\Omega\varpi\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}\sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}\left[1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]}, \qquad (24)$$

cu $\varpi=\varpi_0\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$. Putem constata și aici că, $\frac{G}{\Omega}$ variind proporțional cu expresia

$$Q=\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\sqrt{1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}},$$

debitul de greutate prin unitatea de secțiune va avea un maximum (deci secțiunea pentru același debit un minim) pentru $\frac{p}{p_0}=\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$, deci pentru presiunea critică p' găsită mai sus, care va corespunde lui $\Omega_{min}\equiv\Omega'\equiv\Sigma\sigma'$.

Așa dar, în cazul când valoarea finală de atins p_1 este mai mare ca valoarea critică p', secțiunea ajutajului va trebui să descrească mereu, adică ajutajul să fie convergent, fără a se putea atinge secțiunea Ω_{min}. In cazul însă $p_1<p'$ calculul ne arată, că este o secțiune Ω_{min}, care corespunde presiunii limită p', atinsă în descreșterea lui p către p_1, vitesa în creștere atingând acolo valoarea $v=c$. Dincolo de această secțiune ajutajul, pentru a

putea avea forma vinei teoretice, trebue să fie divergent, condiție pe care o vom presupune îndeplinită.

Debitul de greutate va fi atunci (o altă formă a formulei (24) sau (23), ușor de identificat):

$$G=\Omega_{\min}\sqrt{gp_0\varpi_0}\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}\,Q_{\max}=0{,}22\,\Omega_{\min}\sqrt{gp_0\varpi_0}\,.$$

Acest debit, pentru un $\Omega_{\min}$ dat, va procura prin relația (21) pe Ω_1 final, unde va domni p_1, ajutajul divergent servind astfel numai la efectuarea unei detente treptate, spre a se evita o cădere bruscă de presiune de la p' la p_1.

Putem urmări pe fig. 118, ce se petrece la scurgerea printr'un orificiu, atât când el este în perete subțire, cât și atunci când este armat cu un ajutaj, fie că $p_1>p'$ fie că $p_1<p'$. Urmărind vâna din amonte spre aval, evident că vom începe prin a avea $v<c$ și punctul figurativ se va deplasa dinspre A' către D, v crescând și p descrescând în continuu.

Dacă $p_1>p'$, punctul D nu va fi atins și punctul figurativ se va opri la un punct al elipsei, care pentru $p=p_1$, în cazul orificiului în perete subțire, va corespunde cu secțiunea contractată $\Omega'=m\Omega$, iar în cazul unui orificiu, fie făcut convergent într'un perete gros fie armat cu un ajutaj convergent, va corespunde cu secțiunea ultimă Ω. După acel punct presiunea rămânând constantă $p=p_1$, ar urma ca și v să fie constant, dând o vână cilindrică cu vitesa maximă de la ieșire. In realitate, din cauza difuzării vinei și a vârtejurilor, teoria de mai sus nu se aplică riguros și în exterior.

Dacă pentru același orificiu în perete subțire avem $p_1<p'$, atunci punctul D va fi atins în secțiunea contractată, respectiv în secțiunea finală a ajutajului convergent, nemai putându-se aplica mai departe teoria desvoltată, iar trecerea de la p' la p_1 se va face brusc, cu degenerarea vinei în vârtejuri.

In aceleași împrejurări de presiune: $p_1<p'$ însă, dacă după secțiunea minimă $\Omega_{\min}$, unde $p=p'$, se adaugă un ajutaj divergent în condițiile arătate mai sus, punctul figurativ va depăși punctul D, presiunea diminuând, treptat, până la atingerea presiunii $p_1<p'$.

Explicația fizică (precum arată *Reynolds*) a independenței debitului G de presiunea exterioară p_1, atunci când $p_1<p'$, rezidă în faptul că, atâta timp cât vitesa într'un punct în aval de secțiunea minimă întrece pe aceea a sunetului, corespunzătoare con-

diţiilor ce domină în acel punct, nici o schimbare nu se poate de aci transmite înapoi, ca să poată influenţa mişcarea din amonte. Intradevăr (*Hugoniot*), orice scădere sub p' a presiunii în acel punct din aval, dă loc la o undă antrenată cu însăşi vitesa în chestiune, care este mai mare decât vitesa sunetului şi deci a propagării undei, astfel că schimbarea menţionată nu poate influenţa înapoi secţiunea contractată.

Trebue notat însă că, în realitate, relaţia adiabatică nu este perfect satisfăcută din cauza viscozităţii şi a procesului termic. Incercările au arătat că presiunea critică p' se schimbă cu forma ajutajului, prin care se face scurgerea.

In aceleaşi condiţiuni de presiune: p_0 şi p_1 (cu condiţia ca formula (20) să fie aplicabilă, adică să avem $\sigma \geqq \sigma'$ în tot lungul firului), vitesele de scurgere v la diferitele gaze (admiţând acelaşi σ pentru ele şi $v_0=0$) sunt, după (15), proporţionale cu vitesele de sunet corespunzătoare

$$c_0 = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}$$

şi deci invers proporţionale cu $\sqrt{\rho_0}$, iar debitele de masă $v\rho\sigma$ sunt direct proporţionale cu $\sqrt{\rho_0}$ (întrucât, după (20) pentru aceeaşi secţiune, $v\rho$ este proporţional cu $c_0\rho_0$).

Aplicaţia Nr. 101. *a) A se calcula vitesa de ieşire a unui fluid cu ρ constant dintr'un vas sub presiune constantă p_0 în mediul exterior de o presiune mai mică p; b) a se arăta valoarea maximă posibilă a acestei vitese; c) apoi vitesa maximă tolerabilă pentru o variaţie permisă a lui ρ şi d) cazul cavitaţiuni.*

Răspuns. a) După teorema lui *Bernoulli*, atât în cazul unui lichid (Fig. 119) cu neglijarea greutăţii coloanei, de secţiune unitară, dintre A şi B faţă de p_0, cât

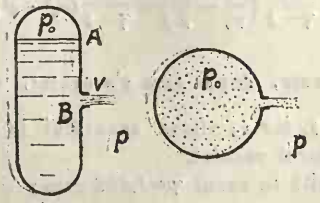


Fig. 119 Fig. 120

şi în cazul unui fluid elastic (Fig. 120), dacă ρ poate fi socotit constant şi v_0 în vas, departe de orificiu, nul, vom avea:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho},$$

de unde:

$$v=\sqrt{2\frac{p_0-p}{\rho}}\equiv\sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}=\sqrt{2gh},$$

notând cu $h\equiv\frac{p_0-p}{\varpi}$ diferenţa înălţimilor piezometrice (în coloană de fluid de greutate specifică ϖ) dintre interior şi exterior.

b) În practică, dacă scurgerea unui lichid s'ar face în vid ($p=0$), din formula $\frac{v^2}{2}=\frac{p_0}{\rho}-\frac{p}{\rho}$ rezultă că v nu va întrece valoarea limită $\left(\frac{2p_0}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}$, atinsă atunci când vidul ar fi perfect: $p=0$

În cazul unei presiuni în vas, egală cu presiunea atmosferică, viteza apei ieşită în vid corespunde unei înălţimi piezometrice de cc. 10 m şi am avea:

$$v=\sqrt{\frac{2gp_0}{\varpi}}=\sqrt{2gh}=\sqrt{2\times 9{,}81\times 10}=14\ m/sec.$$

Cele de mai sus se aplică evident nu numai în cazul orificiului, ci şi la orice vână fluidă permananentă, cu caracteristicile p_0, ρ_0, v_0 la un punct amonte şi p, ρ, v la un punct aval.

Reamintim că, la o mişcare potenţială a unei mase lichide continue, fie permanentă fie variabilă, într'un câmp de forţă conservativ, punctul celei mai mici presiuni se găseşte totdeauna pe frontieră.

În cazul unui fluid elastic, în care p este o anumită funcţiune de ρ, dacă înecuaţia generală

$$\frac{v_0^2}{2}-\frac{v^2}{2}=\int_{p_0}^{p}\frac{dp}{\rho}+U-U_0$$

facem $U=U_0$, sau în general considerăm că $U-U_0$ este neglijabil, iar pe de altă parte $v_0=0$, obţinem analog cu relaţia de mai sus a lichidelor:

$$v^2=2\int_{p}^{p_0}\frac{dp}{\rho}.$$

Pentru un gaz, care ascultă de legea adiabatică, găsim:

$$v^2=\frac{2\gamma}{\gamma-1}\left(\frac{p_0}{\rho_0}-\frac{p}{\rho}\right)=\frac{2}{\gamma-1}(c_0^2-c^2);$$

unde $c=\left(\gamma\frac{p}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)^{\frac{1}{2}}$ este, după cum s'a arătat, viteza sunetului în gaz la presiunea p şi densitatea ρ, iar c_0 viteza sunetului în acelaşi gaz în condiţiunile p_0, ρ_0, ce domnesc în interiorul vasului.

Rezultă că viteza limită în cazul $\gamma=1{,}408$ este:

$$\left(\frac{2}{\gamma-1}\right)^{1/2}c_0\equiv 2{,}214\,c_0.$$

c) În cazul fluidului elastic la o presiune p_0, formula din susul paginei permite a se evalua limita superioară a vitesei de ieşire, sau a vitesei mărite

pe linia firului, la care se atinge o anumită scădere a lui ρ, prescrisă (sau tolerabilă în aplicarea formulelor pentru ρ constant) ca un maximum (deci p minimum), ce am putea neglija în anumite probleme, spre a putea admite că fenomenul de scurgere se face ca și când ρ ar fi constant.

Dacă de ex. luăm drept variație proporțională $\frac{\Delta\rho}{\rho} = 1\% \equiv 0.01$, găsim pentru diferența de presiune (după legea adiabatică $p=\rho^{\gamma}$):

$$\Delta p = \gamma p \frac{\Delta\rho}{\rho},$$

ceeece, în condițiile obișnuite $p=1033 kg/m^2$, deci:

$$\Delta p = 1{,}4 \times 1033 \times 0{,}01 = 144{,}5\ kg/m^2$$

și

$$\rho_{med} = 0{,}125\ \frac{kgsec^2}{m^4},$$

conduce la

$$v_{lim} = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}} = \sqrt{2312} \cong 48\ m/sec.$$

Dacă se îngăduie lui ρ 10% variație, obținem o vitesă limită de $\sqrt{10}$ ori mai mare, adică de $150\ m/sec$.

Efectul variațiunii lui ρ din punct de vedere *cinematic* este de a schimba secțiunile firelor, iar din punct de vedere dinamic de a schimba gradientul de presiune, corespunzător unei anumite accelerațiuni (vezi ecuațiile lui *Euler*, în care figurează ρ), astfel că, dacă intervin într'o problemă variațiuni mai mari, ecuațiile lui *Euler* cu ρ constant nu se mai aplică cu suficientă rigoare.

d) Deși, precum a arătat *Reynolds*, într'un lichid din care se va fi eliminat orice urmă de aer sau alte gaze absorbite, se pot desvolta și oarecari tensiuni, în condițiile obișnuite nu se întâmplă astfel și de aceea putem lua zero drept limită inferioară a lui p.

Dacă la studiul unei scurgeri admitem că mișcarea permanentă este, de-a-lungul unui fir, accelerată astfel, în cât vitesa într'un punct în aval să atingă limita menționată la *b*), corespunzătoare presiunei amonte p_0, se va produce în acel loc o *cavitație* (gol cu presiune nulă), care poate rupe continuitatea masei, schimbându-se mai mult sau mai puțin condițiunile de scurgere.

BCU IAȘI UNIVERSITY LIBRARY

CAP. VII.

TRECEREA DE LA ECUAȚIILE MECANICE ALE LUI EULER PENTRU FLUIDELE PERFECTE LA ECUAȚIILE LUI NAVIER-STOKES PENTRU FLUIDELE VISCOASE IN REGIM LAMINAR

1. Bazele teoriei.

In Vol. I pag. 38 am stabilit ecuațiile lui *Euler* pentru o formă particulară a unei particulei fluide. Pentru mai multă rigoare și în vederea generalizărei la fluidele viscoase, vom lua acum un volum finit τ de o mărime și formă arbitrare, limitat de o suprafață σ. Elementul de masă $\rho d\tau$ fiind considerat momentan rigid, vom exprima, după principiul lui *d'Alembert*, atât după trei axe arbitrare cât și în forma vectorială, *echilibrul* (convențional) *dinamic*, asupra lui, dintre forțele reale și cele de inerție, forțele interne dispărând evident din formule, ca fiind două câte două egale și de sens contrar.

Vom avea după cele trei axe, dacă n_x, n_y, n_z sunt cosinusurile directoare ale normalei *exterioare* $\overline{n}$ a suprafeței σ (notație, cu care am înlocuit notația obicinuită $\cos \widehat{n,x}$, $\cos \widehat{n,y}$, $\cos \widehat{n,z}$):

$$\left.\begin{aligned} \int^{\tau} (F_x - \frac{dv_x}{dt})\rho d\tau - \oint^{\sigma} p n_x \, d\sigma = 0 \\ \int^{\tau} (F_y - \frac{dv_y}{dt})\rho d\tau - \oint^{\sigma} p n_y \, d\sigma = 0 \\ \int^{\sigma} (F_z - \frac{dv_z}{dt})\rho d\tau - \oint^{\sigma} p n_z \, d\sigma = 0 \end{aligned}\right\} . \qquad (1)$$

iar vectorial:

$$\int^{\tau} (\bar{F} - \frac{d\bar{v}}{dt}) \rho d\tau - \oint p\bar{n}\, d\sigma = 0, \qquad (1.1)$$

luând pe $\bar{n}$ îndreptat după normala exterioară (astfel că vectorul presiunii elastice, exercitate asupra lui τ pe suprafața σ, va fi reprezentat prin $-p\bar{n}$).

Transformând integrala de suprafață într'o integrală de volum (vezi Cap. III (5.1)), sistemul de mai sus devine

$$\int^{\tau} \left[(F_x - \frac{dv_x}{dt}) \rho - \frac{\partial p}{\partial x} \right] d\tau = 0$$

$$\int^{\tau} \left[(F_y - \frac{dv_y}{dt}) \rho - \frac{\partial p}{\partial y} \right] d\tau = 0$$

$$\int^{\tau} \left[(F_z - \frac{dv_z}{dt}) \rho - \frac{\partial p}{\partial z} \right] d\tau = 0$$

sau vectorial:

$$\int^{\tau} \left[(\bar{F} - \frac{\partial \bar{v}}{dt}) \rho - grad\, p \right] d\tau = 0,$$

ceeace, având în vedere că τ este arbitrar, implică:

$$\left.\begin{aligned} F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{dv_x}{dt} \\ F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{dv_y}{dt} \\ F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{dv_z}{dt} \end{aligned}\right\}, \qquad (2)$$

care sunt ecuațiile lui *Euler* după trei axe, sau vectorial:

$$\bar{F} - \frac{1}{\rho} grad\, p = \frac{d\bar{v}}{dt}, \qquad (2.1)$$

rezultate cu totul generale.

Grație introducerei forțelor de inerție la orice element de masă, satisfacerea condițiilor de echilibru dinamic al oricărui asemenea element după trei axe dreptunghiulare arbitrare, antre-

CU IASI / CENTRALA UNIVERSITY LIBRARY

nează evident și pe aceea a condițiilor relative la suma momentelor forțelor reale și a celor de inerție, în raport cu numitele axe.

Exprimarea acestor condiții, adică egalarea cu zero a acelei sume pentru orice axă, găsește aplicație la diferite probleme, în care se tratează mase *finite*.

Să stabilim acum, în mod analog, ecuația mecanică vectorială a mentionatului echilibru, în cazul general când, pe lângă efortul elastic p (funcție uniformă de x, y, z și având direcția normală pe fațeta pe care se exercită), avem și un efort de viscozitate f de o direcție oarecare, dând împreună cu p pe o fațetă, definită de normala $\bar{n}$ (vector unitar, dus de partea fațetei pe care se exercită presiunea normală din spre exterior și deci având sensul opus presiunei), un efort rezultant:

$$\bar{p}_n = -p\bar{n} + \bar{f}_n .$$

Direcția lui $\bar{p}_n$ (tocmai din cauza lui $\bar{f}_n$) nu este în general normală pe fațetă (fără a se depărta totuși mult de normală, din cauza micimei relative a lui f_n), dar aceste funcțiuni nu sunt uniforme, fiindcă pentru același punct (x, y, z) au o infinitate de valori, după $\bar{n}$ (adică după fațetă).

Ecuația (1.1), generalizată pentru cazul viscozității, devine

$$\int^{\tau} (\bar{F} - \frac{d\bar{v}}{dt}) \rho d\tau + \oint p_n d\sigma = 0 , \qquad (3)$$

unde $\bar{p}_n$ are sensul său intrinsec, iar $d\sigma$ este întotdeauna pozitiv.

Pentru un singur element infinitezimal, (3) devine

$$(\bar{F} - \frac{d\bar{v}}{dt}) \rho d\tau + \oint^{\Sigma} \bar{p}_n d\Sigma = 0 , \qquad (4)$$

unde bineînțeles Σ este acum suprafața limitativă a lui $d\tau$.

Să aplicăm (4) la un tetraedru infinitezimal, obținut dintr'un triedru cu fațetele paralele cu planurile coordonate și vârful în A, intersectat de un al patrulea plan la mică distanță de A. Există evident 8 orientării diferite pentru un asemenea tetraedru și dacă planul secant ar fi egal înclinat pe cele trei axe, dând drept fațetă un triunghiu echilater, tetraedrele similare din cele 8 unghiuri triedre, formate de axe, ar compune un octaedru regulat. Pentru a fixa ideile să presupunem la început tetraedrul orientat ca în figură, adică astfel ca muchiile triedrului dreptunghiulat, însemnate cu Ax, Ay, Az, să fie în direcțiile axelor pozitive.

Cele 4 fațete vor fi: $d\sigma$ din planul secant și proecțiile sale $d\sigma_x$, $d\sigma_y$, $d\sigma_z$ pe planurile coordonate. Cum volumul $d\tau$ al tetraedului este infinit mic de ordin superior față de ariile fațetelor (cuprinse în Σ limitativ al lui $d\tau$), primul termen din (4) va fi neglijabil față de cel de al doilea, astfel că relația (4) la limită se va reduce la:

$$\bar{p}_n\, d\sigma + \bar{p}_x\, d\sigma_x + \bar{p}_y\, d\sigma_y + \bar{p}_z\, d\sigma_z = 0. \qquad (5)$$

Dacă privim acum tetraedrul considerat, ca făcând parte din volumul τ și având fațeta $d\sigma$ pe suprafața limitativă a lui τ ($d\sigma_x$, $d\sigma_y$, $d\sigma_z$ fiind interioare lui τ și privite ca simple proecțiuni ale lui $d\sigma$), iar pe de altă parte convenim a lua drept $\bar{p}_x, \bar{p}_y, \bar{p}_z$, nu vectorii din figură ci reacțiunile lor (care s'ar exercita asupra lui τ, dacă acesta ar fi lipsit de tetraedrul infinitezimal considerat), având orientarea axelor pozitive, am scrie:

$$\bar{p}_n\, d\sigma = \bar{p}_x\, d\sigma_x + \bar{p}_y\, d\sigma_y + \bar{p}_z\, d\sigma_z = (p_x n_x + p_y n_y + p_z n_z)\, d\sigma \qquad (6)$$

sau

$$\bar{p}_n = \bar{p}_x n_x + \bar{p}_y n_y + \bar{p}_z n_z. \qquad (7)$$

Această relație are aceiași formă ca și în cazul când vectorii ar fi normali pe fațetele, pe care se exercită.

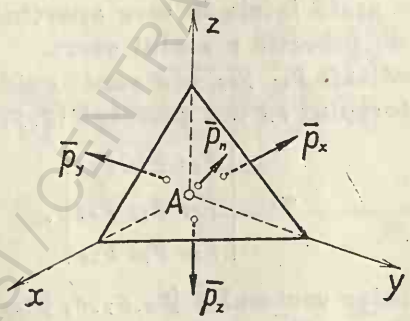


Fig 121

Se poate verifica ușor, că formula (7) este generală, iar nu numai pentru orientarea tatraedrului considerată în figură, cu condiția de a conveni să luăm totdeauna acele eforturi $\bar{p}_x, \bar{p}_y, \bar{p}_z$ care se exercită pe fațete $d\sigma_x$, $d\sigma_y$, $d\sigma_z$ ce văd spre axele pozitive, adică cari au drept normale *exteriare* vectorii unitari x, y, z. Dacă de ex. tetraedrul ar avea poziția simetrică în raport cu A, $\bar{p}$ ar

avea sensul invers, cum însă $\bar{p}_x, \bar{p}_y, \bar{p}_z$ ar rămâne aceleași (ca fiind exercitate pe fețele ce privesc în sensul axelor pozitive), dar cosinusurile n_x, n_y, n_z ale ormalei exterioare $\bar{n}$ ar fi negative, relația (7) încă s'ar verifica. Verificarea se poate face analog și pentru celelalte șase orientări. Dacă de ex. considerăm fața din planul secant al triedrului $y, z, -x$, cosinusurile unghiurilor direcției lui $\bar{p}_0$ cu Ay și Az își conservă semnul, dar și normala fețetelor limitative $d\sigma_y$, $d\sigma_z$ își conservă sensul, pe când al treilea cosinus își schimbă semnul, odată cu inversarea sensului normalei exterioare respective, care antrenează și inversarea lui $\bar{p}_n$ considerat.

Inlocuind acum $\bar{p}_n\, d\sigma$ după (6) în (3), obținem:

$$\int^{\tau} (\bar{F} - \frac{d\bar{v}}{dt})\, d\tau + \int^{\sigma} (\bar{p}_x n_x + \bar{p}_y n_y + \bar{p}_z n_z) d\sigma = 0, \qquad (8)$$

unde σ este suprafața limitativă a lui τ.

Dacă descompunem vectorii $\bar{p}_x, \bar{p}_y, \bar{p}_z$ după cele trei axe, ecuația vectorială (7) se desface în trei ecuațiuni scalare în proecție:

$$\left.\begin{aligned} p_{nx} &= p_{xx} n_x + p_{yx} n_y + p_{zx} n_z \\ p_{ny} &= p_{xy} n_x + p_{yy} n_y + p_{zy} n_z \\ p_{nz} &= p_{xz} n_x + p_{yz} n_y + p_{zz} n_z . \end{aligned}\right\} \qquad (7.1)$$

Primul indice arată fața la care aparține efortul, cel de al doilea indică axa de proecție a acelui efort.

Cele nou cantități p_{xz}, p_{xy}, etc sunt evident componentele tensorului $\mathcal{P}$ al efortului $\bar{p}_n$ din punctul (x, y, z):

$$\mathcal{P} \equiv \begin{vmatrix} p_{xx} & p_{yx} & p_{zx} \\ p_{xy} & p_{yy} & p_{zy} \\ p_{xz} & p_{yz} & p_{zz} \end{vmatrix}, \qquad (9)$$

care transformă liniar vectorul $\bar{n}\ [n_x, n_y, n_z]$ în vectorul $\bar{p}_n$. Vom putea deci înlocui $\bar{p}_n \equiv \mathcal{P}\bar{n}$, scriind (3) sub forma

$$\int^{\tau} (\bar{F} - \frac{d\bar{v}}{dt})\, \rho\, d\tau + \oint^{\sigma} \mathcal{P}\bar{n}\, d\sigma = 0$$

și, de ex. pentru direcția x,

$$\int^{\tau} (F_x - \frac{dv_x}{dt})\, \rho d\tau + \oint^{\sigma} (p_{nx} n_x + p_{yx} n_y + p_{zx} n_z)\, d\sigma = 0. \qquad (10)$$

Tensorul, după valorile componentelor lui, este simetric.

Se poate arăta însă această și fără cunoasterea acelor valori; întradevăr, momentul rezultant al forțelor de viscozitate de pe elementul dx, dy, dz, de ex. în jurul axei elementului, paralelă cu dz, moment care, cu neglijarea infinit micilor de ordin superior, este:

$$p_{yx}\, d\sigma_y\, dy = p_{xy}\, d\sigma_x\, dx = (p_{yx} - p_{xy})\, dx\, dy\, dz, \qquad (11)$$

adică de ordinul al treilea, trebue să se echilibreze dinamic cu cuplul forței exterioare, care în general este nul, și cu momentul forțelor de inerție în jurul aceleași axe, care este de ordinul infinitezimal al 4-lea; rezultă că trebue să avem

$$p_{yx} - p_{xy} = 0 \qquad (11.1)$$

și celelalte două relațiuni similare, ceea ce arată simetria enunțată.*)

Vom putea deci permuta indicii și scrie:

$$\int^{\tau} (F_x - \frac{dv_x}{dt})\, \rho d\tau + \oint^{\sigma} (p_{xx} n_x + p_{xy} n_y + p_{zz} n_z)\, d\sigma$$

$$\equiv \int^{\tau} (F_x - \frac{dv_x}{dt})\, \rho d\tau + \oint^{\sigma} \bar{p}_x d\sigma = 0. \qquad (12)$$

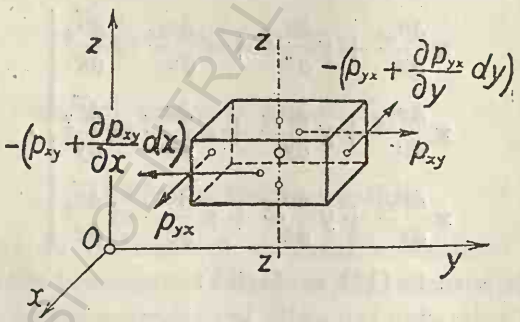


Fig. 122

Dar integrala de suprafață x se poate transforma, după teorema lui *Gauss*, într'o integrală de volum, scriind apoi pentru elementul $d\tau$ (întru cât τ este arbitrar):

*) Urmează că va fi echilibru între momentul forțelor de inerție și momentul termenilor neglijați în (11), cari sunt de gradul infinitezimal imediat superior și a căror eventuală lipsă ar însemna, că acceleraţia derotaţie respectivă ar fi nulă, adică Ω_x constant, etc.

$$\left.\begin{aligned}\left(F_x-\frac{dv_x}{dt}\right)\rho+div\,\bar{p}_x=0\\ \left(F_y-\frac{dv_y}{dt}\right)\rho+div\,\bar{p}_y=0\\ \left(F_z-\frac{dv_z}{dt}\right)\rho+div\,\bar{p}_z=0\end{aligned}\right\}, \tag{13}$$

și tot astfel:

Inmulțind ecuațiile (13) cu vectorii unitari x, y, z și adunând, cu care ocazie folosim relațiile $p_{xy}=p_{yx}$ etc, obținem pentru termenul al doilea al celor 3 ecuații (13):

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{x}\,div\,\bar{p}_x\equiv\mathbf{x}\left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial p_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial p_{xz}}{\partial z}\right)=\mathbf{x}\left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zx}}{\partial z}\right)\\ \mathbf{y}\,div\,\bar{p}_y\equiv\mathbf{y}\left(\frac{\partial p_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial p_{yz}}{\partial z}\right)=\mathbf{y}\left(\frac{\partial p_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zy}}{\partial z}\right)\\ \mathbf{z}\,div\,\bar{p}_z\equiv\mathbf{z}\left(\frac{\partial p_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial p_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zz}}{\partial z}\right)=\mathbf{z}\left(\frac{\partial p_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zz}}{\partial z}\right)\end{aligned}\right\}, \tag{13.1}$$

cu regruparea, (pentru a efectua apoi suma):

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{x}\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\mathbf{y}\frac{\partial p_{xy}}{\partial x}+\mathbf{z}\frac{\partial p_{xz}}{\partial x}\equiv\frac{\partial\bar{p}_x}{\partial x}\\ \mathbf{x}\frac{\partial p_{yx}}{\partial y}+\mathbf{y}\frac{\partial p_{yy}}{\partial y}+\mathbf{z}\frac{\partial p_{yz}}{\partial y}\equiv\frac{\partial\bar{p}_y}{\partial y}\\ \mathbf{x}\frac{\partial p_{zx}}{\partial z}+\mathbf{y}\frac{\partial p_{zy}}{\partial z}+\mathbf{z}\frac{\partial p_{zz}}{\partial z}\equiv\frac{\partial\bar{p}_z}{\partial z}\end{aligned}\right\}, \tag{13.2}$$

ceea ce permite a scrie (13) vectorial:

$$\left(\bar{F}-\frac{d\bar{v}}{dt}\right)\rho+\frac{\partial\bar{p}_x}{\partial x}+\frac{\partial\bar{p}_y}{\partial y}+\frac{\partial\bar{p}_z}{\partial z}=0. \tag{13.3}$$

De altfel, după teorema lui *Gauss*: Cap. III (5.1), formula (8) se putea scrie imediat (transformând ultima integrală de volum):

$$\int^{\tau}\left(\bar{F}-\frac{d\bar{v}}{dt}\right)\rho\,d\tau+\int^{\tau}\left(\frac{\partial\bar{p}_x}{\partial x}+\frac{\partial\bar{p}_y}{\partial y}+\frac{\partial\bar{p}_z}{\partial z}\right)d\tau=0, \tag{13.4}$$

ceea ce este echivalent cu (13.3)

Relația de la care am plecat

$$\bar{p}_n=-p\bar{n}+\bar{f}_n \tag{14}$$

sau

$$\bar{p}_n \equiv \mathcal{P}\bar{n} = -\bar{pn} + \mathcal{F}\bar{n} \qquad (14.1)$$

conduce la următoarea relaţie între tensori:

$$\mathcal{P} = -p + \mathcal{F}, \qquad (14.1)$$

unde p este tensorul simetric:

$$p = \begin{Vmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{Vmatrix},$$

numit uneori *tensor sferic*, fiind de fapt un factor scalar *real*, iar nu numai *simbolic*, care transformă vectorul $\bar{n}$ în $\bar{pn}$.

Am văzut că tensorul $\mathcal{T}$ al repartiţiei, în jurul unui punct, a creşterii spaţiale $d\bar{v}$ a vitesei (creştere egală cu vitesa relativă faţă de molecula din A), este suma unui tensor simetric $\mathcal{T}_s$, care reprezintă partea *deformaţiei*, şi a unui tensor antisemetric, care reprezintă partea rotaţiei. Cum viscozitatea apare numai la deformaţie, tensorul viscozităţii $\mathcal{F}$ depinde numai de tensorul deformaţiei

$$\mathcal{T}_s = \frac{1}{2}(\mathcal{T} + \mathcal{T}_c), \qquad 15)$$

unde $\mathcal{T}_c$ este tensorul conjugat al lui $\mathcal{T}$.

2) Fluide incompresibile.

Este uşor de verificat că, în cazul considerat în vol. I pag. 7—14, al fluidelor incompresibile (în regim laminar), caz în care nu intervine fenomenul accesoriu al dilataţiei volumice (pusă în legătură numai cu eforturile *elastice*, pe când singure deformţiile simple, adică fără dilataţie volumică, provoacă eforturile de viscozitate) dependinţa în chestiune se exprimă cu ajutorul coeficientului de viscozitate prin:

$$\mathcal{F} = 2\mu\,\mathcal{T}_s, \qquad (15.5)$$

între componente existând [conform egalităţilor (14.1) şi (15.1), cari dau:

$$\mathcal{P} = -p + 2\mu\,\mathcal{T}_s, \qquad (15\,2)$$

unde vom aduna cele două matrice: $-p$ și $2\mu\mathcal{T}_s$], relațiile:

$$\left.\begin{aligned} p_{xx} &= -p+2\mu t_{sxx} = -p+2\mu\frac{\partial v_x}{\partial x} \\ p_{xy} &= 2\mu t_{sxy} = \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial y}\right) \\ p_{xz} &= 2\mu t_{sxz} = \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_x}{\partial x}\right) \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

etc, etc. Și de aci rezultă imediat simetria tensolului $\mathcal{P}$, demonstrată mai sus pe altă cale.

Am putea pentru eforturile de viscozitate să întrebuințăm notația p' (acentuată), scriind

$$p_{xx} \equiv -p+p'_{xx},\ p_{yy} \equiv -p+p'_{yy},\ p_{zz} \equiv p+p'_{zz},\ p_{xy} \equiv p'_{xy} = p'_{yx} \text{ etc.}$$

De aci scoatem, în virtutea ecuației de continuitate a fluidelor incompresibile:

$$p_{xx}+p_{yy}+p_{zz} = -3p,$$

adică presiunea elastică într'un punct este media eforturilor normale ale oricărui triedru ortogonal de fețete, cu vârful în acel punct (eforturile de viscozitate neputând influența această presiune medie, care singura este în legătură cu dilatația volumică în cazul fluidelor cu ρ variabil).

Din prima ecuație (13) rezultă prin calcul, cu înlocuirile făcute conform (16), și analog și după celelalte două axe:

$$\left(F_x-\frac{dv_x}{dt}\right)\rho-\frac{\partial p}{\partial x}+2\mu\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\mu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right)+\mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial x\partial z}\right)=0$$

$$\left(F_y-\frac{dv_y}{dt}\right)\rho-\frac{\partial p}{\partial y}+2\mu\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}+\mu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right)+\mu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y\partial x}\right)=0$$

$$\left(F_z-\frac{dv_z}{dt}\right)\rho-\frac{\partial p}{\partial z}+2\mu\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}+\mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial z\partial x}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}\right)+\mu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial z\partial y}\right)=0$$

și, cum am presupus $div\ v = 0$ (fluid incompresibil) și deci:

$$\frac{\partial(div\,v)}{\partial x} = \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial x\partial z}=0$$

etc, etc,

vom avea:

$$\left.\begin{aligned}\left(F_x-\frac{dv_x}{dt}\right)\rho-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\Delta v_x=0\\ \left(F_y-\frac{dv_y}{dt}\right)\rho-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\Delta v_y=0\\ \left(F_z-\frac{dv_z}{dt}\right)\rho-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\Delta v_z=0\end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

sau vectorial:

$$\left(\overline{F}-\frac{d\overline{v}}{dt}\right)\rho-\nabla p+\mu\Delta\overline{v}=0, \qquad (17.1)$$

astfel că (13.4) se va scrie

$$\int^{\tau}\left(\overline{F}-\frac{d\overline{v}}{dt}\right)\rho d\tau-\int^{\tau}\nabla p d\tau+\mu\int^{\tau}\Delta\overline{v}d\tau=0, \qquad (17.2)$$

unde evident

$$\mu\Delta\overline{v}=\frac{\partial\overline{p}'_x}{\partial x}+\frac{\partial\overline{p}'_y}{\partial y}+\frac{\partial\overline{p}'_z}{\partial z}. \qquad (17.3)$$

Am obţinut astfel ecuaţiile lui *Navier-Stokes* pentru fluidele *incompresibile*. Ele mai pot căpăta şi o altă formă vectorială, dacă folosim desvoltarea triplului produs vectorial simbolic (punând, pentru vitesa de dilataţie volumică, $div\,\overline{v}\equiv\theta$):

$$rot\,rot\,\overline{v}\equiv[\nabla[\nabla\overline{v}]]\equiv\nabla.\nabla\overline{v}-\nabla\nabla.\overline{v}\equiv grad\,div\,\overline{v}-\Delta\overline{v}\equiv grad\theta-\Delta\overline{v} \qquad (17.1.1)$$

cu suprimarea punctului dintre Δ şi $\overline{v}$, care devine inutil, căci Δ reprezintă produsul scalar efectuat $\nabla\nabla$ şi nu mai poate fi confuzie între $\Delta\overline{v}$ şi $\nabla.\nabla\overline{v}$. Scoţând de aci valoarea lui $\Delta\overline{v}$ şi făcând $div\,\overline{v}=0$, (17.1) devine:

$$\left(\overline{F}-\frac{d\overline{v}}{dt}\right)\rho-\nabla p-\mu\,rot\,rot\,\overline{v}=0. \qquad (17.4)$$

Se poate ajunge la (17.1) şi pe altă cale, dacă aplicăm relaţia (14.1) cu (15.1) la faţetele elementare paralele cu planurile coordonate:

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\bar{p}_x=(-p+2\mu\mathcal{J}_s)\mathbf{x}$$

$$\bar{p}_y=(-p+2\mu\mathcal{J}_s)\mathbf{y}$$

$$\bar{p}_z=(-p+2\mu\mathcal{J}_s)\mathbf{z}$$

şi introducem aceste valori, ale vectorilor din primul membru, în (13.3), care devine:

$$\left(\bar{F}-\frac{d\bar{v}}{dt}\right)\rho-grad\,p+2\mu\,grad\,\mathcal{J}_s=0. \qquad (17.5)$$

Intradevăr, privitor la ultimul termen, indroducând simbolul ∇, putem scrie (ştim că $\mathcal{J}=\nabla.\bar{v}$ iar $\mathcal{J}_c=\bar{v}.\nabla$):

$$2\,grad\,\mathcal{J}_s\equiv grad\,\mathcal{J}+grad\,\mathcal{J}_c\equiv\nabla\nabla.\bar{v}+\nabla\bar{v}.\nabla=\Delta\bar{v},$$

căci $\nabla\bar{v}=0$ (fluid incompresibil), astfel că (17.5) este o altă formă a lui (17.1).

Cum ecuaţiile lui *Euler* pentru fluidele perfecte pot primi şi alte forme, după cum am văzut, adăogându-le acestora termenul viscozităţii, obţinem tot atâtea noi forme pentru ecuaţiile lui *Navier-Stokes*. Astfel, formulei (1.3) Cap. V îi corespunde aci formula:

$$-grad\left(U+\int\frac{dp}{\rho}+\frac{v^2}{2}\right)+\frac{\mu}{\rho}\Delta\bar{v}=\frac{\partial\bar{v}}{\partial t}-[\bar{v}rot\bar{v}]. \quad (18)$$

Dacă mişcarea este *potenţială*, cu $\bar{v}\equiv grad\,\Phi$ şi deci $div\,\bar{v}\equiv\Delta\Phi=0$, constatăm că termenul viscozităţii $\frac{\mu}{\rho}\Delta\bar{v}\equiv\nu\Delta\bar{v}$ dispare, căci:

$$\Delta\,grad\,\Phi\equiv grad\,\Delta\Phi=0,$$

aceasta dispariţie putându-se constata imediat şi din formula (17.4), în care s'ar introduce relaţia $rot\,\bar{v}=0$ a mişcării potenţiale.

In cazul mişcărilor potenţiale de fluide incompresibile viscoase, trecând totul în membrul al 2-lea, ajungem astfel după (18) la aceiaşi formă a ecuaţiei mecanice ca şi pentru fluidele perfecte şi anume, prin integrare spaţială, la ecuaţia lui *Euler*:

$$f(t)=\frac{\partial\Phi}{\partial t}+U+\int\frac{dp}{\rho}+\frac{v^2}{2}\equiv\frac{\partial\Phi}{\partial t}+gH, \quad (18.1)$$

ceea ce am anunţat şi în capitolul precedent, pentru a deduce valabilitatea teoremei lui *Lagrange* şi în cazul fluidelor viscoase *incompresibile*.

3. Fluide compresibile (gaze).

In cazul fluidelor compresibile, pe lângă deformaţiunile propriu zise, printre cari dilataţiile liniare (ale căror vitese au fost notate cu $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$) sunt o consecinţă inseparabilă a unei lunecări sau variaţiuni unghiulare, avem suprapus şi fenomenul dilataţiunei (sau contracţiei) *volumice*, care antrenează un supliment de dilataţiune liniare, independent de lunecare şi de fenomenul viscozităţei, pe care aceasta lunecare îl provoacă.

La stabilirea expresiilor (16) ale eforturilor de viscozitate, ultimele trei, acele ale eforturilor tangenţiale, au fost deduse direct din legea lui *Newton*, existând proporţionalitate între acestea şi vitesele deformaţiilor unghiulare, cari sunt independente de variaţia volumică dată de o lege oarecare: $\rho = f(p)$. Şi întradevăr, o asemenea variaţie nu antrenează nici o lunecare sau deformaţie unghiulară, ci numai dilataţiuni liniare, din acelea ce nu stau în legătură cu vreo deformaţie unghiulară.

De aceea expresiile lui p_{yz}, p_{zx}, p_{xy} sunt aceleaşi, fie că fluidul este incompresibil fie că este compresibil.

In ceea ce priveşte eforturile normale (pe faţete) p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} din (16), făcusem restricţia că fluidul este *incompresibil*, atât în argumentarea sumară din vol. I pag. 12, cât şi în demonstraţia mai riguroasă (vezi Bul. Politechnicei No. 1 şi 2, 1941). Pentru aflarea valorei acestor eforturi normale în cazul fluidelor *compresibile*, se poate reduce problema la cazul fluidelor incompresibile, dacă, din dilatările liniare (în unitatea de timp) efective α, scădem partea datorită dilatării volumice, adică $\frac{\theta}{3}$ în ori ce direcţie, diferenţa $\alpha - \frac{\theta}{3} = \alpha'$ (accentul se referă la cazul viscozităţei) fiind singură în legătură cu deformaţiile unghiulare 2β (şi deci cu eforturile de viscozitate), în sensul că, după cum: $\sigma'_{max} = \tau'_{max}$ (vezi la mişcarea plană cercul lui *Mohr* pentru viscozitate, cu polul în centru), tot astfel avem $2\alpha'_{max} = 2\beta_{max}$.

Pentru a reliefa şi mai bine deosebirea dintre deformaţia liniară propriu zisă (α') şi aceea datorită variaţiei de volum

$[\theta=3(\alpha-\alpha')]$, observăm că prima, concomitent cu deformațiile unghiulare *provoacă* sau excită viscozitatea, fiind deci *cauza* acesteia, pe când variația de volum este un *efect* al câmpului de presiune $[\rho=f(p)]$.

Așa dar, în locul primelor 3 expresii (16), în cazul fluidelor compresibile, vom avea următoarele expresii mai generale, care se reduc la primele pentru $\theta=0$:

$$\left.\begin{aligned} p_{xx} &= -p+2\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}-\frac{\theta}{3}\right)\\ p_{yy} &= -p+2\mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial y}-\frac{\theta}{3}\right)\\ p_{zz} &= -p+2\mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial z}-\frac{\theta}{3}\right) \end{aligned}\right\}, \tag{19}$$

ecuațiile (17) luând forma:

$$\left.\begin{aligned} \left(F_x-\frac{dv_x}{dt}\right)\rho-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{3}\mu\frac{\partial\theta}{\partial x}+\mu\Delta v_x &= 0\\ \left(F_y-\frac{dv_y}{dt}\right)\rho-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{1}{3}\mu\frac{\partial\theta}{\partial y}+\mu\Delta v_y &= 0\\ \left(F_z-\frac{dv_z}{dt}\right)\rho-\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{1}{3}\mu\frac{\partial\theta}{\partial z}+\mu\Delta v_z &= 0, \end{aligned}\right\}, \tag{20}$$

iar vectorial, corespunzător lui (17.1):

$$\left(\bar{F}-\frac{d\bar{v}}{dt}\right)\rho-grad\,p+\frac{\mu}{3}grad\,\theta+\mu\Delta\bar{v}=0. \tag{20.1}$$

In caz de mișcare potențială ($\bar{v}=grad\Phi$ și $rot\bar{v}=0$) a fluidului *viscos incompresibil*, vom avea din (17.1.1)

$$\Delta\bar{v}=-rot\,rot\bar{v}+grad\,div\,\bar{v}=grad\,\theta,$$

astfel că (20.1) devine:

$$\left.\begin{aligned} &\left(\bar{F}-\frac{d\bar{v}}{dt}\right)\rho-grad\,p+\frac{4}{3}\mu\Delta\bar{v}=0\\ &\text{sau}\\ &\left(\bar{F}-\frac{d\bar{v}}{dt}\right)\rho-grad\,p+\frac{4}{3}\mu\,grad\,\theta=0, \end{aligned}\right\} \tag{20.2}$$

ecuația nefiind în general integrabilă din cauza ultimului termen din membrul întâi.

4. Lucrul, în unitatea de timp, al forţelor de viscozitate, exercitate pe suprafaţa unei mase fluide (puterea la suprafaţă: $\mathcal{P}'_s$) şi puterea disipată intern în căldură prin jocul viscozităţei ($\mathcal{P}'_i$).

Fie o masă fluidă de volum τ, limitată de suprafaţa σ. Forţele ce lucrează asupra unui element de masă $\rho d\tau$, limitat de suprafaţa Σ, sunt:

$$\rho \bar{F} d\tau \quad (\textit{forţă masică}) \quad \text{şi} \quad \int^{\Sigma} -\bar{p}_n \, d\Sigma \quad (\textit{forţe de suprafaţă}),$$

unde $\bar{p}_n$ este efortul exercitat pe faţeta cu normala exterioară $\bar{n}$, compus din presiunea elastică p şi efortul de viscozitate $\bar{p}'_n$ (aceaşi notaţie ca şi pentru efortul total, însă cu accent).

Avem după (7)

$$\bar{p}_n = \bar{p}_x n_x + \bar{p}_y n_y + \bar{p}_z n_z,$$

iar în proecţie pe cele trei axe, după (7.1)

$$p_{nx} = p_{xx} n_x + p_{yx} n_y + p_{zx} n_z$$
$$p_{ny} = p_{xy} n_x + p_{yy} n_y + p_{zy} n_z$$
$$p_{nz} = p_{xz} n_x + p_{yz} n_y + p_{zz} n_z .$$

Ştim că, în cazul fluidelor incompresibile avem (16):

$$p_{xx} \equiv -p + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} \equiv -p + 2\mu\alpha_x \equiv -p + p'_x$$

$$p_{yy} \equiv -p + 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} \equiv -p + 2\mu\alpha_y \equiv -p + p'_y$$

$$p_{zz} \equiv -p + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} \equiv -p + 2\mu\alpha_z \equiv -p + p'_z$$

$$p_{yz} \equiv p_{zy} \equiv \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \equiv \mu\beta_x \equiv p'_{yz} \equiv p'_{zy}$$

$$p_{zx} \equiv p_{xz} \equiv \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \equiv \mu\beta_y \equiv p'_{zx} \equiv p'_{xz}$$

$$p_{yx} \equiv p_{yx} \equiv \mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \equiv \mu\beta_z \equiv p'_{xy} \equiv p'_{yx}$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

iar în cazul fluidelor compresibile: expresiile (19) pentru eforturile normale, restul fiind același.

Primul indice reprezintă direcția normalei *exterioare* a fațetei, care vede în direcția axelor pozitive, cel de al doilea indică axa de proecție.

Rezultanta forțelor masice și de suprafață *este egală* cu $\rho \frac{d\bar{v}}{dt} d\tau$, sau, după principiul lui *d'Alembert*, *se echilibrează* cu forța de inerție $-\rho \frac{d\bar{v}}{dt} d\tau$.

1). Dacă privim elementul de masă ca *indeformabil* (solidificat), lucrul mecanic al forțelor reale menționate (provenit în general din energia potențială acumulată în câmpurile respective), se transformă *întreg* (în presupunerea că particula nu vine în contact cu pereți solizi mobili) în energie cinetică, iar asupra masei finite din volumul τ (dispărând forțele interioare, două câte două) vom avea lucrul mecanic al forțelor masice și încă numai pe al forțelor $\bar{p}_n d\sigma$ de pe suprafața *exterioară* σ, care vor da la fel creșterea energiei cinetice a sistemului.

2). Să presupunem acum particula $\rho\delta\tau$ *deformabilă*, fie sub volum constant, în care caz avem expresiile eforturilor din tabela (16), fie cu volum variabil (gaze), în care caz primele 3 expresii analitice din această tabelă trebuesc înlocuite prin (19).

In primul caz lucrul forțelor reale menționate ne va da creșterea energiei cinetice și în plus lucrul intern de viscozitate (negativ), transformat în căldură; fie $\delta\mathcal{P}'_i$ puterea corespunzătoare acestui din urmă lucru. In cazul al doilea se va mai produce prin presiunea elastică p (local, independent de repartiția câmpului p în spațiu, care operează transformarea energiei potențiale de câmp, corespunzătoare, în energie cinetică) *lucru de compresiune*, din care cel puțin o parte servă la creșterera energiei potențiale *elastice*, iar eventualul rest (dacă evoluția nu este adiabatică) se transformă în căldură.

Să studiem în liniile principale cazul din urmă, care este mai general (gaze).

Lăsând de o parte lucrul forței câmpului $\bar{F}$, să exprimăm lucrul total executat, în unitatea de timp, de cele 18 componente de pe cele 6 fațete ale unui paralelipiped elementar $\delta\tau = \delta_x \delta_y \delta_z$ variabil (și ca formă și ca volum), vitesa centrului fiind $\bar{v}$ $[v_x, v_y, v_z]$; expresia

exactă (luând expresiile acestui lucru mai întâi pentru $\frac{\delta x}{2}, \frac{\delta y}{2}, \frac{\delta z}{2}$ şi apoi dublându-le) este:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}(p_{xx}v_x + p_{xy}v_y + p_{xz}v_z) + \frac{\partial}{\partial y}(p_{yx}v_x + p_{yy}v_y + p_{yz}v_z) + \frac{\partial}{\partial z}(p_{zx}v_x + p_{zy}v_y + p_{zz}v_z)\right]\delta x\,\delta y\,\delta z \qquad (21)$$

Ecuaţia (13.3), în care figurează forţele ce solicită *unitatea de volum* (presupusă solidificată) şi care reprezintă în forma iniţială ecuaţia vectorială a lui *Navier-Stokes*, conţine numai *rezultanta* acestor forţe de suprafaţă, care solicită elementul infinitezimal. Această rezultantă, înmulţită scalar cu v, adică lucrul ce-l execută, repezintă numai contribuţia, în unitatea de timp, la creşterea energiei cinetice a elementului, datorită forţelor de suprafaţă.

Acest lucru este:

$$\left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z}\right)v_x + \left(\frac{\partial p_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z}\right)v_y + \left(\frac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z}\right)v_z \qquad (22)$$

şi trebue scăzut din lucrul total (21) al forţelor de suprafaţă, redus şi el la unitatea de volum, în scop de a obţine lucrul transmis intern, fie ca lucru de compresiune, fie ca lucru de viscozitate, rămânând ca atare:

$$p_{xx}\alpha_x + p_{yy}\alpha_y + p_{zz}\alpha_z + 2p_{yz}\beta_x + 2p_{zx}\beta_y + 2p_{xy}\beta_z. \qquad (23)$$

Folosind, în cazul particular al fluidelor incompresibile, expresiile (16), lucrul transmis ia forma

$$-p(\alpha_x+\alpha_y+\alpha_z) + 2\mu(\alpha_x^2+\alpha_y^2+\alpha_z^2) + 4\mu(\beta_x^2+\beta_y^2+\beta_z^2), \qquad (24)$$

unde primul termen $\equiv -p\theta$ este atunci nul (fiind incompresibilitate), însă în cazul general al fluidelor elastice, când în loc de parte din (16) am folosi (19), ceea ce ar aduce o schimbare numai în termenii în μ, am avea $\alpha_x + \alpha_y + \alpha_z \equiv \theta \neq 0$ şi termenul $-p\theta$ ar reprezinta lucrul de *compresiune* (parte cel puţin transformat (*) în energie potenţială elastică iar eventualul rest în căldură).

(*) Putem face o verificare, în cazul fluidelor perfecte, când

$$p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = -p \quad \text{şi} \quad p_{yz} = p_{zx} = p_{xy} = 0,$$

Așa dar, expresia din cazul fluidelor incompresibile (24) sau

$$2\mu(\alpha_x^2+\alpha_y^2+\alpha_z^2+2\beta_x^2+2\beta_y^2+2\beta_z^2) \qquad (24.1)$$

reprezintă, redus la unitatea de volum, lucrul transmis intern, în unitatea de timp, prin forțele de viscozitate de la suprafața particulei, și transformat în căldură prin jocul viscozității interioare.

în care caz (21) se reduce la

$$-\left[\frac{\partial(pv_x)}{\partial x}+\frac{\partial(pv_y)}{\partial y}+\frac{\partial(pv_z)}{\partial z}\right]\equiv-\left(\frac{\partial p}{\partial x}v_x+\frac{\partial p}{\partial y}v_y+\frac{\partial p}{\partial z}v_z\right)-p\theta\,, \qquad (21.1)$$

pentru lucrul total efectuat în $\delta t=1$ asupra unității de volum de către forțele de suprafață (contribuția acestora la creșterea energiei cinetice și la lucrul de compresiune, transmis intern), iar (22) se reduce la

$$-\left(\frac{\partial p}{\partial x}v_x+\frac{\partial p}{\partial y}v_y+\frac{\partial p}{\partial z}v_z\right), \qquad (22.1)$$

pentru lucrul datorit câmpului potențial p, și care trebue scăzut din (21.1) spre a avea lucrul de compresiune $-p\theta$ singur.

Să repetăm anume calculul care conduce la ecuația lui *Bernoulli*, în care calcul cele trei ecuații ale lui *Euler* după axele x, y, z se înmulțesc respectiv cu $dx=v_x\,dt$, $dy=v_y\,dt$, $dz=v_z\,dt$ (vezi nota p. 356) și se adună, dând:

$$-dU-\frac{dp}{\rho}=\frac{dv^2}{2}\,,$$

unde cantitățile sunt reduse la *unitatea de masă* (iar nu de volum); această particularitate este singura deosebire ce există între termenul $-\frac{dp}{\rho}$, socotit în $\delta t=dt$ arbitrar (care poate fi și unitatea de timp), și expresia (22.1) socotită la *unitatea de volum* în $\delta t=1$.

Suntem liberi a alege secțiunea firului astfel ca acesta să debiteze unitatea de masă:

$$M\equiv 1=\rho_0\sigma_0v_0=\rho_1\sigma_1v_1$$

Cum ecuația lui *Bernoulli* se aplică la un fir în mișcare permanentă, de ex. între secțiunile σ_0 și σ_1:

$$g(z_0-z_1)-\int_{p_0}^{p_1}\frac{dp}{\rho}=\frac{1}{2}(v_1^2-v_0^2) \qquad (22.2)$$

și cum firul, deplasat în unitatea de timp cu secțiunea sa σ_0 pe lungimea v_0 iar cu secțiunea σ, pe lungimea v_1, se găsește, din cauza permanenței mișcării, în aceleași condiții, ca și când în aceași unitate de timp s'ar fi deplasat unitatea de masă de la σ_0 la σ_1, va trebui să constatăm echivalența rezultatelor la cele două procedee de calcul.

Or (pag. 366):

Pentru masa finită din volumul τ, această putere disipată intern va avea, aşa dar, expresia

$$\mathcal{P}'_i = 2\mu \int^{\tau} (\alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2 + 2\beta_x^2 + 2\beta_y^2 + 2\beta_z^2)\, d\tau \,. \qquad (25)$$

Ea nu se poate anula, de cât dacă deformaţia este complet nulă, masa mişcându-se atunci solidar, ca şi când ar fi întreagă solidificată, animată deci numai de o mişcare de ansamblu.

$$-\int_{p_0}^{p_1} \frac{dp}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} - \frac{p_1}{\rho_1} + \int_{\rho_0}^{\rho_1} p\, d\left(\frac{1}{\rho}\right), \qquad (22.2.0)$$

ceea ce permite a scrie (22.2) sub forma

$$g(z_0 - z_1) + \frac{p_0}{\rho_0} - \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{1}{2}(v_1^2 - v_0^2) - \int_{\rho_0}^{\rho_1} p\, d\left(\frac{1}{\rho}\right) \qquad (22.2.1)$$

şi se poate uşor vedea corespondenţa cu (21.1), care arată că în ecuaţia lui *Bernoulli* sub forma (22.2) apare numai lucrul câmpului potenţial p adică a gradientului lui $-p$ (bilanţ de energie parţial), pe când sub forma (22.2.1) se arată că din lucrul total $\frac{p_0}{\rho_0} - \frac{p_1}{\rho_1}$ al forţelor de suprafaţă, redus la unitatea de masă, trebue scăzut lucrul de compresiune $-p\theta = -\int_{\rho_0}^{\rho_1} p\, d\left(\frac{1}{\rho}\right)$, pentru a avea contribuţia câmpului potenţial p la creşterea energiei cinetice, exact ca în (22.2). Corespondenta termenilor din (22.2.0) cu aceia din formula (21.1), dedusă din ceea generală, este, ţinând seamă că primii sunt raportaţi la unitatea de masă, iar cei de al doilea la unitatea de volum, următoarea:

$$\frac{p_0}{\rho_0} - \frac{p_1}{\rho_1} \quad (1a) \quad \text{cu} \quad -\left[\frac{\partial(pv_x)}{\partial x} + \frac{\partial(pv_y)}{\partial y} + \frac{\partial(pv_z)}{\partial z}\right] \quad (1b)$$

$$-\int_{p_0}^{p_1} \frac{dp}{\rho} \quad (2a) \quad \text{cu} \quad -\left(\frac{\partial p}{\partial x} v_x + \frac{\partial p}{\partial y} v_y + \frac{\partial p}{\partial z} v_z\right) \quad (2b)$$

şi

$$-\int_{\rho_0}^{\rho_1} p\, d\left(\frac{1}{\rho}\right) \quad (3b) \quad \text{cu} \quad -p\theta. \qquad (3b)$$

Intradevăr, considerând firul $\sigma_0 \to \sigma_1$ de debit $M = 1$ în mişcare permanentă, bilanţul energiei în timpul $\delta t = 1$ se prezintă pentru această porţiune de fir, ca şi în cazul când masa unitară $M = 1 = \rho_0\sigma_0 v_0 = \rho_1\sigma_1 v_1$ s'ar fi deplasat prin câmpul gravităţei şi al presiunei dela secţia σ_0 la secţia σ_1.

In acest caz primul termen (1a), care se poate scrie

$$p_0\sigma_0 v_0 - p_1\sigma_1 v_1 \,,$$

Un caz interesant este acela al mişcărilor *potenţiale* ale fluidelor *incompresibile*, în care caz rezultanta menţionată a eforturilor de suprafaţă, exercitate pe orice particulă, se reduc numai la p, întru cât forţele de viscozitate se echilibrează între ele, dispărând din ecuaţia (vectorială) lui *Navier-Stokes*, unde din forţele de suprafaţă nu rămâne de cât $-grad\, p$, această ecuaţie devenind atunci indentică cu aceea a lui *Euler*. Aşa dar, din forţele de suprafaţă numai $-grad\, p$ contribue la creşterea energiei cinetice a particulei, lucrul de compresiune, pe de altă parte, fiind nul. In acest caz, deci, eforturile de viscozitate de la suprafaţă $\bar{p}'$, a căror rezultantă, fiind nulă, nu cotribue de loc la creşterea energiei cinetice a particulei, vor transmite excluziv lucru intern, astel că puterea disipată $\mathcal{P}'_i$ prin viscozitatea interioară va va fi exact egală cu puterea $\mathcal{P}'_s$, desfăşurată de viscozitatea de la suprafaţă:

$$\mathcal{P}'_s = \mathcal{P}'_i .$$

In toate celelalte cazuri, aceste două cantităţi vor fi inegale, fiindcă forţele superficiale, datorite efortului $\bar{p}'$, contribue şi ele pe orice particulă prin rezultanta lor ne-nulă (în cazul unui volum finit τ dând şi un cuplu rezultant) la creşterea energiei cinetice.

Ceea ce se petrece în cazul interesant menţionat, când $\mathcal{P}'_s = \mathcal{P}'_i$, apare evident dacă, la o mişcare *plană*, considerăm un cub cu două faţete paralele cu planul director, celelalte 4 fiind orientate după *planurile duse la 45° faţă de cele principale de deformaţie*. Cubul se va deforma sub acţiunea celor 4 eforturi tangenţiale egale (cele normale sunt nule), care, deşi se echilibrează ca vectori, lucrează câte două în diagonală, o pereche într'un sens şi alta în sens opus, transformând figura în para-

---

corespunde cu (1b) (lucrul total al forţelor de suprafaţă). Al doilea (2a), obţinut în acelaşi fel ca (2b), în ipoteza particulei rigide, exprimă lucrul datorit câmpului potenţial p, şi, în fine, al treilea (3a), notând cu $v = \frac{1}{\rho}$ volumul unităţei de masă:

$$-\int_{\rho_0}^{\rho} pd\left(\frac{1}{\rho}\right) \equiv -\int_{v_0}^{v} pdv \equiv -\int_{v_0}^{v} \frac{1}{\rho} p \frac{dv}{v} \equiv -\int_{v_0}^{v} \frac{1}{\rho} p\theta,$$

dacă secţiunile σ_0 şi σ_1 sunt foarte aproape, se reduce la un element

$$-\frac{1}{\rho} p\theta,$$

corespunzând astfel cu (3b).

lelipiped romboidal. Or, absenţa unei rezultante a forţelor de viscozitate în ecuaţia dinamică arată că, în acest caz, lucrurile se petrec ca şi în cazul fluidelor perfecte, adică forţele de suprafaţă datorite efortului $\bar{p}'$ nu contribue la creşterea energiei cinetice, ci transmit în interior întreg lucrul lor, transformat astfel prin deformarea particulei în căldură, adică avem

$$\mathcal{P}'_s = \mathcal{P}'_i \ .$$

Aşa dar, în acest caz, ecuaţia lui *Bernoulli*, care rezultă, cu aceeaşi structură, din ecuaţia dinamică (ce îmbracă atunci aceeaşi formă ca ecuaţia lui *Euler* a fluidelor perfecte, deci fără termen de viscozitate), reprezintă numai un bilanţ parţial de energie, anume între variaţia energiei potenţiale a câmpului exterior $\bar{F}$ şi aceea a câmpului $-\frac{1}{\rho} grad\, p$, pe de o parte, şi creşterea energiei cinetice, pe de altă parte. Restul energiilor, adică lucrul (în unitatea de timp) $\mathcal{P}'_s$ al forţelor de viscozitate de la suprafaţă (datorite efortului $\bar{p}'$), pe de o parte, şi lucrul intern de disipaţie $\mathcal{P}'_i$, pe de altă parte, formează bilanţ separat.

In celelalte cazuri (mişare rotaţională sau fie chiar potenţială, însă de fluid *compresibil*), ecuaţia lui *Bernoulli*, estinsă la fluidele viscoase (adică dedusă formal din ecuaţia vectorială sau din ecuaţiile după trei axe ale lui *Navier-Stokes*), conţinând şi lucrul unei rezultante de viscozitate, arată că, la bilanţul de energie al unei mase oarecre $\int^{\tau} \rho d\tau$, la care intervine şi lucrul rezultantei de viscozitate pe element (deci participarea şi a viscozităţei de suprafaţă la primul bilanţ menţionat), nu poate fi egalitate între $\mathcal{P}'_s$ şi $\mathcal{P}'_i$.

Dacă scădem acum din paranteză sub semnul integralei expresia $2\mu(\alpha_x + \alpha_y + \alpha_z)^2 = 2\mu\theta^2$, care în ipoteza făcută (ρ *const*) este nulă [ţinând seamă şi de identitatea

$$4\mu\beta_x^2 = \mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)^2 \equiv \mu\Omega_x^2 + 4\frac{\partial v_z}{\partial y}\frac{\partial v_y}{\partial z}, \text{ etc}$$

unde $\bar{\Omega}$ este rotaţionalul vitesei], obţinem:

$$\mu(\Omega_x^2+\Omega_y^2+\Omega_z^2) - 4\mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\frac{\partial v_z}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial x}\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)$$
$$+ 4\mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}\frac{\partial v_y}{\partial z}+\frac{\partial v_x}{\partial z}\frac{\partial v_z}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\frac{\partial v_x}{\partial y}\right). \qquad (26)$$

Aplicând teorema lui *Gauss*, Cap. III (5.1), la fie care din integralele de volum, corespunzătoare produselor de derivate de mai sus, pentru a o transforma în integrală de suprafaţă, după cele două moduri posibile, avem pentru primii termeni din ultimele paranteze, o dată:

$$-4\mu\int^{\tau}\frac{\partial v_y}{\partial y}\frac{\partial v_z}{\partial z}\,d\tau \equiv -2\mu\oint^{\sigma} v_y\frac{\partial v_z}{\partial z}n_y\,d\sigma - 2\mu\oint^{\sigma} v_z\frac{\partial v_y}{\partial y}n_z\,d\sigma$$

şi o dată:

$$4\mu\int^{\tau}\frac{\partial v_z}{\partial y}\frac{\partial v_y}{\partial z}\,d\tau \equiv 2\mu\oint^{\sigma} v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}n_y\,d\sigma + 2\mu\oint^{\sigma} v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}n_z\,d\sigma,$$

restul obţinându-se mai uşor prin permutări circulare.

Vom avea deci de integrat pe suprafaţa închisă σ, înmulţite cu 2μ, expresiile din următorul tablou în două coloane:

$$\left.\begin{array}{ll}
-v_y\dfrac{\partial v_z}{\partial z}n_y & +v_z\dfrac{\partial v_y}{\partial z}n_y \\
-v_z\dfrac{\partial v_y}{\partial y}n_z & +v_y\dfrac{\partial v_z}{\partial y}n_z \\
-v_z\dfrac{\partial v_x}{\partial x}n_z & +v_x\dfrac{\partial v_z}{\partial x}n_z \\
-v_x\dfrac{\partial v_z}{\partial z}n_x & +v_z\dfrac{\partial v_x}{\partial z}n_x \\
-v_x\dfrac{\partial v_y}{\partial y}n_x & +v_y\dfrac{\partial v_x}{\partial y}n_x \\
-v_y\dfrac{\partial v_x}{\partial x}n_y & +v_x\dfrac{\partial v_y}{\partial x}n_y
\end{array}\right\} \qquad (26.1)$$

Perechile de termeni cu — din prima coloană, cu derivate diferite însă cu factorii acestora comuni, adunaţi doi câte doi procură expresiuni, în care suma celor două derivate poate fi înlocuită cu o a treia, prevăzută cu semn schimbat, în virtutea

relaţiei $\frac{dv_x}{dx}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0$; prima coloană se reduce atunci la expresia:

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}n_x+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}n_y+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}n_z. \qquad (27)$$

In ceea ce priveşte ceilalţi 6 termeni cu + din a doua coloană, este uşor de văzut că, dacă scădem din derivata ce figurează în fie care din ei pe celaltă derivată, pe care o întâlnim asociată cu prima în componenta respectivă a rotaţionalului $\overline{\Omega}$ (adăogând bine înţeles simultan rezultatului derivata scăzută, spre a nu se schimba valorile), obţinem pentru a doua coloană (26.1):

$$\left.\begin{aligned}
&-n_y v_z\Omega_x+v_z\frac{\partial v_z}{\partial y}n_y\\
&+n_z v_y\Omega_x+v_y\frac{\partial v_y}{\partial z}n_z\\
&-n_z v_x\Omega_y+v_x\frac{\partial v_x}{\partial z}n_z\\
&+n_x v_z\Omega_y+v_z\frac{\partial v_z}{\partial x}n_x\\
&-n_x v_y\Omega_z+v_y\frac{\partial v_y}{\partial x}n_x\\
&+n_y v_x\Omega_z+v_x\frac{\partial v_x}{\partial y}n_y
\end{aligned}\right\} \qquad (27.1)$$

Termenii din (27) şi (27.1), convenabil asociaţi, ne dau

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v^2}{\partial x}n_x+\frac{\partial v^2}{\partial y}n_y+\frac{\partial v^2}{\partial z}n_z\right)\equiv\frac{1}{2}\frac{\partial v^2}{\partial n}$$

şi

$$n_x(v_z\Omega_y-v_y\Omega_z)-n_y(v_z\Omega_x-v_x\Omega_z)+n_z(v_y\Omega_x-v_x\Omega_y).$$

Aşa dar, (25) după transformarea (26) se va putea scrie:

$$\mathcal{P}'_i=\mu\int^{\tau}\Omega^2 d\tau+\mu\oint^{\sigma}\frac{\partial v^2}{\partial n}d\sigma-2\mu\oint^{\sigma}\begin{vmatrix} n_x & n_y & n_z\\ v_x & v_y & v_z\\ \Omega_x & \Omega_y & \Omega_z\end{vmatrix}d\sigma. \qquad (28)$$

Reamintim că direcția lui $\bar{n}$ este în spre exteriorul volumului τ. Dasă avem o frontieră solidă, unde $v=0$, (28) se reduce la

$$\mathcal{P}'_i=\mu\int^{\tau}\Omega^2 d\tau. \qquad (28.1)$$

Dacă mișcarea este potențială ($\Omega=0$), ecuația (28) devine

$$\mathcal{P}'_i=\mu\oint^{\sigma}\frac{\partial v^2}{\partial x}d\sigma, \qquad (28.2)$$

iar în cazul particular al unei frontiere sferice de rază r, dealtfel oarecare (nu neapărat rigidă, v fiind oarecare):

$$\mathcal{P}'_i=\mu r^2\frac{\partial}{\partial r}\oint^{4\pi}v^2 d\omega, \qquad (28.2.1)$$

unde ω reprezintă unghiul solid la centru.

In acest caz al mișcării potențiale ($\Omega=0$) existând o funcție de vitesă Φ, (25) se poate scrie astfel:

$$\mathcal{P}'_i=2\mu\int^{\tau}\left\{\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right)^2+2\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\,\partial z}\right)^2\right.$$
$$\left.+2\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial x}\right)^2+2\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\right)\right\}d\tau.$$

Confruntând această expresie cu formula din pag. 123, care dă media lui v^2 pe o sferă de rază r, ajungem imediat la formula (28.2.1), fără a trece prin formula generală (28).

Expresia (25) a puterei disipate, în cazul particular considerat, s'ar fi putut găsi plecând, nu de la elementul $d\tau$, ci de la integrala de suprafață a lucrului efectuat de forțele de viscozitate de la suprafață, care însă, în cazul general al mișcării rotaționale, conține și lucrul exterior al rezultantei de translație și a cuplului rezultant de viscozitate:

$$\mathcal{P}'_s\equiv\oint^{\sigma}\bar{p}'_n\bar{v}\,d\sigma\equiv\oint^{\sigma}(\bar{p}'_x\bar{v}\,n_x+\bar{p}'_y\bar{v}\,n_y+\bar{p}'_z\bar{v}\,n_z)d\sigma$$

și, aplicând teorema lui *Gauss*:

$$\mathcal{P}'_s\equiv\int^{\tau}\left(\frac{\partial(\bar{p}'_x\bar{v})}{dx}+\frac{\partial(\bar{p}'_y\bar{v})}{\partial y}+\frac{\partial(\bar{p}'_z\bar{v})}{\partial z}\right)d\tau$$
$$\equiv\int^{\tau}\left(\bar{p}'_x\frac{\partial\bar{v}}{\partial x}+\bar{p}'_y\frac{\partial\bar{v}}{\partial y}+\bar{p}'_z\frac{\partial\bar{v}}{\partial z}\right)d\tau+\int^{\tau}\bar{v}\left(\frac{\partial\bar{p}'_x}{\partial x}+\frac{\partial\bar{p}'_y}{\partial y}+\frac{\partial\bar{p}'_z}{\partial z}\right)d\tau.$$

Or, expresia din ultima parantenză, în cazul mișcărilor potențiale este nulă, fiindcă după (13.4) și (17.2) paranteza în chestiune este nulă.

Vom avea deci pentru asemenea mișcări, efectuând produsele scalare din prima paranteză și ținând seamă că fluidul este incompresibil, tocmai exprexia (25).

Această învederează că, la o astfel de mișcare (potențială a unui fluid viscos incompresibil), puterea exercitată de viscozitate la suprafața unei mase τ este întreagă consumată în disipație internă.

Explicația rezidă în faptul că, în acest caz, rezultanta de translație și cuplul rezultant al forțelor de viscozitate de la suprafață sunt nule, astfel că aceste forțe nu contribue de loc la creșterea energiei cinetice sau la modificarea energiei potențiale a câmpurilor.

Rămâne de constatat că a doua integrală, în cazul când mișcarea este rotațională, exprimă tocmai acest lucru exterior. Și întradevăr, paranteza din a doua integrală este tocmai $\mu\Delta\bar{v}$ după (17.3).

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

CAP. VIII

INTEGRALA DE LINIE A VITESEI ÎN ECUAȚIA SCALARĂ A MIȘCĂRILOR POTENȚIALE ȘI CELOR ROTAȚIONALE. TEOREMA LUI THOMSON LA FLUIDELE PERFECTE ȘI CELE VÎSCOASE INCOMPRESIBILE. MIȘCĂRI DE ROTAȚIE POTENȚIALE ȘI ROTAȚIONALE.

1. Conexitate liniară.

In acest capitol vom face uz de criteriul conexității liniare. (vezi pagina 40).

Știm că un spațiu de gradul n de conexitate are nevoie de $n-1$ tăeturi pentru a deveni simplu conex.

O masă fluidă, presupusă matematic continuă, adică având în orice punct o moleculă (de dimensiuni teoretic nule) ar fi simplu conexă cu privire la densitate, dar ar putea fi multiplu conexă cu privire la o altă proprietate. Astfel, dacă ea ar umple un volum cilindric restrâns, care s'ar găsi în mișcare rotațională, am avea un spațiu dublu conex pentru câmpul potențial (nerotațional). Intradevăr, o curbă închisă, înconjurând miezul rotațional și cuprinsă în întregime în fluidul potențial, nu s'ar putea reduce la zero, fără a ieși din domeniul potențial, care în condițiile admise ar avea conformația unui tor, necesitând o singură tăetură pentru a deveni simplu conex. Conexitatea, despre care e vorbă aci, se referă la aceasta din urmă proprietate (nerotaționalitate).

2. Teorema lui Lagrange, drept caz particular al teoremei lui Thomson.

S'a arătat că, în anumite condițiuni și ipoteze (continuitatea câmpului de vitesă la un fluid perfect sau un fluid viscos incompresibil, apoi $\overline{F} = -gradU$ cu U funcție uniformă de x, y, z, pre-

cum și $p=f(\rho)$ în cazul fluidului perfect, *compresibil*), dacă la un moment dat mișcarea este potențială, adică circulația nulă după orice contur (reductibil), caracterul de nerotaționalitate, adică nulitatea fluxului prin orice contur, se conservă.

Aceasta constitue teorema lui *Lagrange*, deja stabilită.

Intervenirea însă a unor forțe de suprafață, ca frecarea cu pereții, sau a unui câmp de forță neconservativ (de ex. un câmp electromagnetic), va putea modifica caracterul mișcării din *potențial* în *rotațional*.

Teorema lui *Lagrange* este de fapt un caz particular al teoremei, mult mai generale, a lui *Thomson*, care presupune aceleași condițiuni și ipoteze, ca mai sus, fiind numai atunci exactă, când conturul înconjurător considerat trece prin *fluid perfect* sau, prin *fluid viscos incompresibil nerotațional*, fără însă a exige pentru $\bar{v}$: continuitatea și $rot\bar{v}=0$ în întregul fluid viscos înconjurat de contur. In condițiunile menționate, la care se adaogă și această ultimă remarcă, teorema lui *Thomson* enunță *conservarea cu timpul a sumei algebrice a fluxului rotațional înconjurat*, oricare ar fi valoarea ei, pe când teorema lui *Lagrange* enunță același lucru numai în cazul particular, când rotaționalul (și deci fluxul acestuia) este în întreaga masă nul. După teorema lui *Stokes*, în locul fluxului se poate considera circulația conturului și vice versa.

In practică, un asemenea flux mai poate lua naștere, chiar într'un fluid perfect, în anumite împrejurări, în cari se pot produce discontinuități de vitesă. La fluidele *viscoase* asemenea suprafețe, odată produse, se transformă repede în *straturi rotaționale* ce se vor studia mai târziu în Partea 2-a), care sunt *echivalente* cu suprafețele de discontinuitate, acestea comportând același flux (la limită, și pe care îl vom numi *flux limită*), măsurabil tot prin circulația unui contur. In cazurile cele mai frecvente, însă, rotaționalitatea provine de la frontiera solidă, datorită frecării cu pereții.

La fluidele vîscoase incompresibile fluxul rotațional, *eventual* de sumă algebrică nulă, îmbrățișat de un contur *fluid* închis, aparținând unei suprafețe, *eventual* lipsită de rotaționalitate în tot domeniul ei, se poate concepe că se poate întreține grație forțelor de viscozitate, exercitate pe această suprafață limitativă și cari produc, precum am văzut, lucru; acesta poate compensa, în parte, respectiv în total, pe acela consumat prin viscozitatea internă, combatându-se astfel efectul amortizării ce tinde

a se produce, fără a se putea însă conchide la *conservarea* fluxului, de cât numai, în cazul *eventual* menţionat, la aceea a sumei lui algebrice nule.

Putem imagina drept un astfel de caz (plan): două vârtejuri de sens contrar (turtite după planul lor de separaţie), care îşi conservă indefinit fluxul rotaţional de sumă algebrică nulă graţie frecărei a doi pereţi exteriori semicilindrici flexibili (vezi *Hamel*), cari se mişcă unul într'un sens şi altul în sensul contrar, corespunzând pe conturul, format de urma lor, cu o circulaţie nulă.

In cazul general însă al unui contur prin fluid viscos rotaţional, sau chiar nerotaţional dar compresibil, teorema lui *Thomson* nu este aplicabilă; ea prezintă totuşi interes ca aproximaţie, dacă viscozitatea, resp. variaţia densităţei, este mică.

3. Demonstrarea teoremei lui Thomson sau Lord Kelvin.

Prima demonstraţie. Vom putea urma şi aci calea aleasă la început pentru stabilirea teoremei lui *Lagrange*, adică plecând de la relaţia

$$\bar{v}\,\delta\bar{r} - \bar{v}_0\delta\bar{r}_0 = -\delta\chi, \qquad (1)$$

cu

$$\chi \equiv \int_0^t gh\,dt \quad \text{şi} \quad gh \equiv U + \int \frac{dp}{\rho} - \frac{v^2}{2}.$$

integrala de timp fiind efectuată asupra aceleiaşi molecule şi deci reprezentând o funcţiune (de momentul t), legată de moleculă. Ecuaţia (1) a fost stabilită numai pentru *fluidele perfecte*, pe baza ecuaţiei (6) Cap. V, a lui *Euler*:

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = -grad\left(U + \int \frac{dp}{\rho}\right), \qquad (2)$$

înmulţită scalar cu $\delta\bar{r}$ [(6.1) Cap. V] şi supusă apoi la câteva operaţiuni simple şi în special la o integrare prin părţi (*Weber*).

La fluidele viscoase aceste operaţiuni nu reuşesc, decât dacă în calea integrărei avem simultan $rot\,\bar{v} = 0$ şi $div\,\bar{v} = 0$ (fluid incompresibil), în care caz teorema lui *Thomson* ia *forma* aceleia a lui *Lagrange*, fiindcă pe de o parte condiţia $rot\,\bar{v} = 0$ se cere (totuşi în tot spaţiul) în această din urmă teoremă, iar pe de altă parte, având simultan $div\,\bar{v} = 0$, $\Delta\bar{v}$ şi deci termenul viscozităţii va fi nul, astfel

că ecuaţia mecanică *Navier-Stokes*, prin dispariţia acestui termen pe drumul integrării, se reduce tot la ecuaţia (2). Aceasta explică extinderea teoremei lui *Thomson* şi la cazul particular al fluidelor viscoase *incompresibile* ($div\,\bar{v}=0$), atunci când $rot\,\bar{v}=0$, în care caz ea coincide cu teorema lui *Lagrange*.

In cazul general $rot\,\bar{v}\neq 0$, termenul în $\frac{\mu}{\rho}\Delta\bar{v}$ nu dispare din ecuaţia mecanică, nici chiar dacă fluidul viscos este incompresibil, aşa că, pentru teorema lui *Thomson*, de la început trebuie presupus că conturul fluid, care îmbrăţişează fluxul, trece numai prin fluid *perfect* (nerotaţional sau rotaţional) sau prin fluid *viscos, incompresibil şi nerotaţional*. In interiorul acestui contur pot fi mase în mişcare rotaţională, fie chiar viscoase, fluxul rotaţional având o sumă algebrică nulă (ca şi circulaţia de pe conturul exterior), provenit din o cauză oarecare (eventual prin formarea unor suprafeţe de discontinuitate în vitesă, care la fluidele naturale se transformă repede în straturi rotaţionale).

Vom presupune deasemenea, ca şi la demonstraţia teoremei lui *Lagrange*, că forţele sunt conservative şi că $\rho=f(p)$. Pe *drumul integrării* prin fluid perfect funcţiunea vitesei *poate fi continuă sau discontinuă*, o suprafaţă de discontinuitate în vitesă implicând (precum se poate arăta) rotaţionalitate, care corespunde unui flux, ce asigură, şi în cazul discontinuităţilor de vitesă (*), valabilitatea teoremei lui *Thomson*. Pentru demonstraţie îi vom da

(*) De ex. dacă planul *Oxz* ar fi o suprafaţă de discontinuitate a vitesei $v=v_x$ într'un fluid perfect, de ambele părţi nerotaţional, prezentând deci în acel plan un salt de vitesă $v_{x_2}-v_{x_1}=\delta v_x$ în direcţia normalei pe plan (direcţia *Oy*, având v_{x_1} de partea negativă, v_{x_2} de partea pozitivă a axei *Oy*), ducând în planul *Oxy* un contur circular de diametru a, care să înţepe planul de discontinuitate *Oxz* în două puncte diametral opuse (deci la distanţa a), vom avea pe conturul format de fie care semicerc, completat cu diametrul a respectiv, unul de o parte, altul de cealaltă parte a planului, o circulaţie nulă, deoarece fluxul îmbrăţişat de fie care din aceste contururi este, prin ipoteză, nul.

Pentru integralele de linie a vitesei vom avea, aşa dar, pe semi-circonferinţa de pe partea $+y$

$$I_2 = -av_{x_2},$$

iar pe semicircumferinţa de pe partea $-y$,

$$I_1 = av_{x_1},$$

ceea ce însemnează că, pe conturul circumferinţei întregi, care cuprinde cele două

acesteia următorul enunţ echivalent: *Pe orice contur sau linie fluidă închisă, ce trece prin fluid perfect sau viscos incompresibil nerotaţional, circulaţiunea* $\oint \bar{v}\, d\bar{r}$ (şi deci, după teorema lui *Stokes*, fluxul rotaţional prin orice suprafaţă limitată de contur) *rămâne constantă cu timpul,* egală deci cu valoarea sa iniţială $\oint \bar{v}_0\, d\bar{r}_0$.

Să considerăm la început o linie fluidă deschisă AB şi să calculăm derivata, în raport cu timpul, a integralei de linie a vitesei, pentru a arăta că, în cazul când linia AB se închide (contur închis), această derivată, care devine derivata circulaţiunii în ipotezele făcute, este nulă.

---

semicercuri şi fâşia infinitezimală (fie dy distanţa între cele două diametre a, cari încadrează discontinuitatea, adică lăţimea fâşiei) ady, vom avea:

$$I = I_2 + I_1 = -a(v_{x_2} - v_{x_1}) = -a\partial v_x .$$

Or, dacă admitem, ceea ce se întâmplă în realitate la fluidele cu o cât de mică viscozitate, că o suprafaţă de discontinuitate se transformă repede într'un strat rotaţional subţire (aci de grosimea dy), fluxul rotaţional al acestui strat, care străbate fâşia în chestiune, s'ar exprima prin

$$\int^{\sigma} \bar{\Omega} d\bar{\sigma} \equiv \Omega_z\, ady \equiv a\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) dy$$

şi cum aci am presupus $v_y \equiv 0$ şi deci $\frac{\partial v_y}{\partial x} \equiv 0$, vom avea

$$\int^{\sigma} \bar{\Omega} d\bar{\sigma} \equiv -a\frac{\partial v_x}{\partial y} dy \equiv -a\partial v_x .$$

Cum acest flux (real sau *limită*), este singurul care străbate cercul, relaţia

$$I \equiv -a\partial v_x = \int^{\sigma} \bar{\Omega}\, d\bar{\sigma}$$

arată, că teorema lui *Stokes* este valabilă şi pentru un asemenea flux, astfel că prezenţa de discontinuităţi nu infirmează întru nimic valabilitatea teoremei lui *Thomson*, demonstrată pentru circulaţie şi în casurile, când avem suprafeţe, în care vitesa prezintă discontinuitate. De altfel faptul că elementul de circulaţie între moleculele conturului, aşezate de o parte şi de alta a suprafeţei de discontinuitate este nul, pe când derivata în raport cu timpul al acestui element este $\frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2}$, nu trebue să surprinză. Intradevăr, în unitatea de timp aceste molecule se distanţează cu $v_2 - v_1$ şi elementul fluid astfel creat, înmulţit cu vitesa medie $\frac{v_2 + v_1}{2}$, dă o contribuţie la circulaţie, egală tocmai cu $\frac{v_1^2}{2} - \frac{v_1^2}{2}$.

Reamintim că: $\bar{r}, \bar{v}, U, p, \chi$ (integrală de timp de la $t_0=0$ la t) sunt înțelese ca funcțiuni substanțiale, atribuite la un moment oarecare t moleculei $\bar{r}_0(x_0, y_0, z_0)$, după metoda lui *Lagrange*. In consecință $\delta\bar{r}$ este un element de linie fluidă, considerat în momentul t (și anume cu moleculele din $\delta\bar{r}_0$ în $t_0=0$) și deci depărtarea între moleculele lui extreme, adică lungimea lui, este variabilă cu timpul; tot astfel $\delta\chi$ este creșterea funcțiunei χ, atunci când pentru același interval de timp $0\to t$ trecem de la origina $\bar{r}_0\to\bar{r}$ a elementului fluid $\delta\bar{r}_0\to\delta\bar{r}$ la extremitatea lui $(\bar{r}_0+\delta\bar{r}_0)\to(\bar{r}+\delta\bar{r})$.

Derivata lui χ în raport cu t:

$$\frac{d\chi}{dt}\equiv U+\int\frac{dp}{\rho}-\frac{v^2}{2}\equiv gh,$$

va fi în momentul t o derivată substanțială, în punctul ocupat de moleculă în acel moment).

Intervalul $0\to t$ fiind dat, în expresia $[\chi]_A^B$ integrala (1.1) se va înțelege efectuată pentru molecula A și apoi pentru molecula B separat, luându-se diferența lor, fie că AB este infinit mic, fie că este finit.

In cazul unei linii fluide AB *finite*, vom avea:

$$\int_A^B\delta\chi=[\chi]_A^B\equiv\chi_B-\chi_A.$$

In acest caz, de la diferențiala de linie (1) vom trece la integrala de linie:

$$\int_A^B\bar{v}\delta\bar{r}-\int_A^B\bar{v}_0\delta\bar{r}_0=-[\chi]_A^B\equiv-\int_0^t[gh]_A^Bdt. \qquad (4)$$

Dacă acum derivăm substanțial în raport cu timpul, găsim, în cazul unui element fluid:

$$\frac{d}{dt}(\bar{v}\,d\bar{r})=-\frac{d(\delta\chi)}{dt}, \qquad (4.1)$$

iar pentru o linie fluidă finită AB:

$$\frac{d}{dt}\int_A^B\bar{v}d\bar{r}=\frac{d}{dt}[\chi]_A^B\equiv-[gh]_A^B. \qquad (4.2)$$

In cazul unui contur închis, (4.2) devine:

$$\frac{d\Gamma}{dt}=-[gh]_A^A\equiv-\left[U+\int\frac{dp}{\rho}-\frac{v^2}{2}\right]_A^A.$$

Este evident că numai în ipotezele făcute: U uniform (cum este de ex. cazul gravităţii) şi $\rho=f(p)$, membrul al doilea este nul şi deci teorema lui *Thomson* exactă. Aci nu mai este necesară restricţia ca să nu existe discontinuităţi în vitesă, astfel că, conturul considerat poate să străbată suprafeţele de discontinuitate eventual existente, cu care ocazie expresia circulaţiei nu este deloc modificată, partea unor asemenea suprafeţe, înbrăţişată de contur, comportând un flux, uşor de evaluat, care intră în componenţa fluxului total îmbrăţişat.

Să considerăm şi cazul unor forţe electromagnetice, cari de pildă acţionează moleculele fluide, electrizate printr'un curent electric, răspândit radial şi uniform, dintr'un conductor rectiliniu central indefinit, spre frontiera cilindrică conductoare (având conductorul menţionat drept axă), în prezenţa unui câmp magnetic paralel cu axa cilindrului. Se arată în subcapitolul 7 următor, că F, intensitatea câmpului, este de forma $\frac{k}{r}$ şi deci $U=k\,arc\,tg\,\frac{y}{x}$, astfel că U, la închiderea unui contur în jurul axei suferă un salt egal cu $2\pi k$, nefiind deci uniform. Se verifică imediat că acest salt, luat cu semn schimbat, este tocmai creşterea lui Γ, deci şi a fluxului rotaţional, *în unitatea de timp*.

A doua demonstraţie. Teorema lui *Thomson* se demonstrează obişnuit pe următoarea cale mai directă, cu ajutorul ecuaţiilor lui *Euler*, întrebuinţând şi aci noţiunea *liniei fluide*, în sensul variabilelor lui *Lagrange*.

Astfel, pentru a demonstra nulitatea derivatei substanţiale:

$$\frac{d\Gamma}{dt}=\frac{d}{dt}\oint\left[v_x\delta x+v_y\delta y+v_z\delta z\right],$$

în cazul când menţionatele condiţiuni sunt satisfăcute, este destul a arăta, inversând ordinea operaţiilor din primul membru, că pentru orice curbă închisă avem:

$$\frac{d\Gamma}{dt}=\oint\frac{d}{dt}\left[v_x\delta x+v_y\delta y+v_z\delta z\right]=0. \qquad (5)$$

Pentru termenii de sub semnul integrării putem scrie desvoltat:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(v_x \delta x) &\equiv \frac{dv_x}{dt}\delta x + v_x \frac{d(\delta x)}{dt} \\
\frac{d}{dt}(v_y \delta y) &\equiv \frac{dv_y}{dt}\delta y + v_y \frac{d(\delta y)}{dt} \\
\frac{d}{dt}(v_z \delta z) &\equiv \frac{dv_z}{dt}\delta z + v_z \frac{d(\delta z)}{dt}
\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

și, înlocuind pe $\frac{dv_x}{dt} \equiv j_x$, $\frac{dv_y}{dt} \equiv j_y$, $\frac{dv_z}{dt} \equiv j_z$ prin membrul al doilea al ecuațiilor lui *Euler*, aplicabile la fluidele perfecte în orice fel de mișcare, iar la fluidele viscoase incompresibile numai în cazul mișcărilor nerotaționale:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dv_x}{dt} &= F_x - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} \\
\frac{dv_y}{dt} &= F_y - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy} \\
\frac{dv_z}{dt} &= F_z - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz}
\end{aligned}\right\}, \qquad (6.1)$$

apoi pentru al doilea termen al desvoltării, inversând ordinea operațiilor de derivare substanțială (în raport cu timpul) și diferențiere de spațiu:

$$v_x \frac{d(\delta x)}{dt} \equiv v_x \delta v_x \equiv \delta \frac{v_x^2}{2}\ ^{1})$$

$$v_y \frac{d(\delta y)}{dt} \equiv v_y \delta v_y \equiv \delta \frac{v_y^2}{2}$$

$$v_z \frac{d(\delta z)}{dt} \equiv v_z \delta v_z \equiv \delta \frac{v_z^2}{2},$$

---

*) NOTA. Aceasta se vede și mai explicit, constatând că $\frac{d(\delta x)}{dt}$ exprimă creșterea în unitatea de timp a proecției pe axa x a elementului substanțial δs, cu alte cuvinte diferența δv_x a vitezelor de la capetele elementului, sau creșterea lui v_x atunci când, în același moment t, ne deplasăm spațial (diferențială de spațiu) cu $\overline{\delta s} \equiv \overline{\delta r}\ [\delta x, \delta y, \delta z]$,

$$\delta v_x = \frac{\partial v_x}{\partial x}\delta x + \frac{\partial v_x}{\partial y}\delta y + \frac{\partial v_x}{\partial z}\delta z.$$

astfel că

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dt}(v_x\delta x)&=\left(F_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\right)\delta x+\delta\frac{v_x^2}{2}\\ \frac{d}{dt}(v_y\delta y)&=\left(F_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\right)\delta y+\delta\frac{v_y^2}{2}\\ \frac{d}{dt}(v_z\delta z)&=\left(F_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\right)\delta z+\delta\frac{v_z^2}{2}\end{aligned}\right\},\qquad (6.2)$$

obţinem

$$\frac{d}{dt}(v_x\delta x+v_y\delta y+v_z\delta z)=-\delta\left(U+\int\frac{dp}{\rho}+\frac{v^2}{2}\right)\equiv-g\delta h.$$

Vom avea, aşa dar, în *ipotezele făcute*:

$$\frac{d\Gamma}{dt}=-\left[U+\int\frac{dp}{\rho}-\frac{v^2}{2}\right]_A^A\equiv 0,$$

relaţie care exprimă conservarea în timp a fluxului rotaţional îmbrăţişat de contur (teorema lui *Thomson*), în cazul unui contur trecând prin fluid perfect sau fluid viscos incompresibil nerotaţional.

4. Cazul unei linii deschise.

La un fluid perfect (fie în mişcare potenţială fie în mişcare rotaţională) sau la un fluid viscos incompresibil numai în mişcare potenţială, dacă în locul circulaţiunii Γ (pe un contur *închis*) avem o integrală de linie oarecare I_{AB} cu $A\neq B$, vom avea,

$$\frac{dI_{AB}}{dt}=-\left[U+\int\frac{dp}{\rho}-\frac{v^2}{2}\right]_B^A\equiv-\left[\frac{d\chi}{dt}\right]_A^B \qquad (8)$$

şi, integrând în timp între 0 şi t:

$$\int_0^t\frac{dI_{AB}}{dt}\,dt\equiv I_{AB}-I_{0AB}=-[\chi]_A^B. \qquad (8.1)$$

Dacă mişcarea este potenţială în domeniul curbei AB, indiferent dacă fluidul este perfect sau viscos incompresibil şi indiferent dacă, la închiderea liniei AB pentru a forma un contur, acest domeniu este simplu conex sau nu, sau dacă conturul îmbrăţişează sau nu flux rotaţional de sumă nulă, (8) se poate deduce

şi pe o a treia cale mai rapidă, şi anume din ecuaţia mecanică integrată a mişcărilor potenţiale ale fluidelor perfecte, care se aplică şi la fluidele viscoase incompresibile:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + U + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2} = f(t). \qquad (9)$$

Intradevăr, la orice mişcare potenţială avem:

$$I_{AB} \equiv \Phi_B - \Phi_A \equiv [\Phi]_A^B$$

şi dacă I (ca şi Φ, care comportă deasemenea o constantă arbitrară, ce poate fi funcţiune de timp) pe linia fluidă, considerată la un moment dat t, este măsurat de la o origine arbitrară O, capetele A şi B ale acelei linii fluide putând lua diferite poziţii, astfel ca I_{0A} şi I_{0B} să fie funcţii de parametrii x_0, y_0, z_0 ai moleculei fluide A, respectiv B, exact ca şi Φ_A şi Φ_B, şi totodată funcţii de timp, vom avea:

$$\frac{dI_{AB}}{dt} \equiv \frac{d[\Phi]_B^A}{dt} = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \bar{v}\, grad\, \Phi\right]_A^B \equiv \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \bar{v}\right]_A^B$$

şi, înlocuind valoarea lui $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ din (9):

$$\frac{dI_{AB}}{dt} = -\left[U + \int \frac{dp}{\rho} - \frac{v^2}{2}\right]_A^B \equiv -\left[\frac{dx}{dt}\right]_A^B, \qquad (10)$$

căci $f(t)$ dispare, fiind în orice moment acelaşi pentru toate moleculele (aci A şi B).

5. Cazul unui element de linie fluidă.

a) **In mişcare oarecare de fluid perfect, sau viscos incompresibil şi potenţial.**

Dacă B este infinit de aproape de A la distanţa $\delta s = |\overline{\delta r}|$, relaţiunea sub formă diferenţială de spaţiu (10) se va scrie, într'un domeniu de fluid perfect, sau de fluid viscos incompresibil în mişcare potenţială:

$$\frac{d(\bar{v}\,\overline{\delta r})}{dt} = -\delta\left[U + \int \frac{dp}{\rho} - \frac{v^2}{2}\right] \equiv -\frac{d(\delta \chi)}{dt}$$

şi, integrând în raport cu t între 0 şi t:

$$\bar{v}\,\overline{\delta r} - \bar{v}_0\,\overline{\delta r}_0 = -\delta \int_0^t \left(U + \int \frac{dp}{\rho} - \frac{v^2}{2}\right) dt \equiv \delta \chi. \qquad (11)$$

Regăsim astfel şi pe această cale rezultatul transformării lui *Weber*. Toate aceste formule sunt în fond echivalente, fiindcă derivă din ecuaţia mecanică în aceleaşi ipoteze.

Pentru orice mişcare potenţială, relaţia (11) devine, întrebuinţând simbolul δ, adoptat pentru diferenţialele de spaţiu, corespunzătoare creşterilor dx_0, dy_0, dz_0, ale variabilelor lui *Lagrange* sub t constant (având $t=0$ pentru Φ_0):

$$\delta\Phi - \delta\Phi_0 = -\delta\chi.$$

Această relaţie este valabilă: 1) într'un domeniu de fluid perfect şi 2) într'un domeniu fluid viscos incompresibil, dar nu are sens a fi împărţită prin dt. Putem însă deriva substanţial această relaţie în raport cu timpul:

$$\delta\frac{d(\Phi+\chi)}{dt} = 0 \qquad (12)$$

şi integra spaţial (în raport cu x_0, y_0, z_0) pe o linie *fluidă*, în aceleaşi ipoteze, printr'un domeniu de fluid perfect sau viscos incompresibil:

$$\frac{d\Phi}{dt} + U + \int\frac{dp}{\rho} - \frac{v^2}{2} = f(t). \qquad (13)$$

Dar, pentru derivata substanţială $\frac{d\Phi}{dt}$ avem:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \bar{v}\,grad\,\Phi \equiv \frac{\partial\Phi}{\partial t} + v^2, \qquad (14).$$

astfel că în cazurile 1) şi 2) vom avea

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + U + \int\frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2} \equiv \frac{\partial\Phi}{\partial t} + gH = f(t), \qquad (15)$$

adică ecuaţia (2) Cap. III, H fiind în general funcţiune de timp.

6. Cazul mişcării permanente.

a) **Potenţială.** Dacă mişcarea este permanentă, fluidul fiind perfect sau viscos incompresibil, având în vedere că Φ conţine o funcţiune arbitrară de t, cum aceasta în (15) se poate considera ca fiind explicitată în $f(t)$, ecuaţia (15) devine:

$$U + \int\frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2} \equiv gH = const, \qquad (16)$$

care este ecuația lui *Bernoulli*, cu *aceiași constantă pentru întreaga masă*.

Mișcările potențiale, deși nu se întâlnesc decât la pornirea din repaus sau aproximativ în cazul unei viscozități foarte mici, (pentru ca frecarea de la pereți să nu poată desvolta în mare măsură rotaționalitatea transmisă în continuu în masa fluidului), interesează mult la studiul curenților, deoarece aceștia, după cum am văzut, se pot ușor trata analitic în cazul existenței unei funcții Φ.

b) **Rotațională.** Nu poate fi vorbă aci de cât de fluide perfecte, deoarece în cazul mișcărilor rotaționale de fluide viscoase, termenul viscozității nu este nul, cum presupun formulele de mai sus. Împărțirea relației (11) prin dt ar avea un sens, numai dacă $\delta\bar{r}_0$, cu origina într'un punct A, și $\delta\bar{r}$, cu origina într'un punct B, ar putea fi considerate totodată ca drumuri parcurse în intervalul dt de aceiași moleculă, angajată succesiv pe elementele geometrice ce ele reprezintă, în momentele respective $t_0 = 0$ și t, putându-se în acest caz întrebuința notația $d\bar{r}_0$, $d\bar{r}$. Aceasta implică ca $\delta\bar{r}_0$ și $\delta\bar{r}$ să fie luate chiar în direcția vitesei și cum, conform ipotezei făcute, ele se referă la aceleași molecule (înșirate în momentul t_0 pe $\delta\bar{r}_0$), ele se vor găsi pe aceiași traectorie, care va coincide cu firul respectiv, mișcarea neputând deci fi decât *semi-permanentă sau permanentă*. Cum însă se mai cere ca $d\bar{r}$ și $d\bar{r}_0$ să fie parcurse în același interval dt, mișcarea nu va putea fi decât *permanentă*, căci numai atunci linia fluidă finită AB, înaintând în dt pe linia ei geometrică fixă, va părăsi un element $d\bar{r}_0$ la origină, înlocuit la extremitate prin $d\bar{r}$, pe care se va înșira același număr de molecule, întrucât partea comună va avea, datorită permanenței mișcării, aceeași structură în ambele poziții (din momentele $t_0=0$ și $t=dt$). Efectiv moleculele lui $d\bar{r}_0$ își vor ocupa pozițiile corespunzătoare pe $d\bar{r}$, abia în momentul t.

Așa dar, împărțirea relației (11) prin dt are sens numai în cazul, pe care îl vom trata aci, al *mișcării permanente*.

Reamintim că timpul t scurs, pentru ca molecula $\bar{r}_0$, aflată în punctul $A(\bar{r}_0)$ la $t_0=0$, să ajungă la punctul $B(\bar{r})$, este acela care figurează ca limită superioară a integralei definite:

$$\chi \equiv \int_0^t \left(U + \int \frac{dp}{\rho} - \frac{v^2}{2}\right) dt \equiv g \int_0^t h dt,$$

unde h din fiece moment se referă la aceași molecula $\bar{r}_0$.

In loc de a considera în (11) elementul de linie fluidă deplasat în intervalul $0 \to t$ din $d\bar{r}_0$ în $d\bar{r}$, putem considera, cum am procedat şi mai sus, linia fluidă finită AB deplasată în dt, luând pentru primul membru ca variabilă spaţială independentă la $t_0 = 0$ pe $\bar{r}_0$ curent dealungul liniei fluide AB şi tot astfel în momentul $t + dt$ pe $\bar{r}$, iar în membrul al doilea urmărind ansamblul moleculelor de pe linia fluidă AB în intervalul dt. In acest caz χ va fi constituit numai din diferenţiala de timp

$$\left(U + \int \frac{dp}{\rho} - \frac{v^2}{2}\right) dt \equiv gh\, dt$$

şi, integrând (11) de la A la B sub t constant, adică numai spaţial, vom avea:

$$\int_A^B \bar{v} d\bar{r} - \int_A^B \bar{v}_0 d\bar{r}_0 = -[gh]_A^B dt \equiv -\left[U + \int \frac{dp}{\rho} - \frac{v^2}{2}\right]_A^B dt.$$

Eliminând din primul membru partea comună, vor rămâne a figura în acest membru numai elementele dela extremităţi, cu origina în punctele A şi B respectiv:

$$(\bar{v}\, d\bar{r})_B - (\bar{v}_0 d\bar{r}_0)_A \equiv v_B^2 dt - v_{0A}^2 dt = -\left[U + \int \frac{dp}{\rho} - \frac{v^2}{2}\right]_A^B$$

(căci $\bar{v} \| d\bar{r}$ şi $\bar{v}_0 \| d\bar{r}$), astfel că, trecând totul în membrul întâiu şi împărţind cu dt, vom obţine (A şi B fiind arbitrare pe traectorie sau fir):

$$U + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2} \equiv gH = const,$$

o constantă caracteristică fiecărui fir. Această formulă a unui fir în mişcare permanentă, a fost stabilită în Cap. V mult mai simplu, pe cale directă, însă am crezut util a arăta cum ea se încadrează în discuţia de faţă, plecând de la funcţiunea χ.

Am văzut, pe de altă parte, că ecuaţia lui *Euler* se poate scrie şi sub forma (1.4) Cap. III:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} - [\bar{v} rot \bar{v}] = -grad\, gII,$$

deci în mişcare permanentă:

$$[\bar{v} rot \bar{v}] = grad\, gH. \qquad (17)$$

Se vede că vectorii $\bar{v}$, $rot\bar{v} \equiv \bar{\Omega}$ şi $grad\, H$ formează un triedru drept-

Suprafețele $H(x, y, z)=const.$ sunt evident tangente în orice punct la cei doi vectori $\bar{v}$ și $rot\bar{v} \equiv \bar{\Omega} \equiv 2\bar{\omega}$ (deci conținându-i infinitezimal), fiindcă atât $\bar{v}$ cât și $rot\bar{v}$ sunt perpendiculari pe $grad\, gH$, care are direcția normalei la suprafața $H = const.$ în punctul respectiv.

Pentru ca H să fie constant în întregul fluid, va trebui să avem:

$$[\bar{v}\, rot\bar{v}]=0,$$

ceeace implică, ori ca $rot\bar{v}$ să fie nul, caz, studiat, al mișcărilor potențiale, când avem, precum știm, relația (16), ori ca $\bar{v}$ și $rot\bar{v}$ să fie peste tot paralele. Intradevăr, numind α unghiul format de $\bar{v}$ cu $rot\bar{v}$ și $\bar{n}$ fiind normala la numita suprafață (și la aceea infinit vecină de ea), vom putea scrie (17) scalar:

$$2\omega v \sin\alpha = g\frac{\partial H}{\partial n} \qquad (17)$$

$\bar{n}$ având direcția lui $grad\, H$, astfel ca $\bar{v}$, $rot\bar{v}$ și $grad\, H$ sau $\bar{n}$ să formeze un triedru drept. Pentru $\alpha=0$ vom avea $\frac{\partial H}{\partial n}=0$, adică H, care este constant pe acele suprafețe, nu va varia nici în direcția normală suprafețelor, fiind deci peste tot constant.

Dacă din contra $\alpha=\frac{\pi}{2}$, avem:

$$2\omega v = g\frac{\partial H}{\partial n}$$

și atunci între două suprafețe $H = const,$ distanțate într'un loc oarecare cu dn, avem pentru o creștere oarecare gdH relația

$$gdH = 2\omega v dn. \qquad (17.2)$$

Această creștere a lui

$$gH \equiv U + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2},$$

de ex. în cazul cel mai simplu al unui curent rectiliniu, se explică astfel: în acest caz știm, că, în orice secție transversală (vezi pag. 340) deci în direcția normală vitesei și normală supra-

feţelor $H=const$, avem legea hidrostatică $U+\int\frac{dp}{\rho}=const$, astfel că creşterea lui gH nu poate proveni decât dela termenul $\frac{v^2}{2}$, singurul de altfel care este influenţat de prezenţa vectorului $\bar{\omega}$.

Să luăm drept curent rectiliniu curentul plan paralel produs între două plăci orizontale, paralele cu planul xy, atunci când cea superioară este fixă şi cealalta mobilă în planul ei în direcţia $+y$, direcţia ascendentă $+z$ fiind direcţia $-\bar{n}$, normală pe suprafeţele $H=const$, căci $\bar{v}$ sau y, $\bar{\omega}$ sau x şi $\bar{n}$ formează un triedru drept. Cum în aceasta din urmă direcţie avem legea hidrostatică (fiindcă acceleraţia j_z este nulă ca şi în hidrostatica), propoziţia trebue să se verifice; şi, întradevăr, în acest caz avem, vitesa $\bar{v}$ reducându-se la componenta v_y:

$$\omega_x\equiv-\frac{\partial v_y}{\partial z}\equiv\frac{\partial v}{\partial n}\quad\text{(căci, ca direcţie avem aci } z=-\bar{n}),$$

iar după (17.2)

$$g\frac{\partial H}{\partial n}=2\omega_x v\equiv-2\frac{\partial v}{\partial z}v\equiv-\frac{\partial\left(\frac{v^2}{2}\right)}{\partial z}.$$

Se vede că sarcina totală H creşte în direcţia $-z=\bar{n}$ cu creşterea sarcinei cinetice $\frac{v^2}{2g}$, ceea ce este evident, căci la placa fixă avem $v=0$. (Deşi această mişcare presupune o viscozitate cât de mică, am aplicat formula fluidelor perfecte, admiţând pe μ suficient de mic).

7. Mişcări de rotaţie ale unui lichid, rotaţionale, sau potenţiale cu Φ uniform ori multiform (ciclic).

Aplicaţia Nr. 102. *A se studia rotaţia permanentă a unei mase lichide solidare (ca în cazul unei solidificări) în jurul unei axe verticale, într'un câmp de forţă constant, în spaţiu şi în timp, cum este gravitaţia (se va arăta că mişcarea nu este potenţială).*

Răspuns. Să considerăm, în câmpul gravitaţiunei, o masă lichidă ce se roteşte *în bloc* în jurul unei axe verticale, luată ca axă z (ca sensul pozitiv ascendent) cu o vitesă unghiulară ω constantă, pozitivă.

Vectorul $\bar{\omega}$ va avea sensul oz, adică rotația se va face de la Ox către Oy. Prin ipoteză vom avea după tangenta lm traectorie $v=\omega r$, deci:

$$v_x = -\omega y \qquad v_y = \omega x \qquad v_z = 0$$

$$j_x = -\omega^2 x \qquad j_y = -\omega^2 y \qquad j_z = 0$$

și

$$F_x = 0 \qquad F_y = 0 \qquad F_z = -g.$$

Ecuațiile de mișcare vor fi în consecință:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} &= -\omega^2 x \\ -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} &= -\omega^2 y \\ -g-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} &= 0, \end{aligned}\right\}, \tag{18}$$

de unde

$$\frac{p}{\rho} = \frac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2) - gz + const$$

sau

$$\frac{p}{\varpi} = \frac{\omega^2}{2g} r^2 - z + c - tă, \tag{18.1}$$

constanta fiind independentă de timp, întrucât ne interesează numai regimul permanent.

Această ecuație se putea scrie și direct din (17), căci $\bar{n}$ are direcția lui $[\bar{v}\,\bar{\omega}]$, adică a lui $\bar{r}$, iar după (17.1)

$$2\omega^2 r = g\frac{dH}{dr},$$

adică

$$H = 2\frac{\omega^2 r^2}{2g} \equiv 2\frac{v^2}{2g} + c\text{-}tă,$$

ceea ce este echivalent cu (18.1), căci

$$H = \frac{p}{\varpi} + z + \frac{\omega^2 r^2}{2g}.$$

Raportând curba mediană a suprafeței libere cu $p=p_a$, care este o *parabolă* (Fig. 123), la axa cu origina în vârful ei O, în care caz pentru $z=0$ avem $r=0$ și deci $\frac{p_0}{\varpi} = c\text{-}tă$, ecuația acestei meridiane se reduce la:

$$z = \frac{\omega^2}{2g} r^2, \tag{18.2}$$

BCU IAȘI / CENTRALĂ UNIVERSITY LIBRARY

condiţiile fiind identice ca în cazul repausului relativ al lichidului dintr'un vas, animat de o rotaţie ω în jurul unei axe verticale.

Din constatarea că:

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 2\omega \neq 0$$

deducem că mişcarea nu este potenţială şi n'ar putea deci lua naştere printr'un sistem de forţe exterioare conservative sau prin presiuni de implusiune.

Aplicaţia Nr. 103. *A se studia o mişcare de rotaţie permanentă a unei mase lichide în jurul unei axe verticale z, într'un câmp de forţă, fie nul, fie constant în spaţiu şi în timp, impunându-i condiţia de a fi potenţială.*

Răspuns. a) Câmpul exterior nul. Să presupunem acum că ω, în loc de a fi constant, este o funcţiune de distanţa r la axa de rotaţie şi să cercetăm, care trebue să fie forma acestei funcţiuni, pentru ca să existe un potenţial de vitesă. Rotaţia fiind funcţiune de timp, vom avea (folosind expresiile din aplicaţia precedentă pentru v_x şi v_y)

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 2\omega + r\frac{d\omega}{dr},$$

iar pentru anularea membrului al doilea trebuie să avem:

$$\omega r^2 = k, \tag{19}$$

k fiind o constantă. Vitesa într'un punct oarecare, care este perpendiculară pe raza vectoare, fiind egală cu $\omega r = \frac{k}{r}$, teorema lui *Bernoulli*, care în aceiaşi formă se aplică şi la lichidele viscoase în mişcare potenţială, ne procură, în cazul absenţei câmpului de forţă exterioară, ecuaţia, pentru întreaga masă, a unei mişcări plane (independentă de z):

$$\frac{p}{\rho} = const - \frac{1}{2}\frac{k^2}{r^2}. \tag{19.1}$$

Pentru a găsi funcţiunea Φ trebue să ţinem seamă de relaţiile (scrise în coordonate polare, pentru axele de proecţie: *radială* şi *perifericâ*, cu sensul pozitiv respectiv al razei vectoare şi al tangentei în sensul trigonometric):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0 \quad \frac{\partial \Phi}{r d\theta} = \frac{k}{r},$$

adică

$$d\Phi = k d\theta,$$

de unde

$$\Phi = k\theta + const$$

sau, în coordonate carteziene:

$$\Phi = k \, arc\, tg \frac{y}{x} + const.$$

Avem de a face aici cu o funcțiune continuă Φ ciclică, deci multiformă, deoarece valorile lui Φ într'un punct se găsesc crescute cu $2\pi k$, de câte ori se trece prin acel punct după descrierea unui ciclu în jurul originii (vom vedea mai târziu că această mișcare este determinată, în caz de continuitate a vitesei, de un *fir rotațional* după axa z).

b) În cazul când trebue ținut seamă și de gravitate, al cărei câmp este constant în spațiu și în timp, trebue să adăogăm în (19.1) termenul $-gz$ (în care caz mișcarea, depinzând de z, nu mai este plană), scriind :

$$\frac{p}{\rho} = C^{tă} - gz - \frac{1}{2}\frac{k^2}{r^2}.$$

Mișcarea fiind potențială, această ecuație nu-și schimbă forma în prezența viscozității.

Valoarea constantei pentru suprafața liberă cu $p = p_a$ sau, mai simplu, pentru meridiana acesteia, raportată la asimptota orizontală, rezultă, dacă considerăm punctul acelei meridiane cu $z = 0$ și $r = \infty$. Intradevăr, în acest caz $\frac{p_a}{\rho} = C^{tă}$ și ecuația meridianei în chestiune (vezi partea superioară a curbei din fig. 124, unde axa r ar fi asimptota orizontală), ia forma simplă :

$$z = -\frac{k^2}{2gr^2}. \qquad (19.2)$$

Așa dar, suprafața liberă este un hiperboloid de rotație de gradul al treilea (cazul aproximativ al suprafeței apei din jurul vârtejului ce se produce, datorită viscozității și frecărei cu pereții, la scurgerea quasi-permanentă a unui bazin printr'un orificiu de fund, puțin adânc).

Pentru $r = a$ avem după (19) $k = \omega_a a^2$ și după (19.2) $z_a = -\frac{\omega^2_a a^2}{2g}$, unde ω_a și z_a sunt valorile corespunzătoare razei a.

Putem avea pentru partea curbei dintre asimptotă și cercul de rază a ordonate pozitive z', ca și în cazul meridianei (18.2), dacă coborâm suficient axa absciselor, cu cantitatea $h \equiv -z_a + c$, în care caz $z' \equiv z + h \equiv z - z_a + c$, c fiind o constantă arbitrară pozitivă, care reprezintă ordonata cercului de rază a, față de noua axă, fig. 124. Vom avea, întrebuințând aceiași notație z pentru noua ordonată z':

$$z = \frac{\omega^2 a}{2g}\left(a^2 - \frac{a^4}{r^2}\right) + c. \qquad (19.3)$$

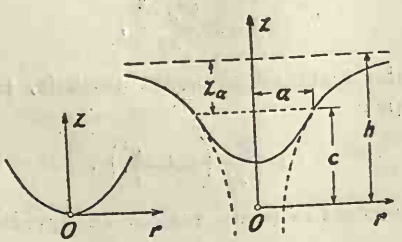


Fig. 123

Fig. 124
Vârtejul lui Rankine

Aplicaţia Nr. 104. *A se studia racordarea celor două mişcări de rotaţie din aplicaţiile* Nr. 102 şi Nr. 103 *după un cerc orizontal de rază a (vârtejul lui Rankine).*

Răspuns. Dacă, pentru ecuaţia meridianei parabolice (18.2) din fig. 123, coborâm de asemenea axa absciselor, astfel ca ordonata cercului cu raza a, care este $z_a \equiv \frac{\omega^2}{2g} a^2$, să devină, ca şi la meridiana hiperbolică, $=c$, în scop de a racorda arcul, de la $r=0$ la $r=a$, al acestei curbe cu partea meridianei hiperbolice (19.3) de la $r=a$ la $r=\infty$, obţinem pentru parabolă, punând totodată $\omega=\omega_a$ (întrucât aici ω este constant şi voim a face racordarea cu legea hiperbolică de mai sus):

$$z=\frac{\omega^2_a}{2g}(r^2-a^2)+c. \qquad (19.4)$$

Racordarea curbelor se realizează de la sine şi la *tangenţă*, deoarece pentru $r=a$ la ambele curbe (19.3) şi (19.4) avem:

$$\left(\frac{dz}{dr}\right)_a = \frac{\omega^2_a}{2g} 2a,$$

nu însă şi la *curbură*, care este diferită. Curba combinată, astfel obţinută, se numeşte curba *vârtejului combinat* al lui *Rankine* (fig. 124).

Întrucât la curba (18.2), faţă de axa primitivă a absciselor avem înălţimea cercului a, deasupra vârfului parabolei:

$$z_a = \frac{\omega^2_a a^2}{2g},$$

iar la curba (19.2), faţă de asimptota orizontală avem adâncimea cercului a:

$$-z_a = \frac{\omega^2_a a^2}{2g},$$

rezultă că adâncimea totală a depresiunii vârtejului este suma:

$$\frac{\omega^2_a a^2}{g},$$

cercul a de racordare găsindu-se la mijlocul acestei adâncimi.

Luând în ambele ecuaţii (19.4) şi (19.3)

$$c \equiv \frac{\omega^2_a a^2}{2g},$$

revenim la axa absciselor luată iniţial pentru parabolă, în care caz curba hiperbolică are drept ecuaţie:

$$z=\frac{\omega^2_a}{2g}\left(2a^2-\frac{a^4}{r^2}\right).$$

Acest vârtej combinat se poate realiza cu aproximaţie într'o experienţă făcută în doi timpi:

a) Învârtind cu ω un vas cu apă în jurul unei axe verticale, graţie viscozităţii, care este pusă în joc din aproape în aproape prin frecarea pereţilor de la fron-

ieră, se atinge după un timp în fluid uniformizarea lui ω, adisă la limită mișcarea din aplicația Nr. 102, cu paraboloidul de rotație ca suprafață liberă.

b) Oprind brusc vasul (ceeace nu influențează decât mai târziu masa centrală în rotație permanentă, rotațională), intervin în sens invers și cu intensitatea inițială (vitesa relativă inițială fiind inversată) frecările de la pereți, iar eforturile de viscozitate, începând de la perete, sunt și ele inversate treptat în spre interior. Mișcarea intrând astfel încetul cu încetul în repaus cu începerea regiunii periferice, este natural să obținem în această regiune aproximativ, după un timp oarecare, o rotație potențială.

Aplicația Nr. 105. *A se studia rotația unei mase lichide, lipsită de viscozitate, în jurul unei axe verticale z, într'un câmp de forță neconservativ, cu variație lineară în spațiu.*

Răspuns. Să considerăm o masă lichidă într'un cilindru circular, cu axa pe *Oz* (vertical). Lichidul, plecând din repaus, se mișcă sub acțiunea câmpului:

$$F_x = Ax + By$$
$$F_y = B'x + C'y$$
$$F_z = 0,$$

care, în cazul $B \neq B'$, nu admite un potențial de forță.

Dacă punem și aici $v_x = -\omega y$, $v_y = \omega x$, $v_z = 0$, unde ω este funcție numai de timp (rotație nepotențială, vezi penultima aplicație Nr. 103), aceste valori satisfac ecuația de continuitate:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0,$$

precum și condițiile la limită. Ecuațiile de mișcare devin:

$$\left.\begin{aligned} -y\frac{d\omega}{dt} - \omega^2 x &= Ax + By - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \\ x\frac{d\omega}{dt} - \omega^2 y &= B'x + C'y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \end{aligned}\right\} . \qquad (15)$$

Derivând prima după y și a doua după x și scăzând una din alta, p se elimină și găsim:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{2}(B' - B).$$

Așa dar, cu excepția cazului $B = B'$, lichidul se va învârti cu o accelerație unghiulară constantă în jurul axei z.

Pentru a afla pe p, înlocuim valoarea găsită a lui $\frac{d\omega}{dt}$ în cele două ecuații (15) și, după înmulțirea respectiv cu dx, dy, adunăm și integrăm:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}\left(Ax^2 + \frac{B + B'}{2}xy + Cy^2\right) + const.$$

Suprafețele de nivel sunt, ca și ω, funcțiuni de timp.

Aplicaţia Nr. 106. *A se studia mişcarea plană de rotaţie (nepermanentă) de origină electromagnetică, imprimată lichidului dintr'un vas cilindric metalic, în care avem un câmp magnetic uniform, paralel cu generatricele, şi facem să se scurgă radial spre pereţi un curent electric dintr'un fir aşezat în axă, prin intermediul lichidului, presupus conductor, aflător în vas. Mişcarea lichidului electrizat se datoreşte acţiunei câmpului magnetic.*

Răspuns. Forţele exterioare vor fi de forma:

$$F_x = -\frac{ky}{r^2}, \qquad F_y = \frac{kx}{r^2}, \qquad F_z = 0.$$

Intr'adevăr, dacă I este curentul total ce emană dintr'un centimetru liniar de fir, curentul pe cm^2 de suprafaţă cilindrică la distanţa r de axă va fi $\frac{I}{2\pi r}$, şi dacă B este componenta inducţiei magnetice, paralelă cu axa, forţa ρF exercitată mutual între o masă de $1\ cm^3$ de o lungime $\delta r = 1\ cm$ şi o secţiune $= 1\ cm^2$, parcursă radial de curentul $\frac{I}{2\pi r}$, pe de oparte, şi câmpul magnetic cu inducţia B pe de altă parte (forţă raportată la $1\ cm^3$ de lichid), în direcţia perpendiculară pe curent şi pe inducţie, adică după tangenta la cercul de rază r, va fi:

$$\rho F = \frac{IB}{2\pi r}, \quad \text{deci} \quad F = \frac{k}{r},$$

Proecţiile pe axele x şi y, ale forţei F, care, lichidul având densitatea ρ, este raportată la $1\ gr$, reprezentând deci intensitatea câmpului de forţă, se obţin înmulţind pe F respectiv cu $-\frac{y}{r}, \frac{x}{r}$, ceeace dă $-\frac{ky}{r^2}$ şi $\frac{kx}{r^2}$.

Moleculele de lichid electrizate se vor pune în mişcare de rotaţie (in direcţia lui F) şi, dacă luăm acum $v_z = -\omega y$, $v_y = \omega x$, $v_z = 0$, unde ω este o funcţie de r şi t, ecuaţiile de mişcare în sistemul lui *Euler* vor fi:

$$\left.\begin{aligned} -y\frac{\partial\omega}{\partial t} - \omega^2 x &= -\frac{ky}{r^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \\ x\frac{\partial\omega}{\partial t} - \omega^2 y &= -\frac{kx}{r^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \end{aligned}\right\}. \qquad (16)$$

Prin eliminarea lui p şi după toate simplificările, ţinând seamă că:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \quad \text{şi} \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r},$$

obţinem:

$$2\frac{\partial\omega}{\partial t} + r\frac{\partial^2\omega}{\partial r\,\partial t} = 0.$$

Mai departe obţinem, integrând o dată în raport cu t:

$$2\omega + r\frac{\partial\omega}{\partial r} = \varphi(r)$$

și încă o dată în raport cu r, după ce vom fi înmulțit cu rdr:

$$\omega r^2 = \int \varphi(r) r dr + F(t),$$

de unde:

$$\omega = \frac{F(t)}{r^2} + f(r),$$

$f(r)$ și $F(t)$ fiind funcțiuni arbitrare. Dacă pentru $t=0$ punem $\omega=0$:

$$\frac{F_0}{r^2} + f(r) = 0,$$

se poate elimina $f(r)$, obținându-se:

$$\omega = \frac{F(t) - F(o)}{r^2} = \frac{\lambda(t)}{r^2},$$

unde λ este o funcție de t, care se anulează odată cu timpul.

Se vede că mișcarea nu este potențială, căci numai când ω este invers proporțional cu r, ca la aplicația Nr. 103 (nu, ca aici, cu r^2), avem un potențial de viteză.

Introducând această valoare a lui ω în (16), obținem:

$$-\frac{y}{x^2+y^2}\left(k - \frac{d\lambda}{dt}\right) + \lambda^2 \frac{x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{x}{x^2+y^2}\left(k - \frac{d\lambda}{dt}\right) + \lambda^2 \frac{y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

și integrând (după înmulțirea respectiv cu: dx, dy și adunare):

$$\frac{p}{\rho} = \left(k - \frac{d\lambda}{dt}\right) arc\, tg \frac{y}{x} - \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{r^2} + \lambda(t).$$

Cum p este cu necesitate o funcție uniformă, iar nu multiformă ca $arc\, tg \frac{y}{x}$, trebue anulat termenul respectiv, adică să avem: $\frac{d\lambda}{dt} = k$, deci $\lambda = kt$, fără constantă de integrare, fiindcă pentru $t=0$ am presupus $\omega=0$ și deci $\lambda=0$.

Așa dar, vom avea:

$$\omega = \frac{kt}{r^2} \quad \text{și} \quad \frac{p}{\rho} = -\frac{1}{2}\frac{k^2t^2}{r^2} + \lambda(t).$$

BCU IAȘI - CENTRALA UNIVERSITARĂ LIBRARY

CAP. IX.

ACȚIUNEA DINAMICĂ A UNUI FLUID ÎN MIȘCARE ASUPRA UNOR PEREȚI FIXI SAU MOBILI, EGALĂ ȘI DE SENS CONTRAR CU REACȚIUNEA ACESTORA.

1. **Echilibru dinamic.** Forțele aplicate unei mase fluide în mișcare se vor găsi în relație de echilibru, dacă pe lângă forțele reale (dintre care cele interne evident se elimină două câte două, ca acțiune și reacțiune) se consideră și forțele de inerție, adică produsul accelerațiilor, luate în sens invers, ale diverselor molecule, cu masele acestora.

Forțele reale, în echilibru fictiv cu aceste forțe de inerție, sunt acele datorite câmpului exterior $\overline{F}$ (forțe masice) și acelea aplicate, drept reacțiuni, pe suprafața limitativă σ a volumului τ, ocupat de masa în chestiune. Aceste din urmă forțe, compuse din reacțiunile, fie ale unor frontiere solide, fie ale restului fluidului, le vom însemna cu $\overline{p}$ pe unitatea de suprafață, includându-atât reacțiunea presiunei elastice p a mașei fluide considerate, exercitate pe pereți și pe restul fluidului, normal pe suprafața σ, cât și reacțiunea efortului de frecare cu pereții sau de viscozitate asupra restului fluidului. Evident că oricare din termenii sau sistemele de forțe considerate în acest echilibru fictiv, pe care îl vom numi *echilibru dinamic*, se poate deduce din celelalte, întrucât suma tuturor vectorilor reprezentativi ai acestor forțe constitue un sistem *echivalent cu zero*.

Putem enunța, așa dar, că va fi nulă suma geometrică a menționaților vectori (deci și suma proecțiilor lor pe orice axă) și totodată va fi nulă suma geometrică a momentelor în raport cu orice punct (deci și suma proecțiilor momentelor pe orice axă, sau suma momentelor în jurul oricărei axe arbitrare).

Aceste relaţiuni permit a se găsi în special, drept contraparte corespunzătoare a numitelor reacţiuni ale pereţilor, *acţiunea dinamică* (împingere sau impulsiune) a fluidului asupra ansamblului suprafeţelor rigide σ_0 ale frontierei, exterioară sau interioară (corp înplântat în fluid). Acţiunea în chestiune se poate totdeauna exprima printr'o rezultantă de translaţie şi un cuplu rezultant. In această problemă dinamică, frecarea pe cm^2 aplicată fluidului din partea pereţilor solizi şi care depinde de viscozitatea fluidului şi de gradul de asperitate al pereţilor, este cuprinsă în reacţiunea totală $\bar{p}$ a acestora, nefiind nevoie a se trata separat.

In ceea ce priveşte reacţiunea totală, datorită restului fluidului, notată tot cu $\bar{p}$ pe unitatea de suprafaţă a frontierei fluide, conţine şi ea efortul de viscozitate, care însă în general este neglijabil, socotindu-se numai presiunea elastică p, normală pe numita suprafaţă, în spre interiorul masei considerate.

Sistemul complet al forţelor reale şi de inerţie, având o sumă vectorială nulă, vom scrie în cazul cel mai general:

$$\int^{\tau} \rho \bar{F} d\tau + \oint^{\sigma} \bar{p} d\sigma - \int^{\tau} \rho \frac{d\bar{v}}{dt} d\tau = 0. \qquad (1)$$

Ultima integrală, aceea a forţelor de inerţie (acceleraţiile cu sens invers, înmulţite cu masele respective), se poate descompune în alte două integrale, susceptibile de anumite interpretări fizice. Vom face această descompunere mai întâi în proecţie pe o axă, de ex. axa x, în al doilea rând cu ajutorul calculului vectorial şi, în fine, printr'o metodă cu caracter geometric, care va fixa şi mai bine ideile în stabilirea acestei importante teoreme.

I. In proecţie pe axa x vom avea identitatea

$$\int^{\tau} \rho \frac{dv_x}{dt} d\tau \equiv \int^{\tau} \left[\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + \rho \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \right] d\tau$$

$$\equiv \int^{\tau} \left\{ \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} - v_x \left[\frac{\partial (\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial z} \right] \right.$$

$$\left. + \frac{\partial (\rho v_x^2)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v_x v_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho v_x v_z)}{\partial z} \right\} d\tau$$

şi cum paranteza din mijlocul membrului din urmă, în virtutea ecuaţiei de continuitate, este $= -\frac{\partial \rho}{\partial t}$, iar $\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial t} \equiv \frac{\partial (\rho v_x)}{\partial t}$, vom putea scrie:

$$\int^{\tau} \rho \frac{dv_x}{dt} d\tau \equiv \int^{\tau} \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t} d\tau + \int^{\tau} div(\rho v_x \bar{v}) d\tau$$

sau, aplicând ultimei integrale teorema lui *Gauss*:

$$\int^{\tau} \rho \frac{dv_x}{dt} d\tau \equiv \int^{\tau} \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t} d\tau + \oint^{\sigma} \rho v_x \bar{v} d\bar{\sigma}. \qquad (2)$$

Ori, sub semnul penultimei integrale recunoaştem proecţia pe axa x a derivatei parţiale în raport cu timpul (derivată locală) a cantităţei de mişcare $\rho \bar{v} d\tau$ a elementului de masă $\rho d\tau$. Tot astfel, sub semnul ultimei integrale (de suprafaţă) recunoaştem proecţia pe axa x a cantităţii de mişcare a debitului de masă *eşind* prin $d\sigma$ (căci $\bar{v}\, d\bar{\sigma} \equiv \bar{v}\, \bar{n}\, d\sigma$ şi $\bar{n}$ prin convenţie este normala exterioară), adică proecţia vectorului $\rho \bar{v}\, (\bar{v}\, d\bar{\sigma})$.

Aşa dar, identitatea (2) împreună cu celelalte două, relative la axele y şi z, dau descompunerea integralei vectoriale ultime din (1) în alte două, având fiecare un înţeles fizic precis.

Relaţia (1) se va scrie acum:

$$\int^{\tau} \rho \bar{F} d\tau + \oint^{\sigma} \bar{p}\, d\bar{\sigma} - \int^{\tau} \frac{\partial(\rho \bar{v})}{\partial t} d\tau - \oint^{\sigma} \rho\, \bar{v} \cdot \bar{v} d\bar{\sigma} = 0. \qquad (3)$$

II. Stabilirea prin *calculul vectorial* al acestei ecuaţiuni vectoriale, în care nu prezintă dificultate de cât ultimii doi termeni cinematici, are nevoie de o generalizare a operaţiei simbolice *divergenţă*, care, aplicată mai întâi la un vector, înmulţit înaintea sa cu un scalar, se poate extinde apoi simbolic la cazul când acest scalar este înlocuit printr'un vector (ca *antecedent*).

Avem astfel mai întâi următoarele relaţiuni evidente de derivare vectorială:

$$div(u_x \bar{v}) \equiv \bar{v}\, grad\, u_x + u_x div \bar{v}$$
$$div(u_y \bar{v}) \equiv \bar{v}\, grad\, u_y + u_y div \bar{v}$$
$$div(u_z \bar{v}) \equiv \bar{v}\, grad\, u_z + u_z div \bar{v},$$

din care tragem:

$$x\, div(u_x \bar{v}) + y\, div(u_y \bar{v}) + z\, div(u_z \bar{v}) \equiv \bar{v}\, grad.\bar{u} + \bar{u} div \bar{v}. \qquad (4)$$

După cum prin primul termen din membrul al doilea am convenit generalizarea operaţiunei *grad*, aplicată unui scalar, la aceea aplicată unui vector, vom generaliza acum *divergenţa*, luată pentru

un vector, la aceea luată pentru un simbol de formă diadică, definind operaţia $div(\bar{v}.\bar{v})$ prin următoarea relaţie:

$$\mathbf{x}div(u_x\bar{v}) + \mathbf{y}div(u_y\bar{v}) + \mathbf{z}div(u_z\bar{v}) \equiv div(\bar{u}.\bar{v}), \quad (5)$$

analog cu:

$$\mathbf{x}.\bar{v}grad u_x + \mathbf{y}.\bar{v}grad u_y + \mathbf{z}.\bar{v}grad u_z \equiv \bar{v}grad.\bar{u}\ .$$

Vectorul antecedent $\bar{u}$ reprezintă de fapt trei scalari, cari sunt componentele lui.

Cu convenţia (5) vom scrie (4):

$$div(\bar{u}.\bar{v}) \equiv \bar{v}\ grad.\bar{u} + \bar{u}\ div\ \bar{v}, \quad (6)$$

uşor de ţinut minte, întrucât are aceiaşi formă ca şi în cazul când, în loc de antecedentul $\bar{u}$ am avea un scalar.

Punctul dintre $\bar{u}$ şi $\bar{v}$ este necesar, pentru a arăta că nu este vorba de un produs scalar, ci de operaţiunea arătaţă mai sus. Nu se poate spune însă că este vorba de aceiaşi natură de *diadă*, ca cea tratată în Cap. IV, unde diada este un operator şi i se alătură un al treilea vector, fie la antecedent, fie la consecvent, pentru a-l înmulţi scalar.

Drept un asemenea al treilea vector nu putem socoti aci nici simbolul $div \equiv \nabla$ ce precede antecedentul, fiindcă $div(\bar{u}.\bar{v})$, reprezentând un vector definit ca mai sus, diferă de vectorul $\bar{v}\ div\bar{u}$, care ar rezulta din înmulţirea scalară a lui ∇ cu $\bar{u}$, pentru a da un multiplicator scalar lui $\bar{v}$; pentru aceleaşi motive el diferă şi de $\bar{u}div\bar{v}$.

Acest nou rol al notaţiei $\bar{u}.\bar{v}$, care deci nu este propriu zis o diadă, nu permite nici el comutaţia, fiindcă diferenţa, faţă de vectorul comutat:

$$\bar{v}\ grad.\bar{u} + \bar{u}\ div\bar{v} - \bar{u}grad.\bar{v} - \bar{v}\ div\bar{u} \equiv rot\ [\bar{u}\,\bar{v}]$$

nu este nulă în general, decât dacă produsul vectorial $[\bar{u}\,\bar{v}]$ ar fi un vector de câmp lamelar, sau am avea cazul particular $\bar{u} \| \bar{v}$, cum este de ex. cazul cu $\bar{u} \equiv \rho\bar{v}$, în care

$$div(\rho\bar{v}.\bar{v}) \equiv \bar{v}\ grad.\rho\bar{v} + \rho\bar{v}\ div\bar{v} = div\ (\bar{v}.\rho\bar{v}) \quad (7)$$

şi unde comutaţia este permisă, întrucât în acest caz avem $[\bar{u}.\bar{v}] \equiv 0$, antrenând şi $rot[\bar{u}.\bar{v}] \equiv 0$.

Pentru cazul general este deci esențial de a indica vectorul, aci $\bar{u}$, care se desface în componentele lui scalare, și de aceea am convenit mai sus a-i da un anumit loc, locul de *antecedent*.

Așa dar, expresia $div(\bar{u}.\bar{v})$ va exprima un vector, ale cărui componente rezultă din aceleași operațiuni formale, aplicate argumentului din paranteză, în care $\bar{u}$ este înlocuit succesiv prin u_x, u_y, u_z. Această explică pentru ce teorema lui *Gauss* se poate aplica întocmai acestei noi *divergențe*, scriind:

$$\int^{\tau} div\,(\bar{u}\cdot\bar{v})\,d\tau \equiv \oint^{\sigma} \bar{u}(\bar{v}\,n)\,d\sigma \equiv \oint^{\sigma} \bar{u}\cdot\bar{v}\,d\bar{\sigma}. \qquad (8)$$

Prin comutația lui $\bar{u}$ și $\bar{v}$, ultima integrală, în care figurează acum o adevărată diadă $\bar{u}\cdot\bar{v}$, se transformă evident în conjugata ei, ca orice sumă de diade.

După lema de mai sus, iată acum stabilirea prin calculul vectorial a relației (3).

Avem, desvoltând, adunând și scăzând aceiași cantitate și concentrând:

$$\rho\frac{d\bar{v}}{dt} \equiv \rho\frac{\partial\bar{v}}{\partial t} + \rho\bar{v}\,grad.\bar{v} \equiv \rho\,\underbrace{\frac{\partial\bar{v}}{\partial t} + \bar{v}\frac{\partial\rho}{\partial t}}_{\frac{\partial(\rho\bar{v})}{\partial t}} + \rho\bar{v}\,grad.\bar{v} \underbrace{- \bar{v}\frac{\partial\rho}{\partial t}}_{\bar{v}\,div\,(\rho\bar{v})}, \qquad (9)$$

căci

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + div\,(\rho\bar{v}) = 0$$

este ecuația de continuitate.

Dar

$$\rho\bar{v}\,grad.\bar{v} \equiv \bar{v}\,grad.\,\rho\bar{v} - \bar{v}\cdot\bar{v}\,grad\rho$$

și

$$\bar{v}\,div(\rho\bar{v}) \equiv \bar{v}\rho\,div\,\bar{v} + \bar{v}\cdot\bar{v}\,grad\rho,$$

astfel că (9) se poate scrie:

$$\rho\frac{d\bar{v}}{dt} \equiv \frac{\partial(\rho\bar{v})}{\partial t} + \bar{v}\,grad.\rho\bar{v} + \rho\bar{v}\,div\,\bar{v} \equiv \frac{\partial(\rho\bar{v})}{\partial t} + div\,(\bar{v}\cdot\bar{v}),$$

iar integrând pe volumul τ și aplicând apoi ultimului termen teorema lui *Gauss* (8):

$$\int^{\tau} \rho \frac{d\bar{v}}{dt} d\tau \equiv \int^{\tau} \frac{\partial(\rho\bar{v})}{\partial t} d\tau + \oint^{\sigma} \rho \bar{v} \cdot \bar{v} \, d\bar{\sigma}.$$

c.c.t.d.

Notă. Formula (3) a *echilibrului dinamic* al unei mase fluide în mişcare conduce la următorul enunţ:

O masă fluidă în mişcare se poate considera în orice moment t ca fiind în echilibru sub acţiunea forţelor reale şi a forţelor de inerţie, acestea putându-se înlocui prin următoarele sisteme de forţe fictive:

1). *Integrala de volum a derivatei parţiale în raport cu timpul, luată cu semn schimbat, a cantităţei de mişcare a elementului de masă;* la o mişcare permanentă această derivată este peste tot nulă.

2). *Integrala de suprafaţă a cantităţei de mişcare a masei intrânde în unitatea de timp* $dM = -\rho \bar{v} d\bar{\sigma}$ *prin elementul* $d\sigma$:

$$-\oint^{\sigma} \rho \bar{v} \cdot \bar{v} \, d\bar{\sigma} = \oint^{\sigma} \bar{v} dM.$$

Aşa dar, păstrând lui $\bar{v}$ direcţia sa intrinsecă, masa dM va fi pozitivă, dacă ea prin $d\sigma$ intră în volumul τ, şi negativă dacă iese, sau, dacă voim a lua debitul de masă ca pozitiv chiar atunci când iese, trebuie să inversăm în acest caz sensul vectorului $\bar{v}$, cu alte cuvinte *să luăm toţi vectorii* $\bar{v}$ *îndreptaţi în spre interiorul volumului* τ.

Să luăm ca exemplu o porţiune τ dintr'un tub sau canal fix, străbătut de un curent în *mişcare permanentă*, în care caz

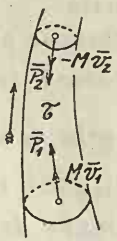


Fig. 125

numai sistemul 2) de forţe fictive trebuesc introduse, pentru a asigura echilibrul dinamic. Presiunile $\bar{R}$ pe porţiunea τ a curentului, din partea pereţilor solizi, se echilibrează atunci cu greutatea proprie $\bar{G}$ a fluidului, cu presiunile $\bar{P}_1$ şi $\bar{P}_2$ pe cele două secţiuni

BCU IASI / CENTRALA UNIVERSITARA

1 și 2, cari limitează τ, și cu forțele fictive $M\bar{v}_1$ și $M\bar{v}_2$ (unde M este debitul de masă, pozitiv, al tubului, iar $\bar{v}_1$ și $\bar{v}_2$ vitesele, presupuse uniform repartizate, din menționatele secțiuni Ω_1 și Ω_2), aplicate respectiv în centrele secțiunilor.

Așa dar, presiunile pe suprafața limitativă se pot împărți în două: sistemul $\bar{R}$ al reacțiunilor pereților σ_0 ai canalului și presiunile $\bar{P}_1$ și $\bar{P}_2$ aplicate de restul fluidului asupra secțiunilor $\sigma_1 \equiv \Omega_1$ și $\sigma_2 \equiv \Omega_2$ (în centrul acestora), care complectează frontiera volumului τ.

Rezultă că sistemul $\bar{R}$ de forțe al reacțiunilor pereților este echivalent cu ansamblul inversat (ca sens) al forțelor $\bar{G}, M\bar{v}_1, -M\bar{v}_2, \bar{P}_1$ și $\bar{P}_2$ (deci sistemul *acțiunei* apei sau al *împingerei* $\bar{I} \equiv -\bar{R}$ va fi exact echivalent cu acest ansamblu), aplicate respectiv în centrul de greutate al lui τ și în centrele secțiunilor Ω_1 și Ω_2. Forțele de viscozitate sau frecare, aplicate lui τ pe suprafața σ_0, sunt cuprinse în sistemul $\bar{R}$, pe când cele din secțiunile Ω_1 și Ω_2, aplicate lui τ, sunt în general neglijabile.

Regula de mai sus se schimbă, dacă canalul este mobil, deoarece mantaua rigidă σ_0 a volumului τ, care mai sus era fixă, în acest caz se deplasează, și în consecință va trebui să ținem seama și de $\int \bar{v} dM$ prin suprafața σ_0, socotită fictiv ca fixă. Dacă însă este vorba de un *înfreg rotor* de turbină, care este limitat de doi pereți în formă de rotație în jurul axei turbinei, spațiul dintre ei fiind împărțit, prin palete, în o serie de canale, regula de mai sus se poate aplica neschimbată.

Intradevăr, neglijând grosimea paletelor, frontierele duble ale acestora, cuprinse în σ_0, procură termeni $\bar{v} dM$ câte doi egali și inverși, astfel că $\int \bar{v} dM$ prin σ_0 va fi și acum nul, neexistând nici o diferență față de cazul unui singur canal fix. Bineînțeles vectorii $\bar{v}\delta M$ și $\delta\bar{P}$ din secțiunile de intrare și eșire, îndreptați toți în spre interiorul lui τ, vor fi acum repartizați (*uniform*) pe secțiuni inelare, *simetric* în raport cu axa de rotație. Grație acestei simetrii axiale, dacă se cere calculul momentului cuplului de acțiune, aplicat din partea apei asupra rotorului turbinei, cum $\bar{P}_1$ și $\bar{P}_2$ sunt, ori paralele cu axa (*turbine axiale*) ori perpendiculare (*turbine radiale*) pe axa turbinei, trecând prin

această axă, prin care trece în orice caz și rezultanta $\bar{G}$ a greutății proprii a apei, singurele forțe cari vor contribui la cuplul în chestiune vor fi $\bar{v}_1\delta M$ și $\bar{v}_2\delta M$ (ale diverselor canale), pe care le vom putea atunci presupune concentrate într'un singur punct de aplicație, fiindcă pentru *moment* nu contează decât mărimea, direcția și *brațul* acestor forțe.

Această expresie a cuplului a fost dată pe cale analitică de *Euler*, care a descoperit ecuațiile Hidrodinamicei, ce îi poartă numele, tocmai cu ocazia studiului său celebru asupra turbinei inventate de *Segner*.

III. In fine, vom da o demonstrație a ecuației (3) și prin o a treia metodă, care este cea mai intuitivă și practică.

Descompunem vectorul acceleratiei unei molecule conform definiției, care constă în a lua la limită raportul creșterii vectoriale a vitesei, împărțită cu timpul:

$$\bar{j} = \frac{d\bar{v}}{dt} = lim \frac{\bar{v}_2 - \bar{v}_1}{\delta t}.$$

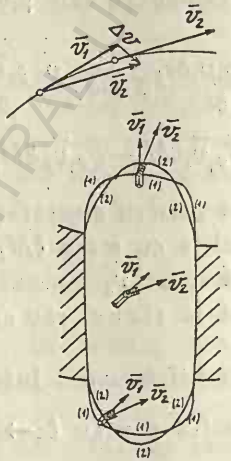


Fig. 126

Să considerăm o masă, care în momentul inițial t_1 ocupă volumul inițial τ_1, iar în momentul $t_2 = t_1 + \delta t$ volumul τ_2 (fig. 126). Vom avea pentru elementul de masă, egal respectiv cu $\rho_1\delta\tau_1$ sau $\rho_2\delta\tau_2$:

$$\delta m \equiv \rho_1\delta\tau_1 \equiv \rho_2\delta\tau_2.$$

Vectorul forţei de inerţie se poate desface astfel:

$$-\bar{j}\delta m = lim\,(\rho_1 \bar{v}_1 \delta\tau_1 - \rho_2 v_2 \delta\tau_2)\,\frac{1}{\delta t}.$$

In partea comună τ_c vom avea sistemul de vectori (însemnând prin simbolul $\bar{S}$, un *sistem* de vectori *fixaţi* în punctele lor de aplicaţie):

$$lim\,(\bar{S}_{\tau_c}\rho_1 \bar{v}_1 \delta\tau_1 - \bar{S}_{\tau_c}\rho_2 \bar{v}_2 \delta\tau_2)\,\frac{1}{\delta t}. \qquad (10)$$

şi cum sub simbolul $\bar{S}_{\tau_c}$, care se referă la integrale pe acelaşi volum, nimic nu împedică de a lua acum $\delta\tau_1 \equiv \delta\tau_2 \equiv \delta\tau$, (10) poate primi forma concentrată:

$$-\bar{S}_\tau \frac{\partial(\rho\bar{v})}{\partial t}\,\delta\tau, \qquad (10.1)$$

unde τ_c este înlocuit prin limita sa τ, iar în loc de $\delta\tau$ putem lua $d\tau$.

In părţile necomune luând drept $\delta\tau$, volumul generat prin mişcarea lui $\delta\sigma$ în δt, vom avea pentru masele $\rho_1\delta\tau_1 \equiv \rho_1 \bar{v}_1 \delta\sigma_1 \delta t$ întrânde (în τ_c) prin $\delta\sigma_1$ şi pentru cele $\rho_2\delta\tau_2 \equiv \rho_2 \bar{v}_2 \delta\sigma_2 \delta t$ eşinde prin $\delta\sigma_2$:

$$lim\left(\bar{S}_{\sigma_1}\frac{\bar{v}_1\rho_1\bar{v}_1\delta\bar{\sigma}_1}{\delta t}\,\delta t - \bar{S}_{\sigma_2}\frac{\bar{v}_2\rho_2\bar{v}_2\,\delta\bar{\sigma}_2}{\delta t}\,\delta t\right)$$

$$= \bar{S}_{\sigma_1}\bar{v}_1\delta M_1 - \bar{S}_{\sigma_2}\bar{v}_2\,\delta M_2, \qquad (11)$$

unde $\bar{v}_1$ va fi luat numai pentru suprafeţele elementare $\delta\sigma_1$ (cu mase intrânde), fiind înmulţit cu masa δM_1, străcurată în unitatea de timp prin $\delta\sigma_1$, privit fix, iar $\bar{v}_2$ numai pentru suprafeţele $\delta\sigma_2$ (cu mase eşinde), înmulţit la rândul său cu masa δM_2, străcurată prin $\delta\sigma_2$, privit fix.

Putem uni în (11) ambii termeni într'unul singur:

$$\bar{S}_\sigma \bar{v}\,\delta M, \text{ iar la limită pentru } \delta\sigma \to d\sigma\colon \bar{S}_\sigma \bar{v}\,dM, \qquad (11.1)$$

fie privind pe dM pozitiv şi luând toate vitesele la suprafaţă $\bar{v}$ ca *întrânde* (deci inversându-le acolo unde sunt eşinde), fie lăsând vitesele sensul lor intrinsec şi socotind pe dM întrând ca pozitiv iar pe dM eşind ca negativ, ceeace în acest caz revine a lua drept flux al vectorului $\rho\bar{v}$ prin $d\sigma$ (acest $d\sigma$ totdeauna pozitiv) expresia:

$$dM = -\rho\bar{v}\,\bar{n}\,d\sigma = -\rho\bar{v}\,d\bar{\sigma},$$

unde $\bar{n}$ este normala, *exterioară* lui τ.

Substituţia în chestiune a forţelor de inerţie elementare prin cele două sisteme de forţe fictive (10.1) şi (11.1) fiind generală, conduce atât la echilibrul dinamic de translaţie, $\bar{R}$ şi $\bar{P}$ fiind acum rezultante de translaţie (fără cuplurile respective), iar semnul $\bar{S}$, care presupune pe fie care vector în locul său (vectori *fixi*), schimbându-se în acela al integrării vectoriale, care presupune vectorii *liberi*:

$$\bar{R}+\bar{P}-\int^{\tau}\frac{\partial(\rho\bar{v})}{\partial t}d\tau-\oint^{\sigma}\rho\bar{v}\cdot\bar{v}\,d\bar{\sigma}=0, \qquad (11.2)$$

cât şi la acela de rotaţie, pentru care momentele în raport cu orice axă ale forţelor elementare se vor lua după mărimea, direcţia şi *punctul de aplicaţie al acestora*.

Aşa dar, şi pe calea elementară de mai sus ajungem, mai repede chiar şi mai palpabil, la ecuaţia (3) a echilibrului dinamic.

La mişcarea permanentă sistemul (10.1) este evident nul.

In cazul fluidelor incompresibile formulele se simplifică, ρ eşind factor comun.

In rezumat, teorema, care îşi găseşte expresia în formula de mai sus, stabilită în esenţă de *Euler*, se poate enunţa în diferite feluri:

a) Sistemul forţelor aplicate asupra unei mase fluide perfecte sau viscoase de volum τ, *limitat de suprafaţa* σ, *este echivalent cu ansamblul vectorilor rezultaţi din înmulţirea maselor fluide elementare cu derivatele substanţiale ale vitezelor respective.*

b) Inversând sensul acestor din urmă vectori, cari vor reprezenta atunci forţele de inerţie, *masa* în chestiune *se va găsi în echilibru* zis *dinamic* (fictiv) *sub acţiunea forţelor reale aplicate şi a celor de inerţie.*

c) Avem echilibru în acelaşi sens, dacă ansamblul menţionat al forţelor de inerţie este înlocuit prin: 1) vectorii rezultaţi din înmulţirea maselor fluide elementare cu *derivatele locale* (parţiale în raport cu t) ale vitezelor respective cu semn schimbat şi 2) diferenţele vectoriale ale cantităţilor de mişcare intrate în τ în unitatea de timp prin suprafaţa σ, privită ca fixă, minus cele eşite.

Acest al doilea grup de vectori se poate numi *staţionar*, fiindcă la el se reduce, în caz de mişcare *staţionară* (permanentă), ansamblul menţionat, căci primul grup de vectori: 1) este

în acest caz nul, derivatele locale ale vitesei fiind, prin însăși definiția mișcărei, nule.

In desvoltările de mai sus s'a făcut implicit abstracție de existența unor singularități, cum ar fi de ex. surse repartizate, etc, întru cât s'a considerat drept ecuație de continuitate (cu membrul al doilea nul):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}=0.$$

Calculul vectorial ce urmează este liber de o asemenea restricție

2. Cazul fluidelor perfecte incompresibile, având eventual surse repartizate și părți rotaționale, într'un câmp de forță exterioară nul.

Dacă fluidul este incompresibil, iar câmpul forțelor masice $\bar{F}$ nul sau relativ neglijabil (cum este cazul aerului, care deasemenea se poate deseori trata ca având $\rho=const$), numind $\bar{R}\equiv\int^{\sigma_0} p d\bar{\sigma}$ ansamblul reacțiunilor pereților solizi de suprafață σ_0 și $\bar{P}\equiv\int^{\sigma_1} p d\bar{\sigma}$ ansamblul presiunilor exercitate din partea restului fluidului cu $\rho=const$ pe σ_1 (restul suprafeței limitative a unei mase fluide $\int^{\tau}\rho d\tau$, limitată de suprafața totală $\sigma_0+\sigma_1$), vom avea, conform ecuației (11.2) sau ultimului enunț *c*), echivalența vectorială (atribuind acum semnului $\int$ înțelesul atribuit mai sus lui $\bar{S}$):

$$\bar{R}+\bar{P}=\rho\int^{\tau}\frac{\partial\bar{v}}{\partial t}d\tau+\rho\oint^{\sigma_0+\sigma_1}\bar{v}\cdot\bar{v}\,d\bar{\sigma}, \qquad (12)$$

unde $\bar{R}$ este reacțiunea pereților asupra fluidului.

I. *Mișcare permanentă sau staționară.* Să admitem, după *Lagally* (vezi *W. Müller,* Mathematische Strömungslehre), că pe frontiera σ avem în orice caz mișcare permanentă *potențială* (în restul masei putând fi surse și, rotaționalitate), deci pe frontieră:

$$\frac{p}{\rho}+\frac{v^2}{2}=const. \qquad (13)$$

Aceasta poate fi exact pentru frontiera fluidă σ_1 fie chiar în prezența viscozității, dar nu poate fi exact în cazul suprafeței σ_0, a unui perete ori a unui corp ce se mișcă sau este împlântat în fluid, decât dacă fluidul ce ar veni în contact cu pereții n'ar adera pe aceștia; la fluidele naturale de ex., unde aceasta nu se întâmplă, stratul-limită, care aderă la corp, este esențialmente rotațional. Putem totuși admite ipoteza aprox. și în acest caz, considerând stratul limită oareșicum solidar cu pereții și luând pe σ_0 în domeniul imediat vecin, care este mai puțin rotațional.

In ipoteza făcută am avea după (13):

$$\bar{R}+\bar{P}\equiv-\frac{\rho}{2}\oint^{\sigma} v^2 d\bar{\sigma}=-\frac{\rho}{2}\int^{\tau} grad v^2 d\tau$$

și cum

$$\frac{1}{2}grad v^2=\bar{v}\,grad.\bar{v}+[\bar{v}rot\bar{v}]=div(\bar{v}.\bar{v})-\bar{v}div\bar{v}+[\bar{v}rot\bar{v}]\,,$$

am obține, aplicând primei integrale teorema lui *Gauss*, pentru a o transforma în integrală de suprafață după (8):

$$\bar{R}+\bar{P}=\rho\left\{\oint^{\sigma}\bar{v}.\bar{v}\,d\bar{\sigma}-\int^{\tau}\bar{v}div\bar{v}\,d\tau+\int^{\tau}[\bar{v}rot\bar{v}]\,d\tau\right\}. \quad (14)$$

Pentru momentul rezultant al lui $\bar{R}$ și $\bar{P}$ față de un punct, dacă $\bar{r}$ este raza vectoare a unei particule față de acel punct, vom avea evident:

$$\bar{\mathcal{M}}=\rho\left\{\oint^{\sigma}[\bar{r}\,\bar{v}].\bar{v}\,d\bar{\sigma}-\int^{\tau}[\bar{r}\,\bar{v}]div\bar{v}d\tau+\int^{\tau}[\bar{r}\,[\bar{v}rot\bar{v}]]\,d\tau\right\}. \quad (15)$$

Dacă lipsec sursele avem $div\bar{v}=0$, iar dacă lipsesc și masele rotaționale avem și $rot\bar{v}=0$, astfel că (14) și (15) se reduc atunci la

$$\bar{R}+\bar{P}=\rho\oint^{\sigma}\bar{v}.\bar{v}\,d\bar{\sigma}, \quad \bar{\mathcal{M}}=\rho\oint^{\sigma}[\bar{r}\,\bar{v}].\bar{v}d\bar{\sigma}, \quad (16)$$

putându-se interpreta că integralele de volum din (14) exprimă contribuția adusă de surse, respectiv de părțile rotaționale.

Putem distinge la această problemă două cazuri:

a) *Suprafața σ_0 formează o frontieră exterioară.* Dacă fluidul este conținut în frontiera $\sigma_0\equiv\sigma$, vitesa trebuind să fie perpendi-

culară pe normala frontierei solide, integrala de suprafață va fi nulă și, dacă în același timp lipsesc și sursele, vom avea:

$$\bar{R}=\rho\int^{\tau}[\bar{v}rot\bar{v}]d\tau, \tag{17}$$

formulă dată de *Prandtl*.

b) *Suprafața* σ_0 *formează o frontieră interioară iar* σ_1 *o suprafață sferică exterioară de rază foarte mare.* Vom avea în acest caz, ținând seamă că $\bar{v}d\bar{\sigma}_0=0$ ca mai sus:

$$\bar{R}+\bar{P}=\rho\left\{\oint^{\sigma_1}\bar{v}\cdot\bar{v}\,d\bar{\sigma}-\int^{\tau}\bar{v}div\bar{v}\,d\tau+\int^{\tau}[\bar{v}rot\bar{v}]\,d\tau\right\} \tag{17.1}$$

și cum

$$\bar{P}=\frac{\rho}{2}\oint^{\sigma_1}v^2\,d\bar{\sigma},$$

(cu semn schimbat, fiindcă pentru sfera exterioară $\bar{n}$ este în spre exteriorul fluidului, pe când $\bar{P}$ este compus din forțe în spre interior), rezultă că

$$\bar{R}=\rho\left\{\oint^{\sigma_1}(\bar{v}\cdot\bar{v}\,d\bar{\sigma})-\frac{1}{2}v^2d\bar{\sigma}-\int^{\tau}\bar{v}div\,d\tau+\int^{\tau}[\bar{v}rot\bar{v}]\,d\tau\right\} \tag{18}$$

pentru momentul $\mathcal{M}$ rezultând formula, analog ca la (15).

II. *Mișcare variabilă* (*nestaționară*). Dacă în cazul *b*) există și tuburi sau fire rotaționale, cari (ca orice fir solenoidal) sau se închid la capete în circuit închis sau își au capetele așezate pe frontieră (restul fluidului fiind potențial), excludând acele tuburi sau fire prin suprafețe σ_n în număr de n, iar prin alte n tăieturi σ'_n (cari dau $2n$ suprafețe frontiere), transformând domeniul potențial în simplu conex, vom putea alcătui relația integrală ca (12) de mai sus, însă pentru o *mișcare variabilă*, plecând dela ecuația mecanică nestaționară a mișcării potențiale

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{p}{\rho}+\frac{v^2}{2}=f(t) \tag{19}$$

sau, prin luarea gradientului, de la ecuația

$$\frac{\partial}{\partial t}\,grad\,\Phi+\frac{1}{\rho}\,grad\,p+\frac{1}{2}grad\,v^2=0. \tag{19.1}$$

Domeniul, mărginit de toate suprafețele de mai sus, cuprinse

în σ: σ_0, σ_1, $\Sigma\sigma_n$ și $2\Sigma\sigma'_n$, fiind liniar simplu conex, potențialul Φ va fi uniform.

Pentru volumul respectiv τ, folosind formula

$$\bar{v}\,grad.\bar{v} = grad\,\frac{v^2}{2} - [\bar{v}rot\bar{v}]$$

și ținând seamă că acum $rot\bar{v} = 0$, vom avea, aplicând (6):

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}\int^{\tau} grad\Phi d\tau + \int^{\tau} grad\,p d\tau + \rho\int^{\tau} div\,(\bar{v}\cdot\bar{v})\,d\tau$$
$$-\rho\int^{\tau}\bar{v}div\bar{v}d\tau = 0. \qquad (20)$$

În lipsă de surse ($div\bar{v}=0$) și ținând seamă că $\bar{v}\cdot\bar{v}\,d\bar{\sigma}$ la suprafețele duble $2\Sigma\sigma'_n$ se anulează pentru fiecare element dublu $d\sigma'_n$, deoarece normalele exterioare au sensuri opuse, (20), folosind (8) cu $u \equiv v$, devine:

$$-\int^{\tau} grad\,p d\tau = \rho\frac{\partial}{\partial t}\int^{\tau} grad\Phi\,d\tau + \rho\oint^{\sigma_0+\sigma_1+\Sigma\sigma_n}\bar{v}.\bar{v}d\bar{\sigma}. \qquad (21)$$

Pentru același motiv $P_{2\Sigma\sigma'_n}=0$, astfel că (21) prin teorema lui *Gauss* devine:

$$\bar{R}_{\sigma_0}+\bar{P}_{\sigma_1}+\bar{P}_{\Sigma\sigma_n} = \rho\frac{\partial}{\partial t}\oint^{\sigma_0+2\Sigma_2\sigma'_n}\Phi d\bar{\sigma} + \rho\frac{\partial}{\partial t}\oint^{\sigma_1}\Phi\,d\bar{\sigma} + \rho\frac{\partial}{\partial t}\int^{\Sigma\sigma_n}\Phi d\tau$$
$$+\rho\oint^{\sigma_0}\bar{v}\cdot\bar{v}\,d\bar{\sigma} + \rho\oint^{\sigma_1}\bar{v}\cdot\bar{v}\,d\bar{\sigma} + \rho\int^{\Sigma\sigma_n}\bar{v}\cdot\bar{v}d\bar{\sigma}. \qquad (22)$$

Dacă nu există mase rotaționale, suprafețele σ_n și σ'_n dispar din (22), care devine

$$\bar{R}_{\sigma_0}+\bar{P}_{\sigma_1} \equiv \bar{R}+\bar{P} = \rho\frac{\partial}{\partial t}\oint^{\sigma_0+\sigma_1}\Phi d\bar{\sigma} + \rho\oint^{\sigma_0+\sigma_1}\bar{v}\cdot\bar{v}d\bar{\sigma}. \qquad (23)$$

și nu diferă de (16) de cât prin apariția termenului nestaționar în Φ.

Dacă la infinit fluidul este în repaus (mișcarea unui corp într'un fluid în repaus), termenii în σ_1 dispar de asemenea și avem:

$$\bar{R} = \rho\frac{\partial}{\partial t}\oint^{\sigma_0}\Phi d\bar{\sigma} + \rho\oint^{\sigma_0}\bar{v}\cdot\bar{v}d\bar{\sigma}. \qquad (23.1)'$$

Se vede, în fond, că la mișcarea nestaționară apare numai termenul complementar:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \oint^{\sigma_0} \Phi d\bar{\sigma}. \tag{24}$$

Să presupunem că imprimăm ansamblului, compus din fluidul cuprins într'o sferă cu raza crescând la infinit și corpul cu suprafața σ_0 implântat în el, o viteză egală și de sens contrar aceleia a corpului, pentru a-l reduce pe acesta la imobilitate. Vom avea și atunci în (23)

$$\oint^{\sigma_1} \bar{v} \cdot \bar{v} \, d\bar{\sigma} = 0$$

din cauza, în acest caz, a uniformității lui $\bar{v}$, dar potențialul va fi Φ_r al mișcării relative (față de axe solidare cu corpul) de adinioară, devenită acum mișcare absolută, iar ultima integrală se va anula, fiindcă la această mișcare $\bar{v} \, d\bar{\sigma} = 0$, astfel că (23.1) va deveni

$$\bar{R} = \rho \frac{\partial}{\partial t} \oint^{\sigma_0} \Phi_r \, d\bar{\sigma}, \tag{25}$$

rezistența opusă de corp curentului variabil depinzând, așa dar, numai de variația potențialului vitesei relative. Dacă vitesa corpului era $\bar{V}[V_x, V_y, V_z]$, vom avea evident relația:

$$\Phi_r = \Phi - \int \bar{V} d\bar{r} \equiv \Phi - \int V_x dx + V_y dy + V_z dz,$$

fiindcă

$$grad \Phi_r = grad \Phi - \bar{V}.$$

In cazul când potențialul nu variază cu timpul (curent de translație uniform în jurul corpului fix sau mișcare relativă față de corp, obținută prin o mișcare translatoare uniformă a corpului într'un fluid prealabil în repaus), găsim relația:

$$\bar{R} = 0,$$

care exprimă *paradoxul lui d'Alambert*, ce se enunță astfel:

Un corp mișcându-se uniform într'un fluid perfect, în repaus, sau un curent uniform înconjurând un corp fix (din cauza lipsei

de frecări neputându-se imprima rotaționalitate), nu provoacă nici o acțiune mutuală $\pm\bar{R}$ între corp și fluid.

Contrazicerea de realitate a acestui paradox (numit astfel tocmai fiindcă este contrazis de experiență) se explică prin faptul că fluidele naturale nu sunt *perfecte*, producându-se un R, datorit tocmai viscozității și frecării, dar care tinde la zero odată cu acestea.

Aplicația Nr. 107. *A se studia impingerea (sau impulsiunea) unei vine lichide libere permanente asupra unui perete plan* (Fig. 127).

Răspuns. Să considerăm (*Bernoulli*) o vină lichidă de dimensiuni restrânse, care, fiind animată de o anumită vitesă, izbește sub un unghiu α peretele plan MN de o întindre apreciabilă față de secțiunea normală a vinei. (Fenomenul este însoțit și de o pierdere de sarcină).

Fie Ω secțiunea transversală a vinei și $\bar{v}$ vitesa moleculelor (presupusă aceeași în întreaga secțiune AB) înainte de deformarea vinei. Presupunem că axa vinei se găsește într'un plan vertical, perpendicular pe peretele MN și care este acela al figurei. La oarecare distanță de perete vâna lichidă se lărgește progresiv, turtindu-se în cele din urmă aproape paralel cu acesta, iar de la o oarecare distanță în jurul punctului, unde axa vinei înțeapă panul MN (d. e. pe figură dincolo de regiunea CD,EF) vitesele devin paralele cu MN. Uneori turtirea vinei este însoțită de un salt circular, mai mult sau mai puțin pronunțat, de formă permanentă, dincolo de care vâna se scurge paralel peretelui. Să determinăm impingerea $\bar{I}$, exercitată de vână asupra planului, sau reacțiunea $\bar{R}\equiv-\bar{I}$ a planului asupra vinei, reacțiune egală și de sens contrar cu $\bar{I}$ și care, dacă nu există frecare, va fi evident normală pe plan.

Vom aplica teorema cantităților de mișcare, proectate pe normala planului, luată ca pozitivă în sensul în care curge vâna (pe care direcție $\bar{R}$ se va proecta în adevărata mărime și în sens opus), asupra masei lichide $BACDFEB$, AB fiind o secțiune normală a vinei în amonte, într'un loc unde firele n'au fost încă deviate, CD,EF o secțiune cilindrică, normală pe MN, prin părțile masei lichide, unde vitesele au devenit paralele cu MN.

G fiind greutatea masei considerate și β unghiul format de plan cu verticala, vom avea evident:

$$G\sin\beta+\frac{\varpi}{g}\Omega v^2\sin\alpha=R\equiv I,$$

unde termenul în v^2 reprezintă cantitatea de mișcare a masei intrânde în unitatea de timp (forță fictivă de provenință cinetică) prin AB, cele ale maselor eșinde prin CD,EF fiind perpendiculare pe axa de proecție.

Vom lăsa de o parte presiunea atmosferică, care se exercită pe suprafața, căreia aparține conturul $BEBACD$ în secție, presiune care se transmite asupra feței DF a planului, ca și în lipsa vinei, fiind eventual echilibrată de presiunea atmosferică aflată pe fața opusă; ne vom ocupa, așa dar, numai de impulsiunea vinei.

Se vede că impingerea $\overline{I}$ (egală și contrară lui $\overline{R}$) are o parte statică $G\sin\beta$ și o parte dinamică. Se poate de altfel ușor verifica că, dacă alegem poziția secțiunei AB, în porțiunea quazicilindrică a vinei, de ex. ceva mai jos, micșorând astfel partea statică a impulsiunei, cea dinamică va crește exact cu aceeași cantitate, prin creșterea lui $\overline{v}$ datorită căderei de la prima poziție la cea nouă (Ω micșorându-se în consecință, conform ecuației de continuitate).

De obicei la receptoarele hidraulice fiind vorbă de vitese mari, partea statică se neglijează față de cea dinamică.

Se poate deci scrie mai totd'auna aproximativ, sau riguros exact în cazul când planul MN este vertical ($\beta=0$):

$$I=\frac{\varpi}{g}\Omega v^2\sin\alpha=\frac{\varpi}{g}\Omega' v^2\sin^2\alpha=Mv\sin\alpha,$$

Ω' fiind secțiunea oblică a vinei, paralelă cu planul, și M debitul de masă.

Dacă $\alpha=90^0$, avem:

$$I=\frac{\varpi}{g}\Omega v^2=Mv.$$

Se vede, așadar, că expresia impingerei asupra unui plan fix este produsul a doi factori: masa în unitatea de timp M, care izbește planul și componenta normală $v\sin\alpha$, a vitesei cu care izbește. M se poate exprima fie prin secțiunea dreaptă Ω, înmulțită cu vitesa reală, normală pe secțiune, fie prin secțiunea Ω', paralelă cu planul, înmulțită cu componenta acelei vitese după normala la plan.

Dacă planul izbit nu este destul de întins (Fig. 128) pentru ca vitesele, cu care moleculele îl părăsesc la periferie, să fie paralele cu MN, intervine și termenul datorit forțelor, de proveniență cinetică, de la ieșire. Dacă de ex. vitesa la eșire, care, neglijând frecările, se poate lua egală cu v, ar face cu peretele plan de jur împrejur același unghiu γ (înspre exterior), am avea:

$$I=\frac{\varpi}{g}\Omega v^2(\sin\alpha-\sin\gamma)\equiv Mv\sin\alpha\left(1-\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\right).$$

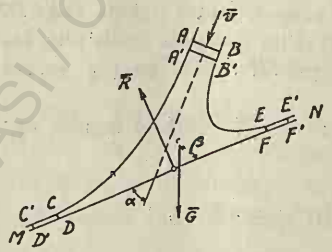


Fig. 127

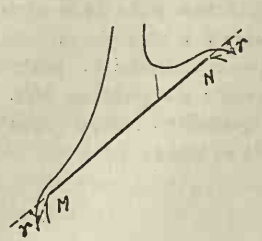


Fig. 128

În cazul unui corp de dimensiuni transversale mici față de secțiunea vinei, dificultatea în efectuarea calculului constă în faptul că direcția vitesele, după părăsirea corpului, nu este în general cunoscută, evaluarea ei putându-se face numai aproximativ.

Dacă vâna iese dintr'un orificiu rotunjit ($m=1$) ω sub o sarcină h, dând $v=\sqrt{2gh}$ (cu un coeficient de viteză egal cu 1), expresia împingerei în cazul $\alpha=90^0$ și $\gamma=0$ devine:

$$I=2\varpi\omega h,$$

adică împingerea dinamică (implusiunea) este egală cu dublul presiunei statice, ce s'ar exercita pe suprafața ω, dacă orificiul ar fi închis.

Aplicația Nr. 108. *A se trata problema din aplicația precedentă, planul fiind în mișcare* (Fig. 129).

Răspuns. a) *Plan în mișcare de translație după normală și isbit normal.* Cazul particular, când peretele plan este izbit *normal* și, în loc de a fi fix, se deplasează cu o viteză de translație $\overline{u}$ *în direcția* vinei lichide, se reduce la cel precedent, dacă dăm ansamblului vitesa $-\overline{u}$ pentru a face peretele imobil. Vom putea scrie atunci cu vitesa relativă $w=v-u$:

$$I=\frac{\varpi}{g}\Omega(v-u)^2,$$

căci și debitul de masă, care izbește peretele, nu mai este debitul absolut M al vinei, ci $\frac{\varpi}{g}\Omega(v-u)$ (vâna lungindu-se tot mai mult treptat cu deplasarea peretelui).

Puterea transmisă peretelui mobil va fi, așa dar:

$$P=Iu=\frac{\varpi}{g}\Omega(v-u)^2u.$$

Vitesa de antrenare u a peretelui, care ar corespunde maximului de putere, rezultă, anulând derivata lui P în raport cu u:

$$u=\frac{v}{3}.$$

La roțile cu palete plane (Fig. 130), mișcate prin impulsiunea apei împrimată pe dedesubt, lucrurile se prezintă altfel; în loc de un singur plan cu vitesa periferică u, avem o succesiune de palete, a căror vitesă de deplasare u, dacă raza roții este suficient de mare, poate fi considerată ca o vitesă de translație. O paletă care se îndepărtează este repede succedată de alta în fața vinei, astfel că, pentru *ansamblul* paletelor roții, trebue luat în considerație debitul de masă absolut M:

$$I=M(v-u),$$

în care caz

$$P=M(v-u)u.$$

În asemenea condiții vitesa de antrenare optimă u_1, adică care ar corespunde lui P_{max}, va fi, precum ușor rezultă:

$$u_1=\frac{v}{2},\quad \text{cu } P_{max}=\frac{1}{2}\frac{Mv^2}{2},$$

adică jumătatea puterei disponibile.

Se vede, așa dar, că eficiența (randamentul) mașinilor sau aparatelor de felul acesta, cari primesc o impulsiune aproape normală pe palete plane, are ca limită teoretică superioară *0,5*.

Pierderea de putere teoretică (neglijând partea absorbită prin frecări și ciocnire), care rezultă astfel de *50%*, constă în energia cinetică (pe unitatea de timp) *reziduală*, adică rămasă la ieșire (la părăsirea paletelor):

$$\frac{Mv'^2}{2},$$

v' fiind vitesa absolută la ieșire, energie care n'a fost utilizată la acționarea roței.

Ca verificare: în ipoteza făcută că frecările și pierderea prin frecare și ciocnire sunt neglijabile, vitesa relativă $w=v-u$ se conservă neschimbată până la ieșire, astfel că $\bar{v}'$ de la eșire se va compune din $\bar{w}$ și $\bar{u}$ dreptunghiulare (Fig. 129):

$$v'^2=w^2+u^2,$$

iar pentru vitesa de antrenare optimă $u_1=\frac{v}{2}$, adică: $w\equiv v-u_1=\frac{v}{2}$:

$$v'^2=\frac{v^2}{2}.$$

Pierderea reziduală va fi atunci egală cu jumătatea puterei disponibile, adică cu $\frac{1}{2}P_{max}$. Randamentul practic este în realitate mai mic, cam de *30%*.

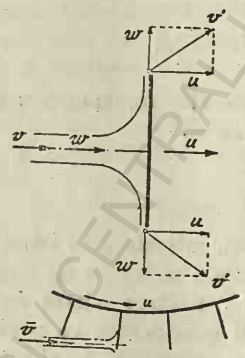


Fig. 129—130

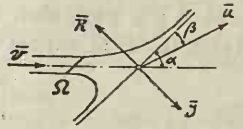


Fig. 131

b) *Planul în mișcare de translație piezișă, izbit oblic* (Fig. 131). Cazul general este acela al unui perete plan, ce face un unghiu α oarecare cu direcția vitesei $\bar{v}$ și un unghiu oarecare β cu vitesa sa de translație, unghiuri care, în cazul particular tratat mai sus, erau de *90°*.

Pentru a găsi pe *I*, dăm și aci ansamblului vitesa $-\bar{u}$, care aduce peretele în repaus.

Să căutăm, după principiul stabilit mai sus, debitul de masă, care izbește planul, precum și componenta normală a vitesei relative de izbire. Debitul de masă va rezulta din înmulțirea secțiunei Ω (notată aci fără accent) a vinei, para-

lelă cu planul, considerată la o oarecare distanță de plan, unde firele sunt paralele, cu componenta normală a vitesei relative; aceasta se compune din proecția lui $\overline{v}$ și a lui $-\overline{u}$ pe normala la plan, fiind

$$v\sin\alpha - u\sin\beta.$$

Vitesa de isbire va fi aceiași componentă, astfel că:

$$I = \frac{\varpi}{g}\,\Omega\,(v\sin\alpha - u\sin\beta)^2.$$

Pentru cazul paletelor unei turbine *de acțiune* (*Pelton*) sau *cu suprapresiune* (*Francis*), care sunt curbe și la care intrarea se face fără ciocnire (vitesa relativă: tangențială peretelui la intrare), a se vedea cursul respectiv.

Formula de mai sus sub forma:

$$I = \zeta\varpi S\,\frac{(v\sin\alpha - u\sin\beta)^2}{2g},$$

cu un coeficient empiric ζ și unde S este acum suprafața unui disc, se utilizează pentru a exprima acțiunea unui curent de apă asupra discului, orientat oblic ($\sphericalangle\alpha$) față de direcția curentului, în timpul deplasării discului cu vitesa $\overline{v}$, făcând cu aceasta $\sphericalangle\beta$. Coeficientul ζ ține seamă atât de condițiunile diferite de scurgere (disc limitat, depășit de fluid la margini sau chiar înecat, adică muiat pe ambele părți) față de problema împingerei unei vine libere tratată mai sus, cât și de forma plăcii, supusă acțiunei unui curent de secțiune indefinită. În mod simplist s'a aplicat această formulă și în cazul unui solid implântat sau mișcat într'un curent, deși problemele aceste se depărtează mult de acela studiat mai sus, corpul fiind complect conturat și intervenind rezistența datorită, precum se va arăta mai târziu, vârtejurilor alternate. În cazul acesta coeficientul ζ ține seama de forma și asperitățile solidului și se ia drept S secțiunea dreapta a cilindrului ce înfășoară solidul paralel cu direcția curentului, adică: $\alpha = 90^0$. Pentru anumite forme de corp există însă metode mai exacte, cari conduc prin calcul la determinarea acțiunei mutuale dintre corp și fluidul, în care el se găsește implântat cu o vitesă relativă de deplasare. În practică ζ include și frecarea.

Aplicația Nr. 109. *A se calcula impulsiunea în următoarele cazuri particulare simetrice, ilustrate în* Fig. 132 (*a*, *b*, *c*, *d*) *și în cari* $\alpha = 90^0$.

Răspuns. *a*) Dacă planul este mare în comparație cu secțiunea vinei (dia-

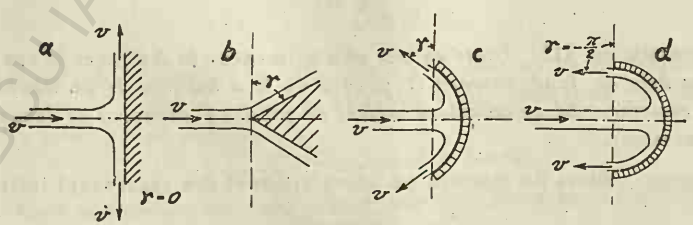


Fig 132

metrul lui mai mare decât circa quadruplul grosimei vinei), eşirea vânei se face aproape paralel cu planul ($\gamma=0$) şi avem, după cum s'a arătat în Aplicaţia Nr 132.

$$I=Mv.$$

b) Dacă obstacolul este conic, fiind isbit în axă, avem:

$$I=Mv(1-\sin\gamma).$$

c) La o calotă sferică, dacă eşirea se face tangenţial, avem aceiaşi formulă însă unghiul γ negativ.

d) In acest caz $\gamma=-\frac{\pi}{2}$ şi deci

$$I=2Mv.$$

Aplicaţia Nr. 110 *In cazul unei plăci fixe verticale (spre a se elimina acţiunea greutăţei apei) sau aplecate, însă cu neglijarea împingerei statice, isbită oblic sub unghiul α, a se găsi debitele M_1 şi M_2 în cari se va împărţi M de o parte şi de alta a vinei permanente, presupunând că fenomenul este plan, având ca plan director planul figurei.*

Răspuns. Aplicând teorema cantităţilor de mişcare în direcţia planului, vom avea:

$$Mv\cos\alpha - M_1v + M_2v = 0$$

sau

$$M_1 - M_2 = M\cos\alpha$$

şi cum:

$$M_1 + M_2 = M$$

rezultă:

$$M_1 = M\frac{(1+\cos\alpha)}{2}, \qquad M_2 = M\frac{(1-\cos\alpha)}{2}.$$

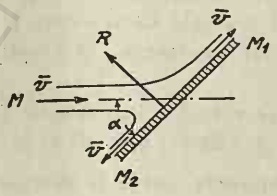


Fig. 133

Aplicaţia Nr. 111. *Dintr'un vas plin permanent la înălţimea h, apa se scurge printr'un orificiu de fund rotunjit Ω şi cade de la o înălţime H pe suprafaţa unui al doilea rezervor. Să se calculeze plusul de presiune provocat pe fundul acestui din urmă rezervor.*

Răspuns. Vitesa de ciocnire pe suprafaţa apei din rezervorul inferior va fi:

$$v_1=\sqrt{2g(h+H)},$$

şi cum vitesa la eşirea din orificiu este: $v=\sqrt{2gh}$, debitul de masă va fi:

$$M=v\Omega.$$

Aşa dar,

$$I=Mv_1=\varpi\sqrt{h(h+H)}.$$

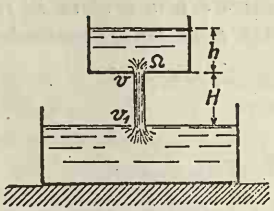


Fig. 134

Aplicaţia Nr. 112. *Plecând de la principiul mişcării baricentrului (creşterea în unitatea de timp a proecţiilor, pe o axă, a cantităţilor de mişcare ale maselor, considerate concentrate în baricentrele lor, este egală cu rezultanta proecţiilor impulsiunilor pe aceiaşi axă), a se stabili expresia împingerei unei vine permanente de secţiune Ω şi vitesă v pe un perete plan vertical fix:*

$$I=\frac{\varpi}{g}\Omega v^2\sin\alpha.$$

Răspuns. Prin secţiunea AB trece în dt masa:

$$Mdt=\frac{\varpi}{g}\Omega v dt,$$

în care timp o masă egală străbate prin secţiunea inelară $CDEF$. Dacă O este centrul de gravitate al masei inelare $CDC'D', EFE'F'$, străcurate prin acea secţiune

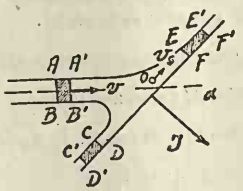


Fig. 135

şi v_s vitesa lui, observând că, din cauza simetriei, v_s va fi paralel cu peretele şi se va găsi în planul ce trece prin axa vinei, normal pe perete, vom avea în virtutea principiului enunţat:

$$M(v-v_s\cos\alpha)=I\sin\alpha.$$

Cum în direcţia peretelui, dacă neglijăm frecarea, nu există nici o forţă, vom avea după acelaşi principiu:

$$M(v_s-v\cos\alpha)=0$$

BIBLIOTECA CENTRALĂ UNIVERSITY LIBRARY IAŞI

și, eliminând pe v_s, obținem:

$$I \sin\alpha = M(v - v\cos^2\alpha) = \frac{\varpi}{g} \Omega v^2 \sin^2\alpha.$$

Aplicația Nr. 113. *Intrtr'un canal deschis, mărginit lateral, curge o vână de secțiune Ω cu vitesa v, fiind deviată prin o placă P, care formează $\sphericalangle\alpha$ cu $\overline{v}$. A se găsi împingerile I și I_1 pe placă și pe fund, neglijându-se gravitatea.*

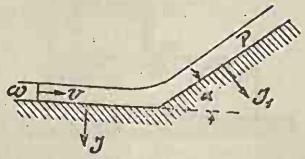


Fig 136

Răspuns. În direcția lui $\overline{I}$ avem, după teorema cantităților de mișcare:

$$Mv \sin\alpha = (I + I_1 \cos\alpha),$$

iar în direcția lui $\overline{I_1}$:

$$M\dot{v} \sin\alpha = (I_1 + I\cos\alpha)$$

de unde:

$$I = I_1 = Mv\,tg\frac{\alpha}{2} = \frac{\varpi}{g} \Omega v^2 tg\frac{\alpha}{2}.$$

Aplicația Nr. 114. *Dintr'un tub T de secțiune Ω, înclinat cu α_0 pe orizont, iese lichidal în A cu viteza v_0, intrând tangențial și scurgându-se dealungul unei suprafețe concave AB, de o formă arbitrară. Extremitatea B este cu h mai jos decât A, și tangenta în B formează $\sphericalangle\alpha$ cu orizontul. Să se calculeze împingerea orizontală H și cea verticală V asupra suprafeței.*

Răspuns. Teorema cantităților de mișcare după orizontală și verticală dă:

$$H = M(v\cos\alpha - v_0\cos\alpha_0)$$

$$V = G - M(v\sin\alpha - v_0\sin\alpha_0),$$

unde G este greutatea vinei dintre A și B.

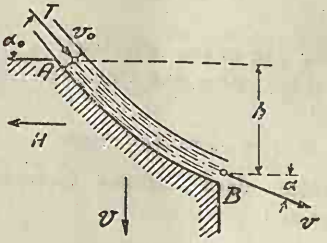


Fig. 137

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Cum de altfel, neglijând frecările, avem $v^2=v_0^2+2gh$, vom introduce această valoare în expresiile de mai sus, cari se mai pot scrie:

$$H=\frac{\varpi}{g}\omega v_0(v\cos\alpha-v_0\cos\alpha_0)$$

$$V=G-\frac{\varpi}{g}\omega v_0(v\sin\alpha-v_0\sin\alpha_0).$$

Aplicația Nr. 115. *O vină, de debit Qm^3/sec, curge prin concavitatea unui perete prismatic cu profilul AB în arc de cerc, având un $\sphericalangle$ la centru $=2\alpha<\pi$. Peretele este în mișcare de antrenare cu viteza u, care formează unghiul β cu axa de simetrie Ox a suprafeței. Intrarea apei se face tangențial cu o viteză relativă w, care (neglijându-se frecările) se conservă până la ieșire. Să se găsească puterea transmisă suprafeței precum și vitesele absolute de intrare v_1 și de ieșire v_2. Făcând să varieze w și menținând pe v_1 constant (ca mărime scalară), să se găsească valoarea u optimă, adică corespunzătoare puterei maxime, precum și valoarea acestei puteri maxime (In jos de Ox, β este negativ).*

Răspuns. Impingerea totală pe suprafață, având direcția Ox, este:

$$I=2\frac{\varpi}{g}Qw\sin\alpha$$

și puterea:

$$P=Iu\cos\beta=2\frac{\varpi}{g}Qwu\sin\alpha\cos\beta.$$

Vitesele sunt:

$$v_1=\sqrt{w^2+u^2+wu\sin(\alpha-\beta)}$$

$$v_2=\sqrt{w^2+u^2-2wu\sin(\alpha+\beta)}.$$

Valoarea optimă a lui u corespunde maximului lui wu. Cum w și u ascultă de relația:

$$v_1^2=w^2+u^2+2wu\sin(\alpha-\beta)$$

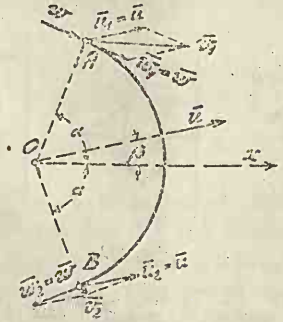


Fig. 138

unde v_1 este cunoscut, această relație dă prin diferențiere, în condițiunile optime $[d(wu)=0]$:

$$wdw+udu=0$$

pe lângă condiția

$$d(wu)\equiv wdu+udw=0.$$

Rezultă

$$w=u$$

și deci

$$u=\frac{v_1}{2\cos\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha+\beta}{2}},$$

ar:

$$P_{max}=\frac{\varpi}{g}Qv_1^2\frac{\sin\alpha\cos\beta}{1+\sin(\alpha-\beta)}.$$

Aplicația Nr. 116. *În exemplul de mai sus, în care se dă v_1 rezultând pentru P_{max}: $u=w$ independent de valoarea lui β, să se găsească β optimum, adică corespunzător lui P_{max} maximorum.*

Răspuns. Derivata expresiei $\frac{\cos\beta}{1+\sin(\alpha-\beta)}$ se anulează, 1) pentru $\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$ $\left(\text{deci } u=w=\frac{v_1}{2\sin\alpha}\right)$ cu $P_{max}=\frac{\varpi}{2g}Qv_1^2\frac{\sin^2\alpha}{1-\cos2\alpha}$ independent de u (chiar pentru $\alpha=0$, avem $u=w=\infty$) și 2) pentru $\beta=\alpha-\frac{\pi}{2}$ $\left(\text{deci } u=w=\frac{v_1}{2}\right)$ cu $P''_{max}=\frac{\varpi}{g}Qv_1^2\frac{\sin^2\alpha}{2}$.

În ce privește valoarea specială $\beta=0$, vom avea:

$$u=w=\frac{v_1}{2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)} \text{ și } P'''_{max}=\frac{\varpi}{g}Q_1v_1^2\frac{\sin\alpha}{1+\sin\alpha}.$$

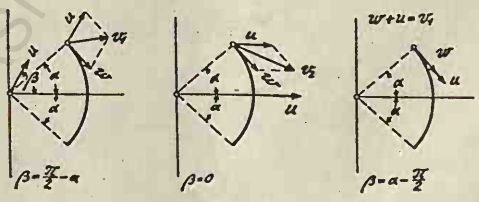


Fig. 139

Cum avem evident $P'_{max}>P'''_{max}>P''_{max}$ și derivata nu se anulează în punctele intermediare, trebuie să admitem că P_{max} descrește continuu de la P'_{max} la P''_{max}, adică primul este maxim absolut, iar al doilea un minim al lui P_{max}.

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Se vede că maximul absolut corespunde cu utilizarea totală a energiei cinetice pe secundă la intrare, cea reziduală fiind nulă. In cazul $\beta=0$ raportul $n=\frac{v_2^2}{v_1^2}$ al energiei reziduale către energia cinetică la intrare este: $n=\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$.

In cazul $\beta=\alpha-\frac{\pi}{2}$ avem $n=\cos^2\alpha$.

Aplicația Nr. 117. *La acelaș exemplu, să presupunem că se dau vitesele w și u independent una de alta și se caută β optimum, adică care corespunde cu P_{ma}*

Răspuns. Se ia atunci expresia lui P sub forma:

$$2\frac{\varpi}{g}Qwu\sin\alpha\cos\beta,$$

din care se vede că β optimum este 0 și

$$P_{max}=2\frac{\varpi}{g}Qwu.$$

Aplicația Nr. 118. *La aplicația 115 pentru u optim (care dă pe P_{max}) să se găsească valoarea lui β, care corespunde cu un anumit raport al pierderei reziduale către puterea la intrare:* $n=\frac{v_2^2}{v_1^2}$.

Răspuns. Raportul acesta, pentru v_1 și β date și u optim se obține, scăzând din puterea la intrare $\frac{1}{2}\frac{\varpi}{g}Qv_1^2$ pe P_{max} și împărțind prin prima:

$$n=\frac{1-\sin(\alpha+\beta)}{1+\sin(\alpha-\beta)},$$

de unde:

$$tg^2\beta-2\frac{1+n}{1-n}\operatorname{cotg}\alpha\,tg\beta=\left(\frac{1+n}{1-n}\right)^2-\frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Dacă s'ar pune aceiași întrebare în condițiile generale ale cazului când se dau w și u, am avea:

$$n=\frac{w^2+u^2-2wu\sin(\alpha+\beta)}{w^2+u^2+2wu\sin(\alpha+\beta)},$$

de unde se scoate valoarea corespunzătoare a lui β.

Aplicația Nr. 119. *Dintr'o roată de pompă orizontală cu palete, care se învârtește cu vitesa de rotație ω aspirând apă sub presiunea p_1 și cu vitesa absolută v, vitesa relativă fiind w_1, apa iese la periferie sub presiunea p_2 și cu vitesa absolută v_2, vitesa relativă fiind w_2; razele la intrare și eșire sunt r_1 și r_2. Să se găsească, neglijând frecarea cu pereții, sporul de sarcină primit de apă la trecerea ei prin pompă.*

Răspuns. Conform ecuației lui *Bernoulli* (pentru unitatea de greutate) în

mișcare relativă, când la potențialul forțelor exterioare care, în cazul roței orizontală, se reduce la acela al presiunei $\frac{p}{\varpi}$, se adaugă potențialul $-\frac{r^2\omega^2}{2g}=-\frac{u^2}{2g}$ al forței de inerție), avem:

$$\frac{p_2}{\varpi}-\frac{p_1}{\varpi}-\frac{\omega^2(r_2^2-r_1^2)}{2g}-\frac{w_1^2-w_2^2}{2g}=0$$

Energia la intrare este $\frac{p_1}{\varpi}+\frac{v_1^2}{2g}$ iar la ieșire $\frac{p_2}{\varpi}+\frac{v_3^2}{2g}$, sau,

$$\frac{p_1}{\varpi}+\frac{w_1^2+u_1^2+2\overline{u_1}\,\overline{w_1}}{2g} \quad \text{și} \quad \frac{p_2}{\varpi}+\frac{w_2^2+u_2^2+2\overline{u_2}\,\overline{w_2}}{2g}.$$

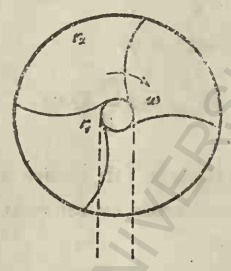


Fig. 140

Creșterea de sarcină în roată, dată de motorul pompei, va fi, așadar, diferența între aceste două expresii, care, în virtutea ecuației lui *Bernoulli* de mai sus, ia forma $\frac{\omega^2(r_1^2-r_1^2)}{g}+\frac{\overline{u_2}\,\overline{w_2}-\overline{u_1}\,\overline{w_1}}{g}$,

Așadar, ținând seamă că $u_1=\omega r_1$ și $u_2=\omega r_2$

$$\frac{p_2-p_1}{\varpi}+\frac{v_2^2-v_1^2}{2g}=\frac{\omega^2(r_2^2-r_1^2)}{g}+\frac{\overline{u_2}\,\overline{w_2}-\overline{u_1}\,\overline{w_1}}{g}.$$

Dacă apa debitată la periferie este colectată într'un tub de refulare de același diametru ca tubul de aspirație, în care avem $\frac{v_0^2}{2g}+\frac{p_0}{\varpi}=\frac{v_1^2}{2g}+\frac{p_1}{\varpi}$ la secțiunea lui de racordare, vom avea în racordul de refulare $v_3=v_0$ și cum $\frac{v_3^2}{2g}+\frac{p_3}{\varpi}=\frac{v_2^2}{v_1}+\frac{p_2}{\varpi}$ rezultă

$$\frac{p_3}{\varpi}-\frac{p_0}{\varpi}=\frac{p_2}{\varpi}+\frac{v_2^2}{2g}-\frac{p_1}{\varpi}-\frac{v_1^2}{2g}$$

adică tot sporul de sarcină în chestiune se transformă în sarcină piezometrică.

Dacă w_1 și w_2 ar fi radiale, acest spor de sarcină se reduce la $\frac{v_2^2-v_2^2}{2g}$.

Aplicația Nr. 120. *Un vas prismatic plin cu apă până la înălțimea h, reazămă prin roți pe un plan orizontal, fiind prevăzut la cota fundului cu un orificiu mic de arie Ω cu axa (așezată în planul figurei, care este un plan de simetrie) ori-*

zontală. Să se studieze mișcarea vasului datorită scurgerei prin orificiu (luându-se ca axă de referință x, axa orificiului cu sensul pozitiv în direcția translației vasului, adică opus scurgerei apei), găsindu-se viteza de antrenare u în funcție de timp, în presupunerea că frecarea de rostogolire (rulment) este nulă și că masa vasului este neglijabilă. Vom presupune coeficientul de debit = 1.

Răspuns. Fie w vitesa relativă (adică față de vas), cu care apa se scurge prin orificiu, considerată ca pozitivă în sensul $-x$. Având în vedere că vasul nu este fix, ci antrenat, și că mișcarea de antrenare nu va fi uniformă ci variată, din cauza că nu întâmpină rezistențe pasive, teorema lui *Bernoulli*, a cărei aplicare în mișcare absolută conduce la formula lui *Toricelli*, va trebui să îmbrace forma corespunzătoare din mișcarea relativă. În acest scop, mișcarea de antrenare fiind o mișcare de translație, va trebui adăogat intensității câmpului $\bar{g}$, forța de inerție

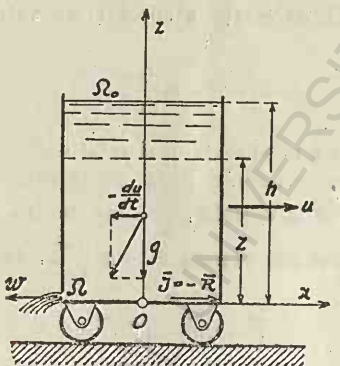


Fig. 141

(de asemenea redusă la unitatea de masă) a mișcării de antrenare, adică $-\frac{d\bar{u}}{dt}\bar{x}$, unde $\bar{x}$ este vectorul unitar după x. Câmpul rezultant vă fi deci $\sqrt{g^2+\left(\frac{du}{dt}\right)^2}$ în direcția diagonalei (fig. 141). Vitesa relativă de scurgere prin orificiu pentru înălțimea de apă z ar fi deci exact:

$$w=\sqrt{2\left[g^2+\left(\frac{du}{dt}\right)^2\right]^{1/2}z}\ ,$$

vitesa absolută de scurgere fiind în orice caz

$$\bar{v}=\bar{u}+\bar{w},$$

iar scalar (pe orizontală)

$$v=u-w.$$

Presupunând că raportul $\frac{\Omega}{\Omega_0}=n$ al ariei orificiului către aria secțiunei orizontale a vasului este foarte mic, accelerația $\frac{d\bar{u}}{dt}\bar{x}$ se poate neglija față de $\bar{g}$ (precum

se va preciza şi mai bine după rezolvirea problemei), astfel că vom putea luà drept vitesă relativă de scurgere, tot după formula lui *Toricelli*:

$$w=\sqrt{2gz},$$

ca şi în cazul unei translaţii uniforme.

Impingerea $\overline{I}$ asupra vasului va avea de asemenea o expresie diferită de aceea din cazul repausului sau al translaţii de antrenare uniforme. Intradevăr, pentru echilibrul dinamic al masei lichide din vas (presupusă solidificată) faţă de axe antrenate cu vasul, trebue ca la forţele reale şi forţa de inerţie a lui *d'Alembert*, exprimată în mişcarea relativă a apei (faţă de vas), debitul de masă fiind M:

$$M\overline{w}=\frac{\varpi}{g}\Omega 2gz\overline{x},$$

să adăogăm forţa auxiliară de inerţie a mişcărei de antrenare ($m \equiv$ masa apei din vas în momentul t):

$$-m\frac{du}{dt}\overline{x},$$

forţa lui *Coriolis* fiind nulă în absenţa unei rotaţiuni.

Echilibrul fictiv în chestiune după o axă orizontală paralelă cu axa orificiului, între reacţiunea $\overline{R}$ a vasului, forţa de inerţie a lui *d'Alembert* $-M\overline{w}$ şi forţa de inerţie a mişcărei de antrenare $-m\frac{du}{dt}\overline{x}$, dă:

$$\overline{R}-M\overline{w}-m\frac{du}{dt}\overline{x}=0$$

sau, scalar după axa x: $$-R+Mw-m\frac{du}{dt}=0.$$

Expresia impingerei, pentru o înăţime z a apei din vas va fi, aşa dar:

$$I=Mw-m\frac{du}{dt}\equiv\frac{\varpi}{g}\Omega 2gz-\frac{\varpi}{g}\Omega_0\frac{du}{dt}z\equiv\frac{\varpi}{g}\Omega_0\left(2gn-\frac{du}{dt}\right)z. \qquad (1)$$

Teorema forţelor vii ne va exprima că, în timpul dt, energia reziduală la eşire

$$\frac{1}{2}Mv^2\,dt\equiv\frac{1}{2}M(w-u)^2\,dt$$

plus energia absorbită în accelerarea masei de apă din vas, adică variaţia

$$d\frac{mu^2}{2}\equiv mudu+\frac{u^2}{2}dm,$$

va fi egală cu energia potenţială cheltuită în dt:

$$\varpi Qdt\,z.$$

Avem evident

$$dm=-Mdt=-\frac{\varpi}{g}Qdt,$$

care diminuează pe m în expresia energiei absorbite pentru accelerare; deși dm este infinit mic și neglijabil față de m, energia cinetică respectivă $\frac{u^2}{2}dm$ se vede că este de același ordin de mărime cu $mudu$. Vom scri deci complet:

$$\underbrace{\frac{1}{2}\frac{\varpi}{g}Q(w-u)^2dt}_{\text{energia reziduală}}+\underbrace{mudu-\frac{u^2}{2}\frac{\varpi}{g}Qdt}_{\text{energia absorbită de accelerare}}=\underbrace{\varpi Qzdt}_{\text{energia pot. cheltuită}} \qquad (2)$$

Impărțind cu $\frac{\varpi}{2g}Qdt$ și cum

$$\frac{\Omega_0}{Q}=\frac{\Omega_0}{\Omega\sqrt{2gz}}\equiv\frac{1}{n\sqrt{2gz}},$$

obținem simplificarea ecuației în z:

$$(w-u)^2+\frac{2}{n\sqrt{2g}}\sqrt{z}\,u\frac{du}{dt}-u^2=w^2$$

sau

$$-2w+\frac{2}{n\sqrt{2g}}\sqrt{z}\frac{du}{dt}=0$$

și, folosind relația $w\equiv\sqrt{2gz}$,

$$-2+\frac{1}{ng}\frac{du}{dt}=0$$

sau

$$\frac{du}{dt}=2ng, \qquad (2.1)$$

accelerație foarte mică față de g.

Avem, așa dar, o accelerație constantă, de unde

$$u=2ngt,$$

presupunând că am plecat de la repaus ($u=0$ la $t=0$).

Rezultă din (1)

$$I=R=0,$$

ceea ce era de prevăzut, fiindcă masa vasului a fost presupusă nulă, în care caz exsitența unei împingeri I, cât de mici, ar fi produs o accelerație infinită a vasului (iar nu egală cu aceea găsită pentru masa lichidă). Se putea deci deduce imediat (2.1) din (1).

Or, $dt=-\frac{dz}{nw}$, deoarece vitesa suprafeței libere nw este $-\frac{dz}{dt}$, astfel că, introducând în (2 1) și înlocuind $w=\sqrt{2gz}$, găsim

$$du=-\sqrt{2g}\frac{dz}{\sqrt{z}}$$

$$u=2\sqrt{2g}\,(\sqrt{h}-\sqrt{z})$$

de unde: $u_{max}=2\sqrt{2gh}$ la sfârșitul golirii, când accelerația se oprește (z neputând deveni negativ), mișcarea vasului (lipsit de masă) devenind uniformă.

Timpul necesar pentru atingerea lui u_{max} va fi:

$$T=\frac{u_{max}}{2n\hat{g}}=\frac{2\sqrt{h}}{n\sqrt{2g}}=\frac{\sqrt{2gh}}{ng}.$$

Succesiunea etapelor interesante ale scurgerei ($u=0$ la început, $v=0$ și în fine $w_0=0$) se poate vedea din următorul tablou:

	Momentul inițial (deschiderea orificiului)	Moleculele eșite pică vertical	Încetarea scurgerei
$z=$	h	$\frac{4}{9}h$	0
$w=$	$\sqrt{2gh}$	$\frac{2}{3}\sqrt{2gh}$	0
$u=$	0	$\frac{2}{3}\sqrt{2gh}$	$2\sqrt{2gh}$
$v=$	$\sqrt{2gh}$	0	$-2\sqrt{2gh}$

w și v la eșire fiind socotite pozitive în sensul $-x$.

În fine, putem face verificarea egalității între energia cinetică *reziduală* (a apei eșite) în timpul scurgerei de la o la T și energia inițial disponibilă la cota orificiului:

$$\frac{1}{2}\int_o^T v^2dm=\frac{1}{2}\frac{\varpi}{g}\Omega\int_o^T\sqrt{2gz}(\sqrt{2gz}-2\sqrt{2gh}+2\sqrt{2gz})^2\,dt=\frac{\varpi\Omega_0h^2}{2},$$

Într'adevăr, făcând înlocuirea: $dt=-\frac{dz}{n\sqrt{2gz}}$, relația de mai sus se reduce la

$$-\int_h^o(3\sqrt{z}-2\sqrt{h})^2dz=\frac{h^2}{2}.$$

Desvoltările de mai sus (ca și tratarea a doua a problemei, în aplicația următoare, sunt în contrazicere cu acelea din soluția *Wittenbauer*).

Aplicația Nr. 121. *A se stabili expresia acceleraţiei vasului din problema precedentă, aplicându-se teorema mișcării centrului de greutate.*

Răspuns. Se știe că derivata în raport cu t a cantității de mișcare $\int\bar{v}dm$ este egală cu resultanta de translație a forțelor exterioare. În speță, forțele exterioare asupra masei lichide în proecție orizontală fiind nule (căci, frecările fiind presupuse nule, am arătat că trebue să avem $R=0$), resultă că resultanta în chestiune este nulă, adică $\int\bar{v}\,dm$ constant.

Dacă, așa dar, vasul pornește din repaus (în momentul deschiderei orificiului, când admitem că regimul permanent, față de axe antrenate cu vasul, se sta-

bilește aproape instantaneu), integrala menționată $\int \bar{v}\, dm$ se va păstra constantă și cum centrul de gravitate al masei lichide *totale* era în repaus, el nu se va deplasa nici în urmă.

Or, în momentul pornirei $t=0$ (cu regimul menționat, presupus instantaneu stabilit) centrul de gravitate se găsește pe verticala Oz, pe care o vom lua ca axă fixă, iar la finele intervalului Δt sistemul lichid va presinta doar diferența, că masa unui strat de la suprafață $-\Delta m=-\frac{\varpi}{g}\Omega\,\Delta z=M\Delta t$, care își avea baricentrul pe axa fixă Oz, se va găsi deplasată dincolo de secția contractată (la stânga ei), fiind animată de vitesa absolută

$$\bar{v}=\bar{w}+\Delta\bar{u},$$

sau scalar

$$v=w-\Delta u,$$

iar masa rămasă în vas $m+\Delta m=m-Mdt$ se va găsi deplasată spre dreaptă cu cantitatea Δx, fiind animată de vitesa de translație $\Delta\bar{u}$, atinsă la finele intervalului Δt. Or, cum direcția orizontală, în care socotim pe w, este opusă direcției+ x în care socotim pe u, va trebui să avem egalitatea

$$M(w-\Delta u)\Delta t=(m-\Delta m)\Delta u \qquad (3)$$

sau

$$(Mw-M\Delta u)\Delta t=(m-M\Delta t)\,\Delta u$$

sau

$$Mw\Delta t=m\Delta u,$$

adică la limită

$$Mw=m\frac{du}{dt}. \qquad (3.1)$$

Această formulă, obținută pentru finele intervalului Δt după pornire ($t=o$), este de altfel valabilă și pentru ori ce alt interval Δt, după momentul t, în care înălțimea de apă este $z<h$, masa lichidă din vas: $\frac{\varpi}{g}\Omega_0 z$, vitesa relativă de eșire la finele intervalului fiind w, vitesa de translație $u+\Delta u$, iar vitesa absolută de eșire $w-(u+\Delta u)$, pe când masa corespunzătoare $-\Delta m$ de la suprafață era animată la t de vitesa u în sens opus. În acest caz însă centrul de greutate al masei m la origina intervalului, în loc de a fi imobil, este animat de vitesa u.

Intradevăr, să aplicăm și aci același principiu în momentul $t+\Delta t$, exprimând că variația după axa x a cantității de mișcare a masei $-\Delta m=Mdt$ (trecută, de la suprafață, dincolo de secțiunea contractală) este egală și de sens contrar cu variația cantității de mișcare a masei rămasă în vas $m+\Delta m$ (trecută de la vitesa u la $u+\Delta u$):

$$\underbrace{M\Delta t}_{\text{masă eșită}}\ \Big[\ \underbrace{[w-(u+\Delta u)]-(-u)}_{\text{creșterea vit. abs.}}\ \Big]=\underbrace{(m+\Delta m)}_{\text{masă rămasă în vas}}\ \Big[\ \underbrace{(u+\Delta u)-u}_{\text{creșterea vit. abs.}}\ \Big]$$

sau

$$M(w-\Delta u)\Delta t=(m+\Delta m)u,$$

reamintind că pentru masa $M\Delta t$ vitesele au fost socotite în sensul $-x$.

Așa dar, (3,1) este valabil pentru orice moment t și, înlocuind $w=\sqrt{2gz}$, $m=\frac{\varpi}{g}\Omega_0 z$, $M=w\Omega$, regăsim (2.1) p. 521.

Aplicația Nr. 122. *Prin deschiderea orificiului Ω în fundul unui vas atârnat prin marginea lui superioară, să se găsească cu cât se va micșora reacțiunea reazemului. Se va presupune contracția nulă.*

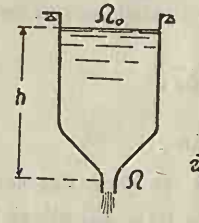
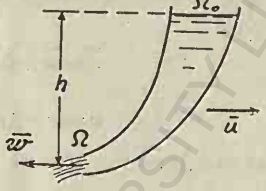


Fig 142



143

Răspuns. Cantitățile de mișcare, îndreptate de jos în sus pentru orificiu și de sus în jos pentru suprafața liberă, dau o rezultantă ascendentă, aplicată fictiv asupra apei:

$$M(v-v_0)=\frac{\varpi}{g}\Omega v^2\left(1-\frac{v_0}{v}\right),$$

care, dacă ținem seamă de coeficientul de vitesă $\alpha<1$ și de raportul $n=\frac{\Omega}{\Omega_0}=\frac{v_0}{v}$, se poate scrie:

$$\varpi\Omega\frac{v^2}{g}(1-n)=2\alpha^2\varpi\Omega\frac{1-n}{1-n^2}h=2\alpha^2\varpi\Omega\, h\,\frac{1}{1+n}.$$

Această rezultantă ascendentă, aplicată real asupra vasului, se scade din greutatea conținutului, micșorând cu aceiași cantitate presiunea pe reazem din starea statică.

Aplicația Nr. 123. *Un vas de forma arătată în fig. 143 are un orificiu vertical Ω și se mișcă cu o vitesă orizontală de translație $\bar{u}$, normală pe Ω. Să se găsească puterea desvoltată de împingerea orizontală asupra vasului, precum și vitesa u optimă, adică aceia care dă puterea maximă.*

Răspuns. Pentruca să avem regim permanent față de axe antrenate, ar trebui ca vasul să fie alimentat pe sus cu o vitesă absolută $\bar{u}$, astfel ca vitesa orizontală relativă a moleculelor adaose să fie nulă. Rezultă pentru intrare o energie cinetică absolută pe secundă de $\frac{1}{2}Mu^2$.

Vitesa relativă w, cu care se scurge lichidul din orificiu, este (neglijând frecările, precum și vitesa relativă verticală la intrare, $\frac{\Omega}{\Omega_0}$ fiind foarte mic)

$$w=\sqrt{2gh}.$$

Neexistând vitesă relativă orizontală la intrare, impingerea în sensul opus scurgerei are ca expresie:

$$I=Mw\equiv\frac{\varpi}{g}\Omega w^2=2\varpi\Omega h,$$

şi, pentru ca să avem în realitate mişcare uniformă, trebue ca resistenţa opusă mişcărei vasului să fie egală cu $I=2\varpi\Omega h$.

Acelaşi resultat se obţine, dacă raţionăm cu vitesele absolute $\overline{w}$ şi $\overline{u}+\overline{w}$.

Puterea desvoltată asupra vasului (=puterea utilă, dacă neglijăm efectul frecărilor interioare) este:

$$P\equiv Iu=Mwu=?\varpi\Omega hu.$$

Neglijând deci puterea perdută prin frecare în interiorul vasului, vom avea egalitate între energia cheltuită în unitatea de timp:

$$\frac{1}{2}Mu^2+\varpi Qh\equiv\frac{1}{2}M(u^2+w^2)$$

şi puterea utilă desvoltată $P=Mwu$ plus energia reziduală (în unitatea de timp) dela eşire, unde vitesa absolută este $v=w-u$, adică:

$$\frac{1}{2}M(u^2+w^2)=Mwu+\frac{1}{2}M(w-u)^2,$$

ceeace se verifică uşor. În asemenea condiţii vitesa u optimă, care va da eficienţa maximă ($\eta=1$), va fi aceea, pentru care pierderea reziduală va fi nulă, adică $w-u=0$, sau $u=w$. P_{max} se produce tot atunci, fiindcă, în ipotezele de alimentare admise, energia disponibilă este cu atât mai mare cu cât u este mai mare, ceeace permite a avea un P crescător cu u, după cum se vede de altfel din expresia:

$$P=Mwu,$$

unde w şi M sunt constante, iar dacă $u>v$, apa n'ar mai eşi.

Să luăm însă cazul, mai realizabil, nu însă practic, când alimentarea vasului s'ar face cu o vitesă absolută v_0 (foarte mică) verticală (de ex. la o turbină normală de diametru foarte mare, pentruca u să poată fi privit ca o vitesă de translaţie). În cazul acesta vom avea şi la intrare o vitesă relativă, orizontală, egală cu $-u$, care n'ar fi îndreptată tangenţial, ci ar produce normal impulsiune (negativă), adică ciocnire, astfel că impingerea va avea ca expresie:

$$I=Mw-Mu=M(w-u),$$

iar:

$$P=M(w-u)u.$$

Dacă neglijăm contribuţia pe care numita vitesă, presupusă conservată (în realitate în mare parte se amortizează prin ciocnire), ar da-o la eşire, am avea şi atunci $w=\sqrt{2gh}$.

Puterea transmisă ar comporta un maximum pentru $u=\frac{w}{2}$, când

$$P_{max}=\frac{1}{2}\frac{Mw^2}{2}.$$

Eficiența este în cazul acesta (admițând că ar fi neglijabil adaosul lui $\frac{Mv_0^2}{2}$ la energia disponibilă $\varpi Qh = \frac{Mw^2}{2}$, sau că $\frac{Mv_0^2}{2}$ s'ar compensa cu perderile prin frecări, de asemenea neglljablie) $=0{,}5$. În practică, nefiind recomandabil a avea ciocnire, care atrage pierderi de energie suplimentare, se caută ca vitesa relativă $\overline{w_0}$ la intrare să fie tangențială, iar w_0, de o mărime apreciabilă, contribue covârșitor prin termenul $\frac{w_0^2}{2g}$, alături de h, la valoarea lui w. Cum *d. e.* pereții la intrare au fost presupuși verticali, eficiența se poate îmbunătăți, făcând ca v_0, vitesa absolută la intrare, să aibă în direcția lui $\overline{u}$ o componentă egală cu u, suprimându-se astfel complet ciocnirea (cazul considerat la început, unde totuși am presupus că $\overline{v_0}=\overline{u}$, adică fără componentă verticală, direcția pereților la intrare fiind atunci indiferentă).

Cazul când $\overline{v_0}$ are o componentă oarecare orizontală, deci în direcția $\overline{u_0}$ este tratat în aplicația următoare, totuși cu neglijarea efectelor ciocnirii (ceea ce echivalează cu o intrare tangențială), în care caz se poate atinge și eficiența $\eta=1$.

Aplicația Nr. 124. *Dintr'un tub fix AB, având axa înclinată cu* $\sphericalangle\alpha$ *pe orizont (în planul figurei), se alimentează cu vitesa absolută* v_0 *un vas de o secțiune orizontală mare (astfel ca să se poată mișca mult timp sub tubul de alimentare fix),*

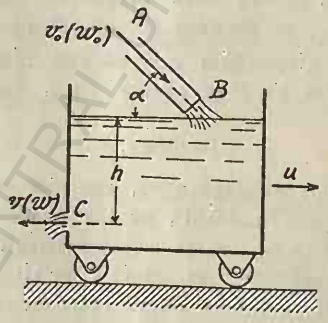


Fig. 144

având în C, la cota h sub suprafața liberă, un orificiu Ω *vertical, și mișcându-se cu vitesa constantă u, în sensul opus orificiului, sens în care este îndreptată și proecția orizontală* $v_0\cos\alpha$ *a lui* v_0. *Se va presupune coeficientul de debit* $=1$.

Să se găsească împingerea orizontală și verticală asupra vasului, eficiența η *și vitesa de antrenare u optimă (care dă pe* P_{max} *și* η_{max}). *Se vor neglija pierderile prin ciocnire și frecare.*

Răspuns. Impingerea orizontală va fi:

$$I_h = M(w+w_0\cos\alpha) = M[w+(v_0\cos\alpha-u)] = M(w-u+v_0\cos\alpha),$$

iar cea verticală (descendentă):

$$I_v = Mv_0\sin\alpha.$$

Puterea transmisă prin împingerea orizontală, folosită numai la învingerea rezistenței de rulment, va fi:

$$P=I_h u=Mu(w-u+v_0\cos\alpha),$$

pe când puterea disponibilă la nivelul orificiului:

$$P_d=\frac{1}{2}M(v_0^2+2gh),$$

iar puterea pierdută sau reziduală $\frac{1}{2}Mv^2$ (unde v este vitesa absolută la ieșire $=w-u)=\frac{1}{2}M(w-u)^2$. Dacă, așadar, nu facem apel la nici o altă sursă de energie străină, cum rezistența la rulment s'a presupus egală cu împingerea, pentru a avea mișcare uniformă (u constant), trebue să avem egalitatea:

$$Mu(w-u+v_0\cos\alpha)+\frac{1}{2}M(w-u)^2=\frac{1}{2}=M(v_0^2+2gh),$$

Aceasta se verifică ușor, fiindcă se reduce la egalitatea:

$$w^2=v^2+u^2-2v_0u\cos\alpha+2gh=w_0^2+2gh, \qquad (1)$$

care nu este altceva decât ecuația lui Bernoulli în mișcare relativă, mișcarea de antrenare fiind o translație uniformă (în care caz ecuația lui Bernoulli se aplică neschimbată).

Eficiența este:

$$\eta=\frac{P}{P_d}=\frac{2u(w-u+v_0\cos\alpha)}{v_0^2+2gh},$$

fiind maximă, odată cu puterea, pentru u care rezultă făcând $\eta=1$. Cum problema se reduce la aplicația Nr. 123 dacă facem $\overline{v_0}=\overline{u}$, trebue să găsim și aci pentru $\eta=1$, în acest caz particular, $u=w$, ceea ce se verifică ușor.

Aplicația Nr. 125. *Un canal de turbină (de fapt tub), străbătut de un debit Q, având o înălțime h și un raport* $\frac{\Omega}{\Omega_0}=n$, *iar unghiurile vitezelor relative de intrare și de eșire după direcția paletelor fiind* α_0 *și* α *față de direcția orizontală* $\overline{u}$, *primește apă la intrare sub o sarcină* h_0 *și sub presiunea atmosferică. Dacă a-*

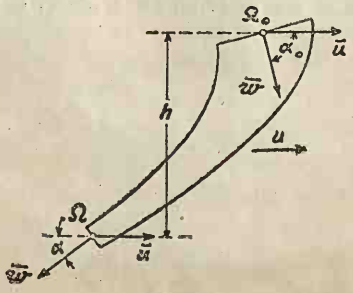


Fig. 145

cest canal se mișcă orizontal în mod uniform, să se găsească viteza de antrenare u, care dă o intrare fără ciocnire.

Răspuns. Viteza absolută la intrare este: $v_0^2=2gh_0$, iar relația compunerii vitesei la intrare:

$$v_0^2=w_0^2+u^2+2w_0u\cos\alpha_0\,, \qquad (1)$$

de unde (alungând soluția net negativă):

$$u=\sqrt{v_0^2-w_0^2\sin^2\alpha_0}-w_0\cos\alpha_0\,,$$

și cum, admițând că pierderile sunt neglijabile,

$$w^2=2gh+w_0^2 \quad \text{și punând } n\equiv\frac{\Omega}{\Omega_0}=\frac{w_0}{w},$$

$$w^2=2gh\frac{1}{1-n^2}\,, \quad w_0^2=2gh\,\frac{n^2}{1-n^2} \qquad (2)$$

obținem în fine:

$$u=\sqrt{2g}\left[\sqrt{h_0-\frac{n^2}{1-n^2}h\sin^2\alpha_0}-\sqrt{\frac{n^2}{1-n^2}h\cos^2\alpha_0}\right].$$

Pentruca această valoare să fie >0, adică să avem o împingere motoare, trebue să avem evident:

$$n\leqq\sqrt{\frac{h_0}{h+h_0}}\,.$$

Condițiile ca pierderea reziduală să fie nulă sunt: $\alpha=0$ și $w=u$. Prima condiție depinde de construcție; în ceeace privește pe a doua, punând în (1) $u=w$ și introducând valorile lui w_0 și w din (2), rezultă:

$$\cos\alpha_0=\frac{h_0(1-n^2)-h(1+n^2)}{2nh}\,,$$

care determină fie α_0 când n și h sunt date, fie pe n când α_0 și h sunt date.

Cum însă $\cos\alpha_0<1$, rezultă condiția în orice caz pentru n:

$$n\geqq\frac{h_0-h}{h_0+h}\,.$$

Aplicația Nr. 126. *Intr'un vas cu un compartiment superior plin cu lichid până la înălțimea h, acesta se scurge printr'un orificiu, de arie mică față de secțiu-*

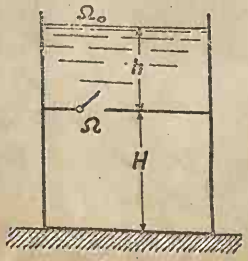


Fig. 146

nea orizontală Ω_0 a vasului, într'un compartiment inferior gol, de aceiași secțiune și de înălțime H. Să se cerceteze variația presiunei pe bază, dela început până la sfârșitul scurgerii. Se va presupune coeficientul de debit $=1$ și $\frac{\Omega}{\Omega_0}$ neglijabil.

Răspuns. Foarte puțin după deschiderea lui Ω vom avea pe suportul rezervorului o micșorare a presiunei (care era egală cu greutatea apei), exprimată prin

$$2\varpi\Omega h,$$

datorită cantității de mișcare la orificiul de fund Ω (vezi Aplic. Nr. 122).

Îndată ce însă vina lichidă va atinge fundul inferior, presupunând că h și H nu s'ar modifica, va interveni o împingere prin ciocnire

$$I_0 = M\sqrt{2g(h+H)} \equiv 2\varpi\Omega h\sqrt{1+\frac{H}{h}},$$

astfel că, în realitate, vom avea o creștere a presiunei inițiale pe bază, egală cu diferența acestor expresii:

$$2\varpi\Omega h\left[\sqrt{1+\frac{H}{h}} - 1\right].$$

Dacă nivelul din compartimentul superior scade, înălțimea H a golului inferior, scăzând cu aceiași cantitate, creșterea în chestiune se va micșora treptat, deoarece, dacă la un moment dat înălțimea apei în acel compartiment va fi $z<h$ și deci $h-z$ în cel inferior, vom avea o împingere mai mică:

$$I = 2\varpi\Omega z\sqrt{1+\frac{H-h+z}{z}},$$

din care trebue scăzut (ca micșorare a presiunei datorite greutății apei) $2\varpi\Omega z$, deci un spor al presiunei inițiale pe bază de:

$$2\varpi\Omega\left[\sqrt{(2z+H-h)z} - z\right],$$

care descrește cu z până la 0 (când $z=0$).

Aplicația Nr. 127. *Un canal de turbină, analog cu acela din fig. 145, se învârtește cu vitesa de rotație ω în jurul unei axe verticale, fiind străbătut de un debit Q. Distanțele la axă ale centrelor secțiunilor la intrare și la eșire sunt r_0 și r, iar unghiurile pe care le formează $\overline{w_0}$ și $\overline{w}$, respectiv cu $-\overline{u_0}$ și $-\overline{u}$ sunt α_0 și α. Să se găsească momentul împingerei în jurul axei, cunoscând vitesele relative w_0 și w și neglijând greutatea apei din canal.*

Răspuns. Considerăm canalul ca făcând parte dintr'o coroană completă de turbină, pentru a putea aplica teorema cantităților de mișcare ca în cazul mișcării permanente cu *pereți marginali fixi*, cu ajutorul vitezelor absolute $\overline{v_0}$ și $\overline{v}$. Momentul căutat va fi o fracțiune a momentului coroanei în proporție cu debitul. Vom avea deci, dacă debitul de masă aferent canalului este M:

$$\mathcal{M} = M(v_{u_0} r_0 - v_u r).$$

Pentru a avea aceste proecţii ale lui $\overline{v_0}$ şi $\overline{v}$ respectiv pe direcţiile $\overline{u_0}$ şi $\overline{u}$, adunăm proecţiile componentelor lor w_0 şi u_0, respectiv w şi u:

$$\mathcal{M}=M[(u_0-w_0\cos\alpha_0)r_0-(u-w\cos\alpha)r]=\frac{\omega}{g}Q[(\omega r_0-w_0\cos\alpha_0)r_0-(\omega r-w\cos\alpha)r].$$

Momentul dat de greutatea apei, care constitue partea statică a împingerei, este nul, greutatea fiind paralelă cu axa de rotaţie.

Observaţie. Prin numeroasele aplicaţii de mai sus se vădeşte că, în exprimarea echilibrului fictiv, forţele fictiv aplicate fluidului: $\Sigma(-\overline{mj})$, egale şi de sens contrar cu forţele reale ce acţionează, producând acceleraţiile moleculelor, sunt identic exprimate ca reacţiunile (acestor forţe reale), care şi ele sunt egale şi de sens contrar cu forţele reale menţionate. Aşa dar $\Sigma(-\overline{mj})$ sau, în cazul mişcărei permanente, echivalentele lor din punct de vedere static $\Sigma\overline{\mu v}$, exprimă şi forţele reale de *reacţiune* (datorite mişcărei şi constituind ceeace în acest capitol am numit *acţiune dinamică*) a fluidului, cari, concomitet cu greutatea sa proprie, se transmit prin fluid (privit ca solidificat) asupra pereţilor solizi, cu care masa fluidă considerată vine în contact. Această coincidenţă de valoare (în virtutea principiului acţiunei şi reacţiunei) a produs în unele spirite şi s'a acreditat în unele publicaţii streine de vulgarizare eftină*), confuzia de a atribui forţelor lui *d'Alembert, fictiv* aplicate corpurilor în mişcare neuniformă sau nerectilinie, o realitate, care, cu expresia $\Sigma(-\overline{mj})$, nu există de cât pentru *reacţiunile* acestora, datorite mişcărei lor, (transmise) asupra corpurilor streine cu cari vin în contact.

*) *Ch. Ed. Guillaume* „Initiation, à la Mécanique". *Marcel Boll* şi a.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

R21(G)

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY